

# 粘弹性二相材料による粘性散逸抑制と剛性向上 を両立させるマルチマテリアルトポロジー最適化

Multi-material Topology Optimization to Achieve Both Viscous Dissipation Reduction  
and Stiffness Improvement with Viscoelastic Biphasic Materials

松尾麟<sup>1)</sup>干場大也<sup>2)</sup>西口浩司<sup>3)</sup>大熊孝広<sup>4)</sup>門脇弘<sup>5)</sup>加藤準治<sup>6)</sup>

Rin Matsuo, Hiroya Hoshiba, Koji Nishiguchi, Takahiro Ohkuma, Hiroshi Kadowaki and Junji Kato

<sup>1)</sup>名古屋大学大学院 工学研究科 (〒 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: matsuo.rin.k5@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

<sup>2)</sup>博(工)名古屋大学大学院 工学研究科 助教 (E-mail: hoshiba.hiroya.y6@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

<sup>3)</sup>博(工)名古屋大学大学院 工学研究科 准教授 (E-mail: nishiguchi.koji.r9@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

<sup>4)</sup>博(理)株式会社ブリヂストン 分析基盤技術研究部 (E-mail: takahiro.ohkuma@bridgestone.com)

<sup>5)</sup>Ph.D. 株式会社ブリヂストン デジタルエンジニアリング技術開発部 (E-mail: hiroshi.kadowaki@bridgestone.com)

<sup>6)</sup>Dr.-ing. 名古屋大学大学院 工学研究科 教授 (E-mail: kato.junji.i5@@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

Rubber-based products that utilize viscoelastic materials frequently require both sufficient stiffness to support loads and control over vibration damping and energy dissipation. However, preserving stiffness while minimizing viscous energy losses introduces a significant trade-off that is challenging to overcome with a single material. This study proposes a topology optimization approach that employs two viscoelastic materials with distinct relaxation characteristics to simultaneously suppress viscous dissipation and maintain the necessary stiffness. The performance of the optimized structures is evaluated, revealing that the proposed method effectively addresses the trade-off between stiffness and energy dissipation.

**Key Words :** Topology optimization, transient problem, viscoelasticity, sensitivity analysis

## 1. はじめに

ゴムやエラストマーに代表される粘弹性材料は、彈性的な剛性と粘性的なエネルギー散逸特性をあわせ持ち、衝撃吸収部材や振動制御要素として広く利用されてきた。このような性質を応用し、現在では荷重を支えるための剛性と、振動の減衰やエネルギー散逸の制御を同時に満たす高度な設計が求められるようになっている。しかし、単一の材料を用いるだけでは複数の要求性能を同時に満足させることは容易ではない。このような中、近年では積層造形技術の進歩により、ゴムやエラストマーでも複数種の材料を組み合わせたマルチマテリアル 3D プリントが実用化されつつある。これにより高い設計自由度が得られ、異なる物性をもつ材料を最適配置することで、それらを満足させることができると期待されている。

そこで、本研究ではマルチマテリアル積層造形を頭に置き、密度法に基づく粘弹性二相材料のトポロジー最適化手法を構築することで、複数の要求性能を同時に向上させることを目指す。特に、過渡応答や衝撃的な荷重にも対応可能とするため、時間歴応答解析を採用する。既往研究の多くは周波数応答解析を用いており、例えば Jing et al. [1] は、弾性材料と粘弹性材料の 2 種類からなるミクロ構造を対象に、周波数応答解析を用いて剛性制約を含むエネルギー散逸性能を最大化するトポロジー最適化手法を提案している。一方、時刻歴応答解析を採用した粘弹性トポロジー最適化の研究はまだ少ないが、一つの例として、Ogawa and Yamada

[2] は異なる緩和時間をもつ 2 種類の粘弹性材料を対象にした材料内挿補間方法を提案し、クリープ変形最小化を目的とするトポロジー最適化を行っている。しかし、時刻歴応答解析を用いた粘弹性トポロジー最適化の研究では、主に単一の要求性能を最大化する問題設定が中心であり、複数の要求性能を同時に向上させようとする研究はほとんどない。

本研究では、これらの背景を踏まえ、時間歴応答解析を採用しながら、粘弹性材料における複数の性能を同時に向上させるための密度法ベースのトポロジー最適化手法を開発する。具体的には、荷重を支える剛性の向上と、エネルギー伝達性能を低下させる要因となる粘性散逸エネルギーの抑制を同時に考慮する。粘弹性材料の構成則としては、一般化線形マックスウェルモデルを採用し、本研究で扱う最適化問題に適した新たな材料内挿補間法を提案する。また、感度解析の定式化には discretized-then-differentiate approach [3] を用いる。最後に、二次元問題の周期的強制変位を対象とした最適化計算例を示し、提案手法の有用性を検証する。

## 2. 粘弹性材料の動的有限要素解析

本研究では、粘弹性材料の構成則として、図-1 に示す一般化マックスウェルモデルを使用する。この材料モデルは、弾性を受け持つバネと粘性を受け持つダッシュボッドを直列に組み合わせた要素を並列に接続することで、複雑な粘弹性挙動を再現するモデルである。図-1 の左端の要素はバネのみで構成されており、純弾

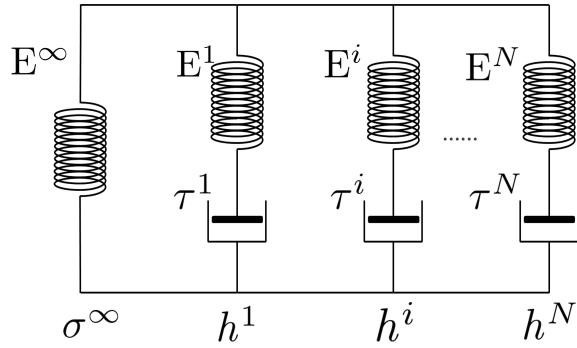


図-1: 一般化線形マックスウェルモデル

性成分と呼ぶ。純弾性成分のヤング率を  $E^\infty$  とする。また、それ以外の直列要素はマックスウェル成分と呼ばれ、その数をマックスウェル要素数  $N$ 、各マックスウェル要素のヤング率を  $E^i$ 、緩和時間  $\tau^i$  で表す。ここで、上添字の  $i$  は、 $i$  番目のマックスウェル要素を表す。このとき、各マックスウェル成分が受け持つ応力は次式のように、畳み込み積分で表される。

$$\mathbf{h} = \int_0^t \mathbf{D} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial s} ds \quad (1)$$

ただし、 $\tau$  は緩和時間、 $\mathbf{D}$  は弾性テンソルである。したがって、全応力  $\boldsymbol{\sigma}$  は、長期応力  $\boldsymbol{\sigma}^\infty$  と各 Maxwell 応力  $\mathbf{h}^i$  の和となる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \sum_{i=1}^N \mathbf{h}^i \quad (2)$$

上の材料構成則を用いて、以下に示す運動方程式を解く。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{M}$  は全体質量マトリックス、 $\mathbf{a}$  は節点加速度ベクトル、 $\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u})$  は全体内力ベクトル、 $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  は全体外力ベクトルである。ここで、変形は微小変形を仮定している。上式を Newmark- $\beta$  法で時間離散化し、各時刻ステップにおける解を得る。

### 3. 最適化問題の設定および感度解析

#### (1) 最適化問題の設定

本研究では、以下のように最適化問題を設定した。

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \sum_{t=1}^{N_t} E_t^{\text{diss}} \\ \text{s.t.} \quad & g_1 = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \bar{s}_e \int_{\Omega_e} d\Omega_e}{V_{\text{def}}} - 1 \leq 0 \\ & g_2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{N_t} E_t^{\text{str}}}{\sum_{t=1}^{N_t} E_{\text{def}}^{\text{str}}} \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 \leq s_e \leq 1 \quad e = 1, 2, \dots, N_e, \quad t = 1, 2, \dots, N_T$$

ここで、 $e$  は各有限要素、 $N_e$  は要素の総数、 $s_e$  は  $e$  番目の要素の設計変数値、 $t$  は各時刻ステップ、 $N_T$  は総時刻ステップ数をそれぞれ表す。 $E_t^{\text{diss}}$  は時刻  $t$  で生じる構造全体の粘性散逸エネルギー、 $E_t^{\text{str}}$  は時刻  $t$  のときの構造全体のひずみエネルギーであり、それぞれ以下の式で表される。

$$E_t^{\text{diss}} = \left[ \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^N \mathbf{h}^i \cdot (\mathbf{D}^i \tau^i)^{-1} \mathbf{h}^i d\Omega_e \right] \Delta t \quad (5)$$

$$E_t^{\text{str}} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}^\infty \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{h}^i \cdot (\mathbf{D}^i)^{-1} \mathbf{h}^i d\Omega_e \right] \Delta t \quad (6)$$

ただし、煩雑さを避けるため各変数に付すべき時刻  $t$  を省いて表記している。つまり、目的関数  $f$  は、構造全体の粘性散逸エネルギーの最小化であり、エネルギー損失をなくし、効率的にエネルギーを伝達させる構造を導くという意味を持つ。また、制約条件式  $g_1$  は体積制約式、 $g_2$  は剛性制約式をそれぞれ表している。

ここで、剛性制約式の意味合いを説明する。この剛性制約式は、構造全体のひずみエネルギー時間和を制約値として使用する。基本的な線形弾性体を仮定した静的な解析におけるトポロジー最適化では、剛性を外力仕事で評価する。

$$E_{\text{ext}} = E_{\text{str}} \quad (7)$$

このとき、上式のように外力仕事  $E_{\text{ext}}$  とひずみエネルギー  $E_{\text{str}}$  の総量は同じである。一方、本研究においては、運動エネルギー  $E_{\text{kine}}$  と粘性散逸エネルギー  $E_{\text{diss}}$  が生じるため、エネルギーのつり合い式は以下となる。

$$\int_0^t \dot{E}_{\text{ext}} = E_{\text{kine}} + E_{\text{str}} + \int_0^t \dot{E}_{\text{diss}} \quad (8)$$

しかしここでは、基本的な場合と同様に考えひずみエネルギーを荷重を支える成分として評価する。荷重制御法で解析する場合では、構造全体のひずみエネルギーが小さいほど剛性が大きく、変位制御法で解析する場合では構造全体のひずみエネルギーが大きいほど剛性が大きくなる(図-2 参照)。のちに示す最適化計算例は変位制御法で解析が行われているため、構造全体のひずみエネルギーが大きいほど剛性が大きい点に注意が必要である。また、この制約条件式では、ひずみエネルギーの時間和を用いて、構造の時間平均的な剛性を評価する(図-3 参照)。ただし、ひずみエネルギーの時間和とは、図-3 に示すひずみエネルギー歴の面積に相当する概念である。時間平均的な剛性を評価するのは、最大値などを示す特定の場合で評価しようとすると、最適化ステップごとに参照すべきエネルギーが変動し、感度の定式化が困難になるためである。

#### (2) 材料内挿補間法

本研究では、密度法を基本とした粘弹性二相材料の内挿補間法を提案する。まず、本研究で扱う粘弹性材料において、二つの材料間で質量密度  $m$  およびポアソン比  $\nu$  は共通であると仮定する。このとき、内挿にあたって考慮すべきパラメータは、各バネのヤング率 ( $E^\infty, E^i$ ) と緩和時間 ( $\tau$ ) である。ここで、材料間で同じ緩和時間  $\tau$  をもつマックスウェル要素同士のヤング率を内挿することで中間密度を表現する。これにより、ヤング

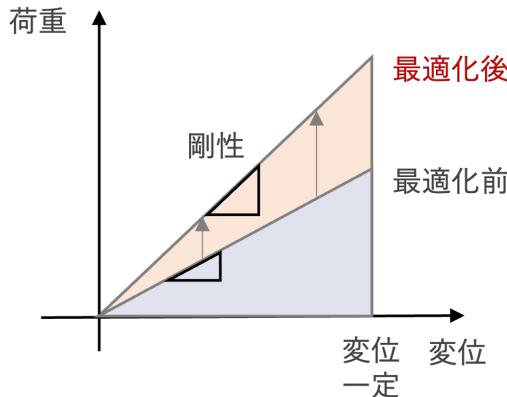


図-2: 変位制御下での剛性

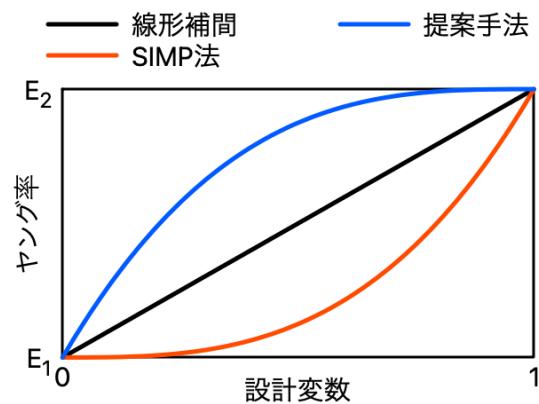


図-4: 材料内挿補間法ごとの中間密度のヤング率の違い

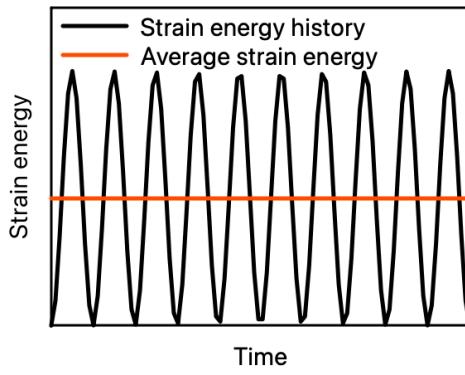


図-3: ひずみエネルギーの時間和

率のみを内挿すれば良いため、のちに示す随伴変数法に基づく感度解析の定式化が簡素になる。

粘性を受け持つダッシュボッドを含まない純弾性要素  $E^\infty$  については、従来の手法に倣って SIMP 法 [4] で内挿する。ただし、純弾性要素のヤング率の大小関係を考慮した場合分けをする必要がある。

緩和時間ごとに内挿するマックスウェル要素の補間については、SIMP 法に対して、上に凸の関数を考える(図-4 参照)。これは、SIMP 法のペナルティを与えて設計変数の二値化を促す性質を本問題に適用させるためである。剛性最大化問題のトポロジー最適化においては、通常 SIMP 法のように下に凸な内挿補間の方が二値化が促進されるが、それをそのまま本問題に適用すると収束性が悪くなり、グレースケールが残る。これは、目的関数がヤング率の小さな材料が有利となる問題設定であるために下に凸では収束しづらいこと、またのうちに示す最適化計算例で扱う材料物性の設定がマックスウェル要素ごとにヤング率の大小が入れ替わる収束しづらい問題設定であることに由来する。一方で、この材料補間法では、複合材料の弾性理論から論じられる Hashin-Shtrikman 境界 [5] を満たさないことに注意が必要である。この点について、正確な検証のために粘弹性材料の理論的境界を含めて検討する必要があるが、それは今後の課題である。また、中間密度に物理的

意味合いはない場合であれ収束した構造が有用であれば、工学的に意義のある手法であると言える。以下に内挿補間法の式を示す。ただし、 $s_e$  は設計変数、下添字の 1, 2 は材料識別番号、 $\eta$  はペナルティーパラメータである。 $\eta$  は 3 を用いる。

$$E^\infty(s_e) = \begin{cases} E_1^\infty + s_e^\eta(E_2^\infty - E_1^\infty), & E_2^\infty > E_1^\infty \\ E_2^\infty + (1 - s_e)^\eta(E_2^\infty - E_1^\infty), & \text{else} \end{cases} \quad (9)$$

$$E^i(s_e) = \begin{cases} E_2^i - (1 - s_e)^\eta(E_2^i - E_1^i), & E_2^i > E_1^i \\ E_1^i + s_e^\eta(E_2^i - E_1^i), & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

### (3) 感度解析手法

感度解析は勾配基本法に基づき、随伴変数法を用いて行う。紙面の都合上詳細は割愛するが、discretize-then-differentiate approach[3] を用いて定式化を行う。まず、随伴ベクトル  $\lambda, \mu, n$  を導入し、新たに目的関数  $\tilde{f}$  を定義する。次に、 $\tilde{f}$  を全時間ステップで偏微分し、陰の微分項である  $\partial u / \partial s, \partial a / \partial s$  を消去できる随伴ベクトルを求める随伴問題を解く。最終的に次式のような  $\lambda$  および  $\partial f^{\text{int}} / \partial s_k$  で表される感度が導出される。

$$\frac{d\tilde{f}}{ds_e} = \frac{\partial f}{\partial s_e} + \sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot \frac{\partial f^{\text{int}}_k}{\partial s_e} \quad (11)$$

ここで、 $n$  は時間ステップの総数、 $k$  は各時間ステップを示す。 $\partial f / \partial s_e$  については目的関数である粘性散逸エネルギー  $f$  および制約条件であるひずみエネルギーの時間和  $g_2$  それについての導出結果を以下に示す。

$$\frac{\partial f}{\partial s_e} = \sum_{k=0}^n \left[ \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^N \left( 2 \frac{\dot{W}_k^i}{E^i} \frac{\partial E^i}{\partial s_e} + \mathbf{h}_k^i \cdot \frac{\partial (\tau^i \mathbf{D}^i)}{\partial s_e} \mathbf{h}_k^i \right) d\Omega_e \right] w_k \quad (12)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_e} = - \frac{\frac{1}{2} (E^\infty)^{-1} \frac{\partial E^\infty}{\partial s_e} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{D}^\infty \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (E^i)^{-1} \frac{\partial E^i}{\partial s_e} \mathbf{h}^i \cdot (\mathbf{D}^i)^{-1} \mathbf{h}^i}{\sum_{i=1}^{N_t} E_{\text{def}}^{\text{str}}} \quad (13)$$

ここで、各時刻ステップで生じる構造全体の粘性散逸エネルギーを  $\dot{W}_k^i$  とする。また、ここで定式化した感度解析手法の精度検証は紙面の都合上割愛するが、十分な精度を有することを確認している。

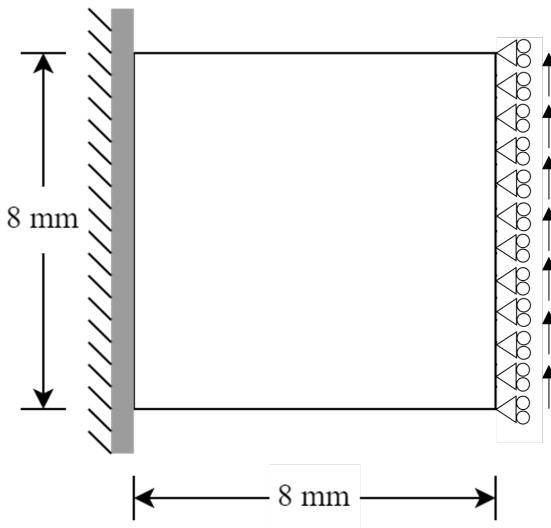


図-5: 設計領域および境界条件

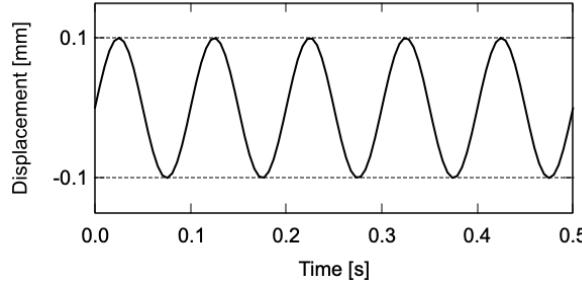


図-6: 周期的強制変位の与え方

#### 4. 数値計算例

##### (1) 解析条件

図-5 および図-6 に示す境界条件および設計領域を設定した場合の最適化計算の一例を紹介する。正方形領域の左端を固定し、右端に対してせん断方向に周期的強制変位を与える。周期的強制変位は、振幅が 0.1mm の 10Hz 振動を 5 周期分、100 ステップで等間隔に時間離散化して与えた。2 次元平面ひずみを仮定し、4 節点四辺形要素を用いて設計領域を  $128 \times 128$  でメッシュ分割した。使用する二つの材料はポアソン比 0.49、質量密度  $1.0\text{g}/\text{cm}^3$  で共通であり、ヤング率および緩和時間は表-1 に示すような仮想材料である。この材料物性値では、材料 1 が 10Hz 下では剛性向上に寄与し、材料 2 が 10Hz 下では散逸抑制に寄与する。純弾性要素は共通の値を設定して、マックスウェル要素における異なる緩和時間が及ぼす影響を観察する。最適化においては、体積制約を材料 2 が 50 パーセント以下、感度フィルターの半径を  $0.175\text{mm}$  と設定した。設計変数の更新には、Method of Moving Asymptotes (MMA) [6] を使用した。

##### (2) 剛性制約無しの場合の最適化計算例

剛性制約無しの場合の計算例を示す。図-7 に最適化構造、図-8 に目的関数および制約条件の推移を示す。こ

表-1: 材料のヤング率と緩和時間

	ヤング率 [Pa]		緩和時間 [s]
	材料 1	材料 2	
純弾性要素 ( $E^\infty$ )	$1.0 \times 10^6$	$1.0 \times 10^6$	-
マックスウェル要素 ( $E^t$ )	$1.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^9$	$1.0 \times 10^{-4}$
	$1.0 \times 10^9$	$1.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^{-1}$

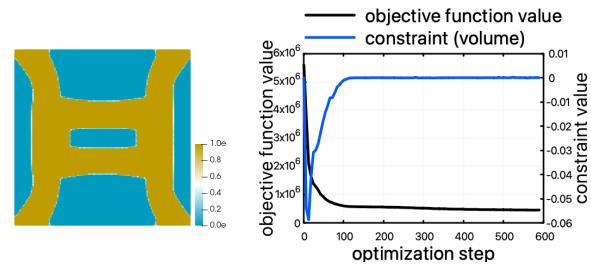


図-7: 剛性制約無し：図-8: 剛性制約無し：目的関数最適化構造 値と制約条件値の推移

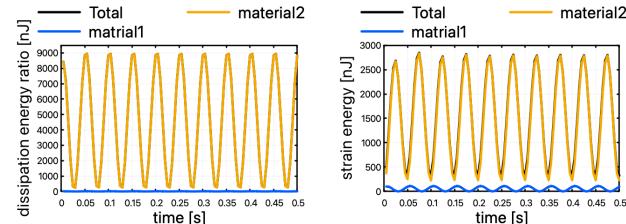


図-9: 剛性制約無し：材料 図-10: 剛性制約無し：材料ごとの粘性散逸エネルギー ごとのひずみエネルギー

ここで、青色が材料 1、黄色が材料 2 である。図-8 より目的関数は単調に減少しており、問題なく最適化が行われていることがわかる。最適化構造をみると、せん断の荷重を散逸抑制に有効な材料 2 が主に受け持てるよう斜めに繋がっている。これによって変形図は、材料 2 が主に変形し、材料 1 は剛体移動する様子がみられた。また、材料ごとのひずみエネルギーおよび散逸エネルギーに着目すると（図-9、図-10 参照）どちらも全時刻ステップにわたり材料 2 が支配的になっていることがわかる。散逸エネルギーが大きく生じる材料 1 で散逸を生じさせない合理的な構造になっている一方で、材料 1 が荷重を受け持ておらず、剛性を確保できていないことがわかる。

##### (3) 剛性制約有りの場合の最適化計算例

次に、剛性制約有りの場合の数値計算例を示す。ここで、剛性制約は平均ひずみエネルギーを  $60000\text{nJ}$  を下限値として設定した。これは、平均ひずみエネルギーで比較すると、剛性制約無しの場合の約 40 倍である。図-11 に最適化構造、図-12 に目的関数および制約条件の推移を示す。ここでも同様に青色が材料 1、黄色が材料 2 である。図-12 より目的関数は単調に減少しており、問題なく最適化が行われていることがわかるが、制約条件については 0 を上回っている。これは、目的関数

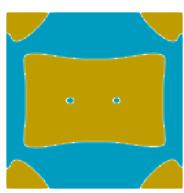


図-11: 剛性制約有り：最適化構造

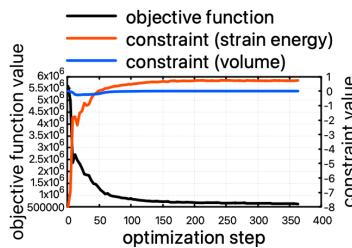


図-12: 剛性制約有り：目的関数値と制約条件値の推移

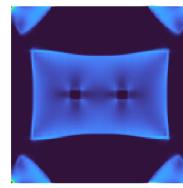


図-15: 剛性制約有り：90ス

テップ目で生じた粘性散逸エネルギーの分布図

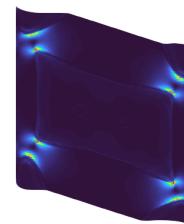


図-16: 剛性制約有り：95ス

テップ目で生じた粘性散逸エネルギーの分布図

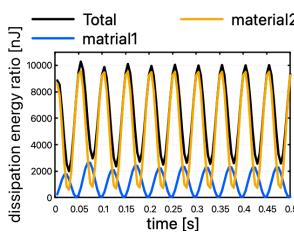
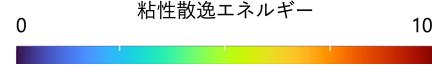


図-13: 剛性制約有り：材料ごとの粘性散逸エネルギー

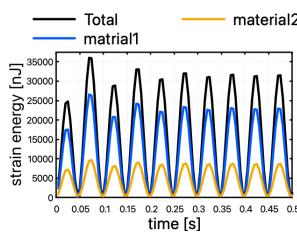


図-14: 剛性制約有り：材料ごとのひずみエネルギー

の感度と制約条件のスケールの違いによる影響を受けた結果であり、最適化時にパラメータを調整することで改善すると考えられる。最適化構造をみると、剛性制約無しの場合と比べると材料2の左端から右端までの接続がとぎれて、逆に材料1が左端から右端までつながる構造に変化したことがわかる。この構造の変形図をみると、材料1は細く繋がっている部分でヒンジのように変形していることが確認できた。また、図-13、図-14に示した材料ごとのひずみエネルギーおよび散逸エネルギーに着目するとどちらも剛性制約なしの場合に比べて材料1の寄与率が増大していることがわかる。ひずみエネルギーについては材料間で位相の違いはみられず、剛性制約の満足のために、材料1が必要な分だけ負担していると考えられる。粘性散逸エネルギーについては、二つの材料で位相の違いがみられ、散逸に支配的な材料が入れ替わっていることがわかる。図-15、図-16は散逸に支配的な材料が入れ替わっているときの構造内の散逸エネルギー分布図を可視化したものであるが、変形に応じて散逸に寄与する箇所、あるいは材料が変化している様子がわかる。ただし、変形スケールは20倍して可視化している。剛性制約有りの場合においても、基本的には散逸エネルギーは材料2が受け持っており、ひずみエネルギーのみの材料1の寄与率を高めることができている。位相の違いを活用して、ひずみエネルギーについては材料1の寄与率を高めつつも、粘性散逸エネルギーは極力材料2の寄与率を高めないことで、剛性向上と散逸抑制を同時に達成する合理的な構造になっているものと考えられる。これより、本手法の有用性が確認された。

## 5. 結論

本研究では、時刻歴応答解析における密度法ベースの粘弾性トポロジー最適化の構築のために、材料内挿補間法の提案およびそれに基づく感度解析手法の定式化を行なった。粘性散逸抑制と剛性向上の両立を目指し、粘性散逸エネルギー最小化を目的関数として、ひずみエネルギー時間和を剛性制約条件として設定した。剛性制約有りの最適化計算例では、二つの材料間の粘性散逸の位相の違いを利用して、粘性散逸においては散逸抑制に有利な材料が支配的に、剛性においては剛性向上に有利な材料が支配的になるような合理的な構造が得られ、本手法の有用性を確認できた。

## 参考文献

- [1] J. Ma, X. Zhang, and Z. Kang, “Directional damping design of viscoelastic composites via topology optimization,” Int. J. Mech. Sci., vol. 275, p. 109300, 2024.
- [2] S. Ogawa and T. Yamada, “Minimizing creep deformation via topology optimization,” Finite Elements in Analysis and Design, vol. 207, p. 103758, 2022.
- [3] T. Yamada, Y. Kanno, and S. Kondoh, “Topology optimization of dynamic problems based on finite deformation theory,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 115, no. 13, pp. 1521–1548, Mar. 2018.
- [4] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, “Material interpolation schemes in topology optimization,” Archive of Applied Mechanics, vol. 69, pp. 635–654, 1999.
- [5] Z. Hashin and S. Shtrikman, “A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials,” Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 11, no. 2, pp. 127–140, 1963.
- [6] K. Svanberg, “The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, no. 2, pp. 359–373, 1987.