

熱分散を考慮したトポロジー最適化の基礎的研究

Fundamental study of topology optimization considering thermal dispersion

高荒圭佑¹⁾ 干場大也²⁾ 西口浩司³⁾ 加藤準治⁴⁾

Keisuke Takaara, Hiroya Hoshiba, Koji Nishiguchi and Junji Kato

¹⁾名古屋大学 大学院工学研究科 (〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: takaara.keisuke.c9@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

²⁾博(工) 名古屋大学 大学院工学研究科 助教 (E-mail: hoshiba.hiroya.y6@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

³⁾博(工) 名古屋大学 大学院工学研究科 准教授 (E-mail: kojinishiguchi.r9@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

⁴⁾Dr.-Ing. 名古屋大学 大学院工学研究科 教授 (E-mail: kato.junji.i5@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

This study investigates the influence of thermal dispersion on homogenization-based topology optimization. Thermal dispersion is an important phenomenon that affects heat transport in porous media due to local variations in the microscopic temperature distribution and non-uniformity of microscopic flow velocity, representing the additional macroscopic thermal diffusion effect induced by fluid flow. Thermal dispersion inevitably occurs inside the porous media, therefore convection effect as well as thermal diffusion effect should be taken into account into the cell problem in the evaluation of the heat transfer coefficient of porous materials. However, most of the previous studies on the optimal design of porous structures ignore the convection, and the effects of thermal dispersion on microstructural topology optimization remain unexplored. The fundamental question of this paper is, what type of microstructure exhibits the maximum/minimum thermal dispersion effect? To investigate this issue, we formulate and solve an optimization problem to maximize and minimize the thermal dispersion coefficient to clarify the effect of thermal dispersion on microstructural topology optimization. The objective function is a component of the thermal dispersion tensor derived by homogenization method known as the two-scale asymptotic expansion with drift approach. The sensitivity of the objective function and the adjoint problem are derived based on the continuous adjoint variable method. The influence of thermal dispersion on the optimization is discussed through several numerical examples.

Key Words : Microstructure, Topology optimization, Homogenization

1. はじめに

多孔質体中の熱流動現象は、地中熱ヒートポンプ (Ground Source Heat Pump: GSHP)、熱交換用多孔質材、断熱材、生体組織、触媒、電極など、さまざまな工学分野において重要な役割を果たす。多孔質体のような緻密な構造物における伝熱現象を、直接数値計算によって評価するには膨大な計算資源を要する。そのため、多孔質構造物における平均的な熱輸送特性を捉えることを目的とした、巨視的モデルを導入する方法、すなわち均質化法の構築が盛んに研究されている。ここで、多孔質体内部の伝熱特性を均質化法に基づき正確に予測するため、熱分散と呼ばれる概念が重要となる。

熱分散とは、構造の非均質性による熱輸送特性への影響を、巨視的な熱拡散効果として考慮するものである。熱分散係数は多孔質体の構造、固体および流体の材料定数、多孔質中の流体の流れの状態により変化する。熱分散を考慮した多孔質体の有効熱伝導率には、熱拡散係数に加えて熱分散係数が考慮されることになる。これを考慮しない場合、多孔質体の有効熱伝導率を実際よりも過小に、あるいは過大に評価することに繋がる。これまでに多くの研究により、熱分散を考慮した有効熱伝導率を理論・数値的に評価する方法の提案や、その妥当性を検証するための数値および実験的な取り組みがなされてきた [1,2,3,4]。

一方で、多孔質やラティス構造物の熱流動現象を扱う均質化法に基づくトポロジー最適化の研究 [5,6,7,8,9,10,11] では、熱分散が考慮されることはほとんど無い。それゆえに、熱分散係数とミクロ構造の関係について直接論じた報告はない。そして、どのようなミクロ構造を仮定した場合に、熱分散が大きく、あるいは小さくなるのか、という基本的な問いに対する答えは未だ明らかになっていない。そこで本研究は、トポロジー最適化を用いて、上記の問いに対する解答を見出すことを目的とする。ここで留意すべき点として、[12] は、熱拡散係数と熱分散係数の和として定義される有効熱伝導係数の最大化を検討している。一方、本研究では、熱分散係数の最適化のみに焦点を当てており、[12] の研究とは着目する対象が異なる。

2. 均質化問題

(1) 支配方程式

本研究では、周期的なミクロ構造からなる多孔質体内部の流体および熱の流れを考える。周期的なミクロ構造をユニットセルと呼び、 Y と表す。ユニットセルは流体領域 Y_f と固体領域 Y_s からなり、 Y_f と Y_s は $Y_f \cup Y_s = Y$ および $Y_f \cap Y_s = \emptyset$ を満足するものとする。

ここでは、多孔質体中の流れとして Stokes 流れを仮定する。この場合、ミクロ境界値問題として Stokes 方

程式，マクロスケールの方程式として Darcy 則が導かれる．均質化法に関する文献 [13] に倣い，ミクロ境界値問題として以下の周期境界条件付き Stokes 方程式を定義する．

$$\begin{aligned} -Pr' \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_j^2} + G_i + \frac{\partial p}{\partial y_i} &= 0 \quad \text{in } Y_f \\ \frac{\partial u_j}{\partial y_j} &= 0 \quad \text{in } Y_f \\ u_i &= 0 \quad \text{in } Y_s \\ u_i, p &\text{ is } Y\text{-periodic} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで， u_i, p, Pr', G_i はそれぞれミクロ領域で定義される流速，擾乱圧力，Prandtl 数，マクロ圧力勾配である．

熱の移流拡散問題に対するミクロ・マクロスケールの支配方程式の導出手順は，two scale asymptotic expansion with drift approach [14] に基づき Francisco ら [12] により示されている．これに倣い，ミクロ境界値問題として以下の熱の移流拡散問題を考える．

$$\begin{aligned} Pe_{loc} u_j \left(\frac{\partial T}{\partial y_j} + E_j \right) - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(k \left(\frac{\partial T}{\partial y_j} + E_j \right) \right) \\ - Pe_{loc} \frac{\rho c}{\bar{\rho} c} \bar{u}_j E_j &= 0 \quad \text{in } Y_f \\ - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(k_R \left(\frac{\partial T}{\partial y_j} + E_j \right) \right) - Pe_{loc} \frac{\rho c}{\bar{\rho} c} \bar{u}_j E_j &= 0 \\ &\quad \text{in } Y_s \\ T &\text{ is } Y\text{-periodic} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで， $T, Pe_{loc}, k_R = k_s/k_f, \rho c = \rho_s c_s/\rho_f c_f, \bar{\rho} c, E_i$ はそれぞれ温度，local Péclet 数，流体に対する固体の熱伝導率比，熱容量比，ユニットセル領域での平均熱容量，マクロ温度勾配である． \bar{u}_i は領域 Y 上の流速 u_i の平均であり，以下で定義される．

$$\bar{u}_i = \frac{1}{|Y|} \int_Y u_i dY \quad (3)$$

流体問題を対象としたトポロジー最適化手法 [15] に基づき，Stokes 方程式に固体領域のみに作用する外力として Brinkman 項を加える．これは，固体領域にて流速がゼロとなる条件を課すために導入されるもので，以下で与えられる．

$$f_i^B = -\alpha(y) u_i \quad (4)$$

ここに， f^B は Brinkman 項を表す． α は透過抵抗係数であり，以下で与えられる．

$$\alpha(y) = \begin{cases} \alpha_s & \text{in } Y_s \\ 0 & \text{in } Y_f \end{cases} \quad (5)$$

ここで， α_s は固体の透過抵抗係数である．固体領域において流速をゼロとするには $\alpha_s \rightarrow \infty$ の極限を考える必要があるが，数値計算上は十分に大きな値を設定する．本研究では $\alpha_s = 10^6$ とする．また，熱伝導係数の分布関数 $k(y)$ を導入し，以下のように定義する．

$$k(y) = \begin{cases} k_R & \text{in } Y_s \\ 1 & \text{in } Y_f \end{cases} \quad (6)$$

上記の Brinkman 項および熱伝導率の分布関数表現を用いて，流体・固体領域上で統一的にミクロ境界値問題を記述する．

$$\begin{aligned} -Pr' \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_j^2} + \alpha u_i + G_i + \frac{\partial p}{\partial y_i} &= 0 \quad \text{in } Y \\ \frac{\partial u_j}{\partial y_j} &= 0 \quad \text{in } Y \\ u_i, p &\text{ is } Y\text{-periodic} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Pe_{loc} u_j \left(\frac{\partial T}{\partial y_j} + E_j \right) - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(k \left(\frac{\partial T}{\partial y_j} + E_j \right) \right) \\ - Pe_{loc} \frac{\rho c}{\bar{\rho} c} \bar{u}_j E_j &= 0 \quad \text{in } Y \\ T &\text{ is } Y\text{-periodic} \end{aligned} \quad (8)$$

巨視的な熱の移流拡散方程式は以下のように導かれる．

$$\bar{\rho} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + Pe \bar{u}_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = J_{jk}^H \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_k} \quad (9)$$

ここで， θ は巨視的温度， J^H は均質化熱伝導係数テンソルであり，熱拡散に由来する均質化熱拡散テンソル K^H と熱分散に由来する熱分散テンソル D^H との和として $J^H = K^H + D^H$ で与えられる．巨視的熱流束を $Q = -J^H \nabla_x \theta = -J^H E$ で表すと， J^H, K^H, D^H はそれぞれ以下のように計算される．

In 2D

$$\begin{aligned} J_{i1}^H &= Q_i, K_{i1}^H = Q_i^c, D_{i1}^H = Q_i^d \quad \text{under } E = \{-1, 0\}^T \\ J_{i2}^H &= Q_i, K_{i2}^H = Q_i^c, D_{i2}^H = Q_i^d \quad \text{under } E = \{0, -1\}^T \end{aligned} \quad (10)$$

In 3D

$$\begin{aligned} J_{i1}^H &= Q_i, K_{i1}^H = Q_i^c, D_{i1}^H = Q_i^d \quad \text{under } E = \{-1, 0, 0\}^T \\ J_{i2}^H &= Q_i, K_{i2}^H = Q_i^c, D_{i2}^H = Q_i^d \quad \text{under } E = \{0, -1, 0\}^T \\ J_{i3}^H &= Q_i, K_{i3}^H = Q_i^c, D_{i3}^H = Q_i^d \quad \text{under } E = \{0, 0, -1\}^T \end{aligned} \quad (11)$$

ここで， Q^c および Q^d は，それぞれ熱拡散および熱分散に由来する巨視的な熱流束成分であり，これらはミクロ的な熱流束のユニットセル上での平均量として以下のように与えられる．

$$Q_i^c = \frac{1}{|Y|} \int_Y -k \left(\frac{\partial T}{\partial y_i} + E_j \right) dY = \frac{1}{|Y|} \int_Y q_i^c dY \quad (12)$$

$$Q_i^d = \frac{1}{|Y|} \int_Y Pe_{loc} (u - \bar{u}) T dY = \frac{1}{|Y|} \int_Y q_i^d dY \quad (13)$$

q^c および q^d は，それぞれ熱拡散および熱分散に由来するミクロ的な熱流束成分として定義されている．

3. トポロジー最適化

(1) 材料補間

ユニットセル領域における固体および流体の分布を区分一定値関数 $\phi(y)$ で表現し，これを設計変数とする．

	Optimization	Initial design	Local Péclet number Pe_{loc}	The ratio of heat conductivity k
case-max-A0	maximization	design-0	10^1	10^1
case-max-B0	maximization	design-0	10^2	10^1
case-max-C0	maximization	design-0	10^3	10^1
case-max-D0	maximization	design-0	10^1	10^2
case-max-E0	maximization	design-0	10^2	10^2
case-max-F0	maximization	design-0	10^3	10^2
case-max-A1	maximization	design-1	10^1	10^1
case-max-B1	maximization	design-1	10^2	10^1
case-max-C1	maximization	design-1	10^3	10^1
case-max-D1	maximization	design-1	10^1	10^2
case-max-E1	maximization	design-1	10^2	10^2
case-max-F1	maximization	design-1	10^3	10^2

表-1 本研究で検討する熱分散係数の最大化計算例

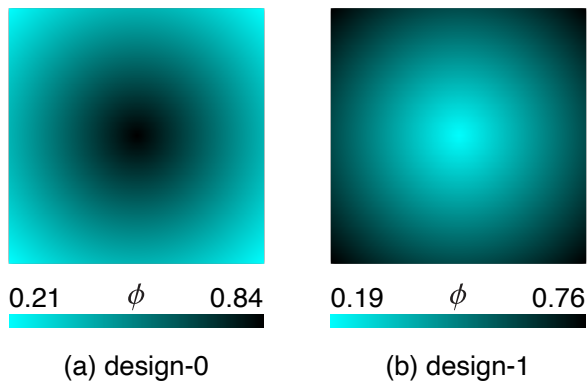


図-1 数値計算例にて使用する二種類の初期密度分布

固体領域は $\phi(\mathbf{y}) = 1$ で、流体領域は $\phi(\mathbf{y}) = 0$ で表される。トポロジー最適化では、勾配情報を活用するために、元の離散的な最適化問題を連続的な問題に緩和する。それに伴い、各点での材料特性は設計変数に関する補間関数で表現する。本研究では、透過抵抗係数、熱伝導率比を以下のような冪関数により補間する。

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{y}) &= \alpha_s \phi(\mathbf{y})^{q_\alpha} \\ k(\mathbf{y}) &= 1 + (k_R - 1) \phi(\mathbf{y})^{q_k}\end{aligned}\quad (14)$$

ここで、 q_α, q_k は正の値をとるペナルティパラメータである。なお、本研究では、簡単のため、流体および固体の単位体積あたりの熱容量が等しいと仮定する。すなわち、 $\rho c = \rho_s c_s = \rho_f c_f = \bar{\rho} c$ とし、 ρc の補間は考慮しない。また、continuation アプローチを採用し、 q_α の値は 4, 2, 3, 1 と段階的に小さくする。 q_k に関しては $q_k = 3$ とする。

	Microscopic fluctuation velocity	Microscopic fluctuation temperature	Microscopic heat flux of dispersion
(i)	$u_1 - \bar{u}_1 > 0$	$T > 0$	$q_1^d > 0$
(ii)	$u_1 - \bar{u}_1 < 0$	$T < 0$	$q_1^d > 0$
(iii)	$u_1 - \bar{u}_1 > 0$	$T < 0$	$q_1^d < 0$
(iv)	$u_1 - \bar{u}_1 < 0$	$T > 0$	$q_1^d < 0$

表-2 擾乱速度、擾乱温度、および熱分散由来のミクロ的熱流束の符号との関係

(2) 最適化問題

本研究における最適化問題を一般的に以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad & f_0(\mathbf{u}, T, \phi(\mathbf{y})) \\ \text{subject to} \quad & \mathcal{R}_S = \mathbf{0} \\ & \mathcal{R}_E = 0 \\ & 0 \leq \phi \leq 1 \\ & f_i \leq 0 \quad (i = 1, \dots, N_{\text{con}})\end{aligned}\quad (15)$$

ここで、 f_0 は目的関数、 $\mathcal{R}_S = \mathbf{0}$ は非圧縮性 Stokes 問題の残差形式、 $\mathcal{R}_E = 0$ は熱の移流拡散方程式の残差形式である。 f_i は制約関数、 N_{con} は制約条件の総数である。上記の最適化問題を解くために、MMA (method of moving asymptotes)[16] を用いる。

4. 数値計算例

ここでは、熱分散テンソルの成分、特に D_{11} の最大化と最小化の問題を考える。なお、誌面の都合上、最大化問題の結果のみを示し、最小化結果は講演会当日に示す。

熱分散のメカニズムを理解するために、表-2 において、擾乱速度、擾乱温度、および熱分散由来のミクロ的な熱流束との関係をまとめている。この表は、擾乱速度と擾乱温度の符号が、熱分散由来のミクロ的な熱流束 q_i^d の符号にどのように影響を与えるかを示している。 q_1^d の正の値は、(i) および (ii) の場合において生じ、

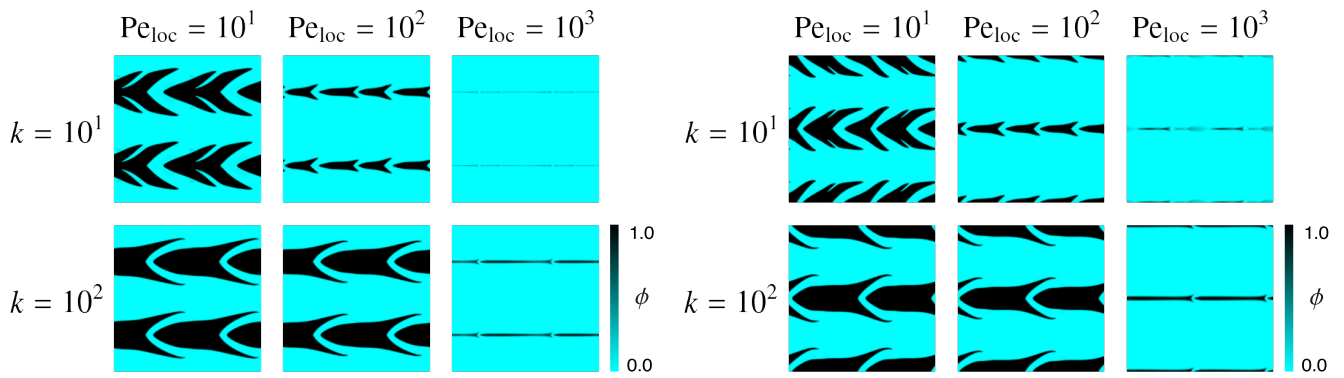


図-2 初期密度分布に design-0 を用いた場合の D_{11} 最大化結果
(case-max-A0 ~ case-max-F0)

図-3 初期密度分布に design-1 を用いた場合の D_{11} 最大化結果
(case-max-A1 ~ case-max-F1)

	Objective function value D_{11}	Total number of optimization steps	Steps for continuation operations
case-max-A0	2.0×10^{-3}	582	528, 530, 532, 579
case-max-B0	2.3×10^{-1}	1506	1478, 1480, 1482, 1484
case-max-C0	31	521	471, 481, 493, 503
case-max-D0	7.7×10^{-3}	589	531, 533, 574, 576
case-max-E0	1.2×10^{-1}	766	715, 719, 721, 765
case-max-F0	29	916	844, 846, 848, 880

表-3 目的関数値, 総最適化ステップ, continuation 操作のステップ (case-max-A0 ~ F0)

	Objective function value D_{11}	Total number of optimization steps	Steps for continuation operations
case-max-A1	2.2×10^{-3}	490	434, 436, 438, 487
case-max-B1	2.3×10^{-1}	1277	1241, 1243, 1245, 1247
case-max-C1	29	320	271, 282, 294, 304
case-max-D1	7.4×10^{-3}	531	475, 477, 518, 520
case-max-E1	1.2×10^{-1}	730	673, 677, 679, 729
case-max-F1	27	725	697, 699, 701, 703

表-4 目的関数値, 総最適化ステップ, continuation 操作のステップ (case-max-A1 ~ F1)

y_1 軸方向での熱分散由来のミクロ的な熱流束の増加に寄与し, その結果 D_{11} の増加を引き起こす. 一方, q_1^d の負の値は, (iii) および (iv) の場合において生じ, D_{11} の減少に寄与する. 言い換えれば, ユニットセル領域における材料分布が均質な状態 ($u_i - \bar{u}_i = 0$ かつ $T = 0$) と比較して, 流体がより多くの熱を運んでいる状態 (i) および (ii) では正の熱拡散効果が, より少ない熱を運んでいる状態 (iii) および (iv) では負の熱拡散効果が生じるという解釈ができる.

図-1 に示すように, design-0 と design-1 の二つの初期密度分布を用いて, 異なる初期構造から生じる最適

化構造の違いを観察する. また, local Péclet 数 Pe_{loc} と熱伝導率比 k がトポロジー最適化結果に与える影響を調査する. 本節で実施する全ての最大化問題の設定を表-1 に示す. なお, マクロ圧力勾配および Prandtl 数は, それぞれ $\mathbf{G} = \{-1, 0\}^T$ および $Pr' = 1$ に設定する.

(1) 熱分散係数の最大化問題

D_{11} を最大化する問題を考える. すなわち, 最適化問題を以下のように定義する.

$$\text{maximize } D_{11} = Q_1^d \quad \text{under } \mathbf{E} = \{-1, 0\}^T \quad (16)$$

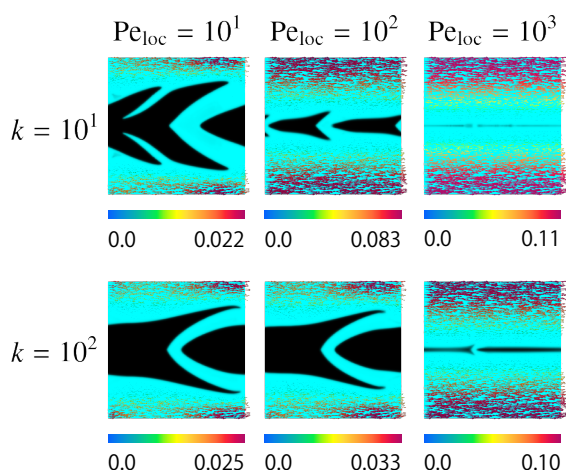


図-4 ユニットセルにおける流速分布 (case-max-A0 ~ case-max-F0)

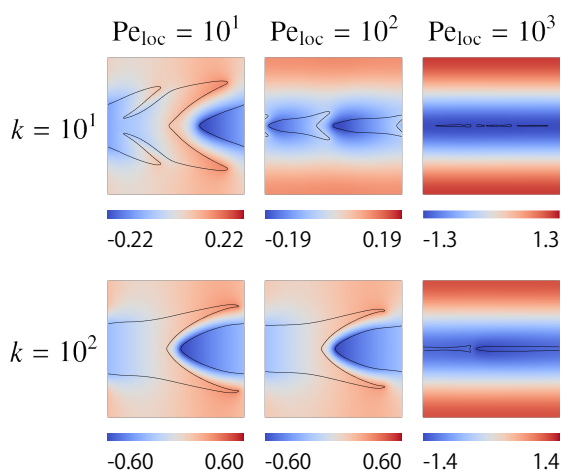


図-5 ユニットセルにおける擾乱温度分布と $\phi = 0.5$ の等値線 (case-max-A0 ~ case-max-F0)

ここでは、 $k = 10^1, 10^2$ および $Pe_{loc} = 10^1, 10^2, 10^3$ の場合を考える。

図-2 および 図-3 は、それぞれ design-0 および design-1 に対する熱分散最大化問題における最適化構造を示している。表-3 には case-max-A0 ~ case-max-F0 に対する最適化の最終ステップにおける目的関数値、総最適化ステップ数、および continuation 操作のステップ数を示し、表-4 には case-max-A1 ~ case-max-F1 に関する同様の情報を示している。いずれの表からも、目的関数値は正值であり、local Péclet 数が増加するにつれてその値が大きくなることが確認できる。最適化構造を比較すると、local Péclet 数 Pe_{loc} および熱伝導率比 k の条件が同じ場合、design-0 および design-1 を用いた最適化構造の特徴は類似した傾向を示している。ゆえに、初期密度分布の差異による最適化構造への差異はこの場合には生じないことが分かる。したがって、マイクロ領域の流速、擾乱温度、および熱分散由来のミクロ的な熱流束に関する以下の議論では、design-0 から得られた最適化結果に焦点を当てる。

全ての最適化されたマイクロ構造は、時計回りに 90 度回転させた Y 字型の浮遊島構造を、 y_1 軸に平行に並べ

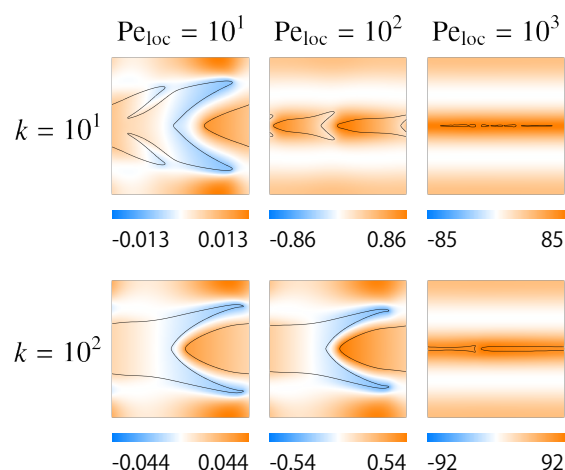


図-6 ユニットセルにおける q_1^d の分布と $\phi = 0.5$ の等値線 (case-max-A0 ~ case-max-F0)

たような特徴を持つ。本研究では、これらの Y 字型構造を、上部の枝部分と下部の棒部分から構成されるものと定義する。これらユニットセル領域内における熱輸送メカニズムを理解するために、ミクロ的な流速分布 (図-4)、擾乱温度分布 (図-5)、および熱分散による熱流束 (図-6) を調査する。

case-max-A0 において、Y 字型構造の固体枝部分では擾乱温度が正であり、棒部分では負である。同様の傾向は case-max-D0 および case-max-E0 でも観察される。case-max-A0, case-max-D0, case-max-E0 において、枝部分の近傍を流れる流体の領域では擾乱温度が正值であり、この領域において q_1^d も正の値をとる。これは、高温領域が流体によって輸送されることで、この部分で正の熱拡散効果が生じていることを示している。一方、Y 字型の棒部分の先端では擾乱温度が負値であり、巨視的温度よりも低温の領域が固体内に保持されることを示す。この領域は表-2 における (ii) の場合に該当し、この領域においても正の熱拡散効果が生じている。一方で、 Pe_{loc} を増加させると、case-max-B0, case-max-C0, case-max-F0 のミクロ構造に見られるように、Y 字型の固体構造がより薄くなる傾向がある。これらの場合では、固体領域の擾乱温度は主に負値であり、主に流速が大きい流体領域での擾乱温度が正值となる。さらに、流速が小さく擾乱温度が負値をとる固体領域およびその近傍領域、そして流速が大きく擾乱温度が正值となる流体領域の両者で、 $q_1^d > 0$ となり、両者の領域で熱分散係数最大化に寄与している。case-max-A0, case-max-D0, case-max-E0 では、Y 字型構造の枝部分に正の擾乱温度が生じているのに対し、case-max-C0, case-max-F0 では正の擾乱温度が流体領域によって受け持たれている。このことから、ミクロ領域における熱分散の最大化メカニズムが伝導支配から対流支配へと移行していることを示している。

以上をまとめると、熱分散テンソル D_{11} を最大化する最適化されたマイクロ構造は、一連の Y 字型構造から構成されており、その大きさ・形状は Pe_{loc} および熱伝導率比 k に依存して変化する。 Pe_{loc} が小さい場合、伝導支配の熱輸送を促進するために、枝部分が長く、全

体のサイズが大きい Y 字型構造が生じる。一方, Pe_{loc} が増加すると, 流体による輸送効果が支配的となるため, 固体の体積率が減少し, 枝部分が短縮しつつ棒部分が細くなる傾向が見られる。

5. まとめ

本研究は, 熱分散係数が最大または最小となるマイクロ構造を, トポロジー最適化によって明らかにした。最適化構造の調査により, 最大化および最小化問題の両方において, 最適なマイクロ構造が local Péclet 数 Pe_{loc} および熱伝導率比 k に応じて大きく変化することが確認された。 Pe_{loc} が小さい場合, 最適な構造は Y 字型の浮遊島構造に類似する最適化構造が得られた。しかし, Pe_{loc} が増加し, 対流効果が支配的になるにつれて, 最適なマイクロ構造は大きく異なる形状へと変化することが示された。本研究は, ミクロ構造と熱分散メカニズムの関係に関する有益な知見を提供し, 様々な工学的応用における伝熱性能の理解の向上に貢献するものである。

参考文献

- [1] Saada, M. A., Chikh, S. and Campo, A.: Analysis of hydrodynamic and thermal dispersion in porous media by means of a local approach, *Heat Mass Transf.*, Vol.42, pp.995–1006, 2006.
- [2] Yang, C. and Nakayama, A.: A synthesis of tortuosity and dispersion in effective thermal conductivity of porous media, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol.53, pp.3222–3230, 2010.
- [3] Kuwahara, F., Nakayama, A. and Koyama, H.: A Numerical Study of Thermal Dispersion in Porous Media, *J. Heat Transfer*, Vol.118, pp.756–761, 1996.
- [4] Özgümüş, T., Mobedi, M., Özkol, Ü. and Nakayama, A.: Thermal Dispersion in Porous Media—A Review on the Experimental Studies for Packed Beds, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.65, 031001, 2013.
- [5] Takezawa, A., Zhang, X., Kato, M. and Kitamura, M.: Method to optimize an additively-manufactured functionally-graded lattice structure for effective liquid cooling, *Addit. Manuf.*, Vol.28, pp.285–298, 2019.
- [6] Takezawa, A., Zhang, X. and Kitamura, M.: Optimization of an additively manufactured functionally graded lattice structure with liquid cooling considering structural performances, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.143, pp.118564, 2019.
- [7] Zhou, M. and Geng, D.: Multi-scale and multi-material topology optimization of channel-cooling cellular structures for thermomechanical behaviors, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.383, 113896, 2021.
- [8] Geng, D., Wei, C., Liu, Y. and Zhou, M.: Concurrent topology optimization of multi-scale cooling channels with inlets and outlets, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.65, pp.1–21, 2022.
- [9] Sukulthanasorn, N., Kurumatani, M., Nishiguchi, K., Kato, J. and Terada, K.: Transient thermal porous structure designed by two-scale concurrent topology optimization, *Transactions of JSCEs*, Vol.2022, 20220004, 2022.
- [10] Luo, J. -W., Chen, L., Xia, Y., Zheng, X. and Tao, W. -Q.: Three-dimensional multi-scale topology optimization of porous heat sink with predetermined unit cells for natural convection heat transfer, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol.225, 125398, 2024.
- [11] Li, H., Jolivet, P. and Alexandersen, J.: Multi-scale topology optimisation of microchannel cooling using a homogenisation-based method, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.68, 8, 2025.
- [12] Francisco, P., Faria, L. and Simões, R.: Multi-objective and multi-load topology optimization and experimental validation of homogenized coupled fluid flow and heat transfer and structural stiffness, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.62, pp.2571–2598, 2020.
- [13] Allaire, G.: A brief introduction to homogenization and miscellaneous applications, *ESAIM: Proc.*, Vol.37, pp.1–49, 2012.
- [14] Allaire, G., Brizzi, R., Mikelić, A. and Piatnitski, A.: Two-scale expansion with drift approach to the Taylor dispersion for reactive transport through porous media, *Chem. Eng. Sci.*, Vol.65, pp.2292–2300, 2010.
- [15] Borrvall, T. and Petersson, J.: Topology optimization of fluids in Stokes flow, *Int. J. Numer. Methods Fluids.*, Vol. 41, pp.77–107, 2003.
- [16] Svanberg, K.: The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol.24, pp.359–373, 1987.