

2次元散乱波動場における LASSOを用いたクラック決定解析

Crack determination analysis using LASSO in 2-D scattered wavefield

住岡聖仁¹⁾ 吉川仁²⁾

Masato Sumioka and Hitoshi Yoshikawa

¹⁾京都大学大学院 情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: sumioka@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

²⁾京都大学大学院 総合生存学館 (〒 606-8306 京都市左京区吉田中阿達町 1, E-mail: yoshikawa.hitoshi.5u@kyoto-u.ac.jp)

We consider a determination of cracks in a two-dimensional infinite domain using LASSO (L1 optimization method). Hattori and Yoshikawa's research uses the distribution of topological derivatives to select candidate cracks whose directions and lengths are determined, calculates the objective functional for each candidate crack arrangement, and solve the inverse problem to determine the combination of candidate cracks with the minimum value of the objective functional as the crack arrangement. However, when the number of candidate cracks is large, the computation of the objective functional is computationally expensive. To solve this problem, Yoshioka et al. use LASSO to perform crack decision analysis for problems in regions governed by the Laplace equation. In this study, we extend the method of Yoshioka et al. to a time domain problem and consider the problem of determining the cracks in a two-dimensional infinite domain governed by the wave equation using LASSO. The correct crack was accurately determined from the candidate cracks both in the case of sparsely spaced cracks and in the case of closely spaced cracks with very similar orientations.

Key Words : QNDE, crack determination, topological derivatives, sparse modeling, LASSO, BEM

1. はじめに

超音波非破壊評価手法の一つに、材料に超音波を入射し、内部の散乱体からの散乱波を材料表面で計測し、得られた計測データより内部散乱体の情報を決定する散乱体決定手法がある。近年、トポロジー導関数を用いた定量的非破壊評価 (QNDE) に関する手法が注目を集めており [1],[2],[3]。服部・吉川による2次元散乱波動場におけるトポロジー導関数を用いたクラック決定解析 [4] などがある。

服部らは、クラック決定問題を扱った研究 [4] において、トポロジー導関数が閾値よりも小さな負の値を持つ内点をつなぎ合わせ、これを候補クラックとして複数の候補クラックから正解のクラックを決定した。具体的には、 N 本の候補クラックから正解のクラック配置を見つけるために、組み合わせ $\sum_{i=1}^N N C_i$ の数だけ目的汎関数の値を計算し、目的汎関数を最小とする候補クラックの配置を正解のクラック配置として決定した。目的汎関数の計算には、偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く必要がある。このため、候補クラックの数が多い場合には、目的汎関数の計算に多くの計算量を要するという課題が存在している。

この問題を解決するために、吉岡らは大量のデータから必要な要素を抽出する圧縮センシング [5],[6],[7] に注目し、圧縮センシングの代表的な手法である LASSO (L1 最適化手法) [5],[6],[7] を用いて、Laplace 方程式に支配される領域の問題でのクラック決定解析を行っている [8]。本研究では、吉岡らの手法を時間域の問題に拡張し、波動方程式に支配される2次元無限領域 \mathbb{R}^2 に存在するクラックの位置を LASSO を用いて決定する問題を

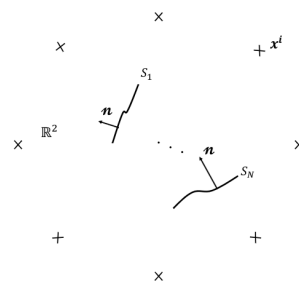


図-1 2次元無限領域におけるクラック問題

考える。

候補クラックから正解のクラックを決定する逆解析において、正解となる候補クラックには非ゼロの係数を、実際に存在しない候補クラックにはゼロを乗ずるという考えをもとにスパースベクトルを導入し、このスパースベクトルを LASSO を用いて求めることを考える。

2. 2次元スカラー散乱波動場におけるクラック問題

(1) 問題設定

図-1 に示すような波動方程式に支配される2次元無限領域 \mathbb{R}^2 において N 本のクラック S_j , $j = 1, \dots, N$ が存在すると仮定し、以下の初期値境界値問題を考える。

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) - \ddot{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus S, t > 0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \mathbf{n}^\pm}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mathbf{x} \in S_j^\pm, t > 0) \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus S)$$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &\rightarrow u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{as } (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad (\mathbf{x} \in \partial S) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$ で、 \mathbf{n} はクラックの単位法線ベクトル、 ϕ はクラックを跨ぐことによるポテンシャルの不連続量で $\phi = u^+ - u^-$ 、 $u^+(u^-)$ はクラックの法線 \mathbf{n} が向いている (向いていない) 方向のポテンシャル u のクラックへの法線方向の極限である。以下、 ϕ をクラックの開口変位と呼ぶ。また、 u^{inc} は入射波である。初期値境界値問題の解は以下のように表される。

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus S) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 Γ は 2 次元波動方程式の因果律 $\Gamma(\mathbf{x}, t) = 0, t < 0$ を満たす基本解であり

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t - |\mathbf{x}|)}{2\pi \sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}} \quad (5)$$

である。なお、本研究では波速を 1 としてスケールアップしている。

クラック問題の境界積分方程式は次式の通りである。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}, t) \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (\mathbf{x} \in S) \end{aligned} \quad (6)$$

境界積分方程式 (6) を解くことでクラックの開口変位 ϕ を求める。

(2) スパースモデリングのための定式化

N 本の候補クラックの内、正解のクラックの本数を K とする。なお、 K の値は未知である。領域 \mathbb{R}^2 内の M 個の観測点 $\mathbf{x}^i, i = 1, \dots, M$ で計測されたポテンシャル $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ を用いて、正解のクラックをスパースモデリングにより決定する問題を考える。具体的には次の代数方程式を K -スパースなベクトル $\boldsymbol{\xi}$ について解く。

$$A(t)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}(t) \quad (7)$$

$$\{A(t)\}_{ij} := \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (8)$$

$$\{\boldsymbol{\xi}\}_i := \xi_i \quad (9)$$

$$\{\mathbf{b}(t)\}_i := u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t) - u^{\text{inc}}(\mathbf{x}^i, t) \quad (10)$$

正解の K 個のクラックの開口変位 ϕ が与えられていれば、式 (8) より係数行列 $A(t)$ が求められ、代数方程式 (7) を解くことで、計測データ $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ より、ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は正解のクラック番号の成分が 1、それ以外の成分が 0 となる K -スパースなベクトルとして求められ、候補クラックから正解のクラックを選び出せる。

しかし、代数方程式 (7) において、候補クラックの開口変位 $\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in S_j, j = 1, 2, \dots, N$ を求めることができず、係数 $\{A(t)\}_{ij}$ を一意に決めることはできない。実際、正解でない候補クラックは存在しておらず、そのクラックに対応する開口変位など存在しない。そこで本研究では、次のケースを考えて係数行列 $A(t)$ を仮定し、正解クラックを決める逆解析を行う。

候補クラック N 本の内、 j 番目の候補クラックが 1 つだけ存在していると仮定し、次式

$$0 = \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}, t) + \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (\mathbf{x} \in S) \quad (11)$$

により開口変位 $\phi(\mathbf{y}, s), \mathbf{y} \in S_j, j = 1, \dots, N, 0 \leq s \leq t$ を計算する。

(3) LASSO によるクラック決定解析

座標勾配法を用いて、

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^L \frac{1}{2} \|\mathbf{A}(t_k)\boldsymbol{\xi} - \mathbf{b}(t_k)\|_2^2 + \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|_1 \quad (12)$$

となる最適なベクトル $\boldsymbol{\xi}^{\text{opt}}$ を計算する。なお、 $\|\cdot\|_2$ は L_2 ノルム、 $\|\cdot\|_1$ は L_1 ノルム、 α は正則化パラメータである。また、 $t_k, k = 1, \dots, L$ は複数の適当な観測時刻である。

LASSO を用いたクラック決定解析の手順を示す。

step1. 与えられた u^{inc} に対して、なんらかの計測により得られた観測点 \mathbf{x}^i における計測値 $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ より、代数方程式 (7) の右辺ベクトル \mathbf{b} を得る。ここに、観測点数 M はある程度の点数を確保するものとする。なお、本論文では、計測の代わりに境界積分方程式 (6) を用いて正解の K 本のクラックの開口変位 ϕ を計算、正解の K 本のクラックに対する積分表現式 (4) を用いて $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ を求める。

step2. 候補クラックに対して 2(2) 節の仮定を用いて、式 (11) より開口変位 ϕ を式 (8) より係数行列 $A(t_k)$ を計算する。

step3. 座標勾配法を用いて、

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^L \frac{1}{2} \|\mathbf{A}(t_k)\boldsymbol{\xi} - \mathbf{b}(t_k)\|_2^2 + \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|_1 \quad (13)$$

となる最適なベクトル $\boldsymbol{\xi}^{\text{opt}}$ を計算する。 $|\xi_i| < 0.1, i = 1, \dots, N$ となる成分がある場合、その成分に対応する候補クラックを存在しないと判定し step2 に戻る。絶対値が 0.1 より小さい成分がない

場合、step4 に移る.

step4. ベクトル ξ^{opt} の成分のうち、残存する候補クラックに対応する成分の中で最大の成分を $\xi_{\text{max}}^{\text{opt}}$ 、最小成分を $\xi_{\text{min}}^{\text{opt}}$ とする. $\beta \xi_{\text{max}}^{\text{opt}} \leq \xi_{\text{min}}^{\text{opt}}$ ならば、求めた ξ^{opt} を最終の解として計算終了. そうでなければ、 $\xi_{\text{min}}^{\text{opt}}$ に対応する候補クラックを存在しないと判定し step2 に戻る.

なお, LASSO を用いたクラック決定解析では、本研究での仮定において最初に想定した候補クラックの数である N 回だけ境界要素解析を実行する必要がある、従来法 [4] の境界要素解析の実行回数 $\sum_{i=1}^N N C_i$ に比べて少ない実行回数であり、計算時間の短縮が見込まれる.

3. 数値計算

(1) 数値計算例

a) 問題設定 1

先行研究 [8] と同様に、本研究の数値計算では参考文献 [4] のトポロジー導関数の分布図 (図-2) から選出された図-3 のような候補クラックを参照し図-4 に示すようなクラックの候補を設定する. 方向と長さを既知とした図-4 のような配置の $N = 6$ 本の候補クラック $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ を考える. 候補クラックのデータは表-1 の通りである. なお、横軸正の向きに対する傾斜角を θ として $\tan\theta$ を傾きと定義する. 正解のクラックを S_3, S_4 の $K = 2$ 本とする. 正解のクラックを未知として、LASSO により候補クラックから正解クラックの決定を試みる. 半径 1 の円周上に等間隔な $M = 24$ 個の観測点 x_i を置く. また、3(1) 節の手法において $A(t)$, $b(t)$ に用いる観測時刻は $1.25 \leq t \leq 3.5$ を等間隔に分割した 10 点 $t_1 = 1.25, t_2 = 1.5, \dots, t_{10} = 3.5$ を選ぶ. 入射波は

$$u^{\text{inc}}(x, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{0.05}(t - x_2 - 1.5)\right), & (1.5 \leq t - x_2 \leq 1.55) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{14}$$

とした. また、2(3) 節の座標降下法で用いた正則化パラメータは $\alpha = 10^{-4}$ とし、終了条件に用いるパラメータは $\beta = 0.5$ とした. また、2(3) 節の step4 において、外れの候補クラックと判定された候補クラックについては、表中に"—" で示す.

表-1 候補クラックの中心座標とクラック長と傾き

候補クラック	中心座標	クラック長	傾き
S_1	(-0.3,0.35)	0.2	0.8
S_2	(-0.3,0.2)	0.2	0.8
S_3	(-0.3,0.05)	0.2	0.8
S_4	(0.4,-0.1)	0.2	0.0
S_5	(0.0,-0.4)	0.1	-0.2
S_6	(0.5,-0.4)	0.1	-1.0

b) 計算結果 1

ベクトル ξ の遷移は表-2 の通りである. どの係数行列を用いても正解のクラックを特定することができた. 特に 1 回目の計算 (loop1) で ξ が K -スパースになって

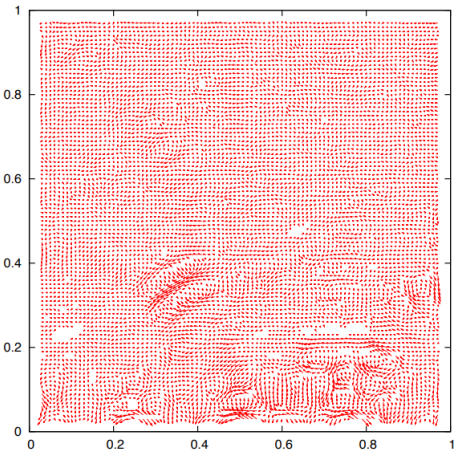


図-2 各内点におけるトポロジー導関数の計算結果 (論文 [4] から引用)

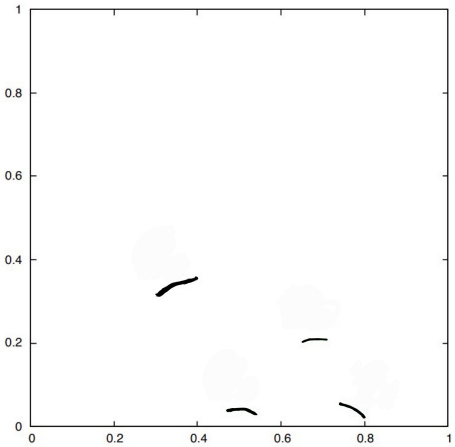


図-3 図-2 から想定される候補クラック (論文 [4] から引用)

いるため、 $N = 6$ 回の境界要素解析を行うだけで正解のクラックを決定できており、決定精度が良いと言える.

表-2 クラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.0000	—
ξ_2	0.0000	—
ξ_3	0.9408	0.9408
ξ_4	0.9863	0.9863
ξ_5	0.0000	—
ξ_6	0.0000	—

c) 問題設定 2

問題設定 1 において観測点を単位円周上に 24 個配置していたが、複数の観測時刻の情報を用いることで観測点数を減らしても正しく候補クラックから正解のクラックを決定できるかを確かめる. 観測点は単位円周上の等間隔に 12 個、8 個、4 個の 3 パターンの配置を想定した.

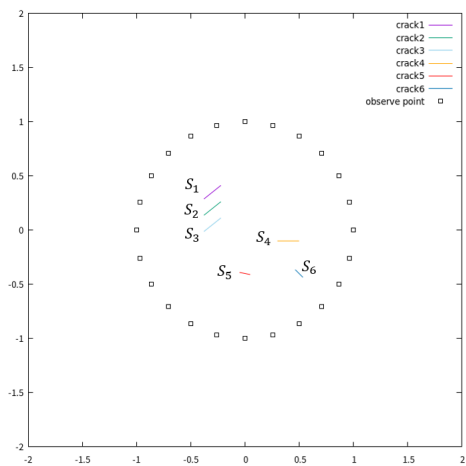


図-4 候補クラック，図中の”□”は観測点を示す (クラック S_3, S_4 の2本が正解のクラック)

d) 計算結果 2

ベクトル ξ の遷移は表-3～表-5 の通りである．3 パターン全てにおいて計算結果 1(表-2) と同様に，正しく候補クラックから正解のクラックを $N = 6$ 回の境界要素解析で決定できている．よって，複数の観測時刻を用いることで観測点を減らしても決定精度を保ったまま決定できると言える．

表-3 観測点 12 個でのクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.0207	—
ξ_2	0.0000	—
ξ_3	0.9321	0.9326
ξ_4	0.8808	0.8811
ξ_5	-0.0006	—
ξ_6	0.0000	—

表-4 観測点 8 個でのクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.0000	—
ξ_2	0.0000	—
ξ_3	0.9732	0.9732
ξ_4	0.9704	0.9704
ξ_5	0.0000	—
ξ_6	0.0000	—

表-5 観測点 4 個でのクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.0000	—
ξ_2	0.0000	—
ξ_3	0.9289	0.9510
ξ_4	0.6382	0.6539
ξ_5	0.0000	—
ξ_6	-0.0177	—

4. 結論

本研究では，LASSO を用いて 2 次元散乱波動場におけるクラック決定を行った．候補クラックを 1 つずつ

仮定し，1 波のみの入射波に対して複数の観測時刻のデータを用いることで，求めた係数行列を用いて LASSO により正確にクラックの位置を決定できた．また，観測点数を減らしても同様に候補クラックから正解のクラックを決定することができた．なお，実際の非破壊評価では，計測誤差を含むデータを用いて候補クラックが求められる．向きや位置に誤差を含む候補クラックから，どの程度の精度で正解のクラックを決定できるのかは今後の課題である．本研究では 2 次元散乱波動場の外部問題において正解のクラックを決定する問題を考えたが，先行研究 [4] では内部問題でのクラックの推定を行っており，本研究のクラック決定手法が内部問題についても同様に決定可能であるか，またその決定精度を検討することは今後の課題である．また，クラックの数を更に増やした規模の大きく複雑な問題についても決定可能性，決定精度を検討することも今後の課題として挙げられる．

参考文献

[1] Bonnet, M.: Topological sensitivity for 3D elastodynamics and acoustic inverse scattering in the time domain, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.195, pp.5239–5254, 2006.

[2] Bellis, C. and Bonnet, M.: Qualitative identification of cracks using 3D transient elastodynamic topological derivative: formulation and FE implementation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.253, 1, pp.89–105, 2013.

[3] 吉川仁, 寺沢龍: 3 次元スカラー波動問題における時間域境界積分方程式法を用いたトポロジー最適化による散乱体決定解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.71, No.2, pp.I 71–I 78, 2015.

[4] 服部潤也, 吉川仁: 2 次元散乱波動場におけるトポロジー導関数を用いた様々なクラックの決定解析, 応用力学論文集 Vol.20(特集), p.255-262, 2017.

[5] 永原正章: LASSO のための凸最適化—近接勾配法による高速アルゴリズム, システム/情報/制御, Vol.61, p.20-28, 2017.

[6] 田中利幸: 圧縮センシングの数理, IEICE Fundamentals Review, Vol.4, No.1, pp.39-47 2010.

[7] 川野秀一: スパース正則化に基づく回帰モデリングとその計算アルゴリズム, 計算機統計学 p.173-186 2020.

[8] 吉岡明紀: トポロジー導関数を用いた定量的非破壊評価のための LASSO によるクラック決定, 土木学会論文集, Vol. 80, No. 15, 2024.