

DRM を用いた非圧縮性粘性流れの境界要素法の開発

Development of Dual Reciprocity Boundary Element Method
for Incompressible Viscous Fluid Flow

山田 義博¹⁾ 登坂 宣好²⁾ 藤原 宏志³⁾
Yoshihiro Yamada, Nobuyoshi Tosaka and Hiroshi Fujiwara

¹⁾博(工)日本製鉄(株)(〒293-8511千葉県富津市新富20-1,E-mail:yamada.38d.yoshihiro@jp.nipponsteel.com)

²⁾工博Material speaks T-Lab.代表(〒192-0373東京都八王子市上柚木3-9-1-211,E-mail:nob42tsk19@gmail.com)

³⁾博(情報)京都大学大学院情報学研究科准教授(〒606-8501京都市左京区吉田本町,E-mail:fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

Aiming to efficient and fast industrial numerical simulation of incompressible flow with complex and/or large domain, we develop the dual reciprocity boundary element methods for incompressible viscous fluid flow. We propose two algorithms based on the dual reciprocity methods and boundary integral equation formulation, and give some remarks on their computations.

Key Words : Dual Reciprocity Boundary Element Methods, Navier-Stokes Equations, Radial Basis Functions Approximation

1. 緒言

本報告では、非圧縮性流体に対する数値計算に対し、境界要素法に Dual Reciprocity Method (DRM)[1] を適用する計算手法を提案し、この DR-BEM による Navier-Stokes 方程式の数値計算の困難点、特に DRM で標準的にもちいられる radial basis 函数の妥当性を論じる。

非圧縮性流れの数値計算の産業利用においては、計算領域の複雑化と大規模化に伴って要求される計算資源が増加する傾向にあり、その高効率化と高速化が重要な課題である。著者らは計算コスト低減のために境界要素法に着目し、登坂の直接法[2]をもとにして新たな計算手法を開発してきた[3]~[5]。粘性流体の典型的な数理モデルである Navier-Stokes 方程式への境界要素法の適用においては、特にその非線型性が問題となるが、その取扱いに Brebbia 等が提唱した DRM が有効的と考えて新たな低コスト計算手法の開発に取り組んでいる。その過程で現れた DRM で代表的にもちいられる radial basis 函数による近似の問題点を論じる。

なお産業利用では、数メートル規模の 3 次元領域で、流速 $0.1\text{--}10 \text{ [m/s]}$ 、密度 $\rho = 1\text{--}1000 \text{ [kg/m}^3]$ 、粘性 $\mu = 10^{-5}\text{--}10^{-3} \text{ [Pa 秒]}$ 程度の対象を想定しているが、本稿では計算資源を除く数理的問題点に焦点をあてて 2 次元の数理モデルを扱う。

2. 数理モデル

流れの占める 2 次元の有界領域を Ω とし、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は区分的に C^2 級とする。本研究では、定常の非圧縮粘性流体を対象とし、その数理モデルとして次の運動方程式(1)、構成方程式(2)と連続の条件(3)に

よる境界値問題を考える。

$$\rho(u_j u_{i,j}) = \mu \tau_{i,j,j} \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = -\frac{1}{\mu} p \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} \quad (2)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (3)$$

ここで $u = (u_1, u_2)$ は流速、 p は圧力、 τ は応力テンソル、 ρ は密度、 μ は粘性係数である。

3. DR-BEM に基づく計算スキーム

本節では(1), (2)より得られる

$$u_{i,jj} + u_{j,ii} - \frac{1}{\mu} p_j \delta_{ij} = \frac{\rho}{\mu} u_j u_{i,j} \quad (4)$$

を Ω で積分し、左辺に対応する基本解をもちいて境界積分方程式を導出する。その際、右辺は DRM によって境界積分で表す。

(1) 基本解による定式化

式(3)と(4)をあわせた

$$\begin{pmatrix} \Delta + D_1^2 & D_1 D_2 & -\frac{1}{\mu} D_1 \\ D_2 D_1 & \Delta + D_2^2 & -\frac{1}{\mu} D_2 \\ D_1 & D_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\mu} \begin{pmatrix} u_1 D_1 u_1 + u_2 D_2 u_1 \\ u_1 D_1 u_2 + u_2 D_2 u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の左辺を Lu 、右辺を f と記す。ただし $D_i = \partial/\partial x_i$ および $u = (u_1, u_2, p)^T$ である。Euclid 空間の標準内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とすると、 Ω の近傍で適当な滑らかさの $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ により

$$\int_{\Omega} \langle Lu, v \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx$$

となるが左辺は Green の公式により

$$\int_{\Omega} \langle u, \mathcal{L}^T v \rangle dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} (\tau_i v_i - \sigma_i u_i) d\sigma = \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx$$

となる。ただし $d\sigma$ は Γ に沿う境界積分であり、 $n = (n_1, n_2)$ を境界 Γ における外向き単位法線として

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \begin{pmatrix} \Delta + D_1^2 & D_1 D_2 & \frac{1}{\mu} D_1 \\ D_2 D_1 & \Delta + D_2^2 & \frac{1}{\mu} D_2 \\ -D_1 & -D_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_i &= \sum_{j=1}^2 (D_i u_j + D_j u_i - \frac{1}{\mu} p \delta_{ij}) n_j, \\ \sigma_i &= \sum_{j=1}^2 (D_i v_j + D_j v_i - v_3 \delta_{ij}) n_j\end{aligned}$$

である。ここで、(1) と (3) の和である (4) に対して Green の公式を適用したこと、表面力 (traction) τ が現れていることに注意する。

さて重 Laplacian に対する基本解

$$\phi(y; x) = -\mu \frac{|x - y|^2}{8\pi} \log |x - y|$$

と、 \mathcal{L} の余因子行列 \mathcal{M} に対して、 $v_{ki} = \mathcal{M}_{ki} \phi$ とする。このとき超函数の意味で $\Delta_y^2 \phi = -\delta(y - x)$ を満たす。そこで $v_k = (v_{k1}, v_{k2}, v_{k3})^T$ とすると、 $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}u_k(x) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} (\tau_i(y) v_{ki}(y; x) - \Sigma_{ki}(y; x) u_i(y)) d\sigma_y \\ &\quad - \int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; x) \rangle dy, \quad k = 1, 2 \quad (5)\end{aligned}$$

を得る。ただし

$$\Sigma_{ki}(y; x) = \sum_{j=1}^2 (D_i(y) v_{kj}(y; x) + D_j(y) v_{ki}(y; x) - v_{k3}(y; x) \delta_{ij}) n_j$$

である。頂点を除く $z \in \Gamma$ に対して $x \in \Omega$ として横断的に $x \rightarrow z$ とすると、jump relation により

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} v_{ki}(y; z) \tau_i(y) d\sigma_y \\ &= \frac{1}{2} u_k(z) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} \Sigma_{ki}(y; z) u_i(y) d\sigma_y + \int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; z) \rangle dy, \\ &\quad z \in \Gamma \setminus \{\text{頂点}\}, \quad k = 1, 2 \quad (6)\end{aligned}$$

を得る。ここで Γ の滑らかさより Cauchy の主値積分は現れないことに注意する。また、 z の近傍で Γ が直線ならば $\Sigma_{ki}(y; z) = 0$ なので、特に Ω が多角形ならば

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} v_{ki}(y; z) \tau_i(y) d\sigma_y = \frac{u_k(z)}{2} + \int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; z) \rangle dy, \\ &\quad z \in \Gamma \setminus \{\text{頂点}\}, \quad k = 1, 2\end{aligned}$$

が成立する。 z が Γ の頂点の場合は、右辺第 1 項は Γ が z でなす内角の大きさをもちいて表される。

(2) DRM による非線型項を含む領域積分の取り扱い

式 (6) では、未知函数 $u = (u_1, u_2)$ について非線型な $f = (f_1, f_2)$ の領域積分が現れる。これを DRM によって境界積分で表す。

正整数 S, S' をとめて、 Ω 上の点 $\{x_s^{\text{in}} ; 1 \leq s \leq S\}$, Γ 上の点 $\{x_s^{\text{bd}} ; 1 \leq s \leq S'\}$ に対して $x_s = x_s^{\text{in}}, 1 \leq s \leq S$, $x_{S+s} = x_s^{\text{bd}}, 1 \leq s \leq S'$ とする。そこで適当な函数の集合 $\{\varphi_s^{(1)} ; 1 \leq s \leq S + S'\}$ をもちいて

$$\begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_{S+S'}) \end{pmatrix} \approx F_1 \alpha_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}^{S+S'}, k = 1, 2$$

とする。ただし F_1 は $\varphi_j^{(1)}(x_i)$ を (i, j) -成分とする $S + S'$ 次の正方行列である。さらに $\{\varphi_s^{(2)} ; 1 \leq s \leq S + S'\}$ を適当にとり

$$u_k(x) \approx \sum_{s=1}^{S+S'} \varphi_s^{(2)}(x) \beta_{ks}, \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

と近似し、同様に $S + S'$ 次の正方行列 F_2 を定めて

$$U_k \approx F_2 \beta_k, \quad \beta_k \in \mathbb{R}^{S+S'}, k = 1, 2$$

と近似する。ただし $U_k = (u_k(x_1) \quad \dots \quad u_k(x_{S+S'}))^T$ である。DRM では (7) より

$$\begin{aligned}D_j u_k(x_i) &\approx \sum_{s=1}^{S+S'} D_j \varphi_s^{(2)}(x_i) \beta_{ks} = D_j F_2 \beta_k \\ &\approx (D_j F_2) F_2^{-1} U_k, \quad k, j = 1, 2 \quad (8)\end{aligned}$$

とする。ただし $D_j F_2$ は $D_j \varphi_s^{(2)}(x_i)$ を (i, s) -成分とする正方行列、 $\beta_k = (\beta_{k1} \quad \dots \quad \beta_{k,S+S'})^T$ である。このもとで

$$\begin{aligned}\alpha_k &\approx F_1^{-1} \begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_{S+S'}) \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{\rho}{\mu} F_1^{-1} ((\text{diag } U_1) D_1 F_2 + (\text{diag } U_2) D_2 F_2) F_2^{-1} U_k \quad (9)\end{aligned}$$

である。そこで $\frac{1}{\mu} \Delta^2 \psi_s = \varphi_s^{(1)}$ となる特解 ψ_s をひとつとり、 L の余因子行列 M に対して $W_{jm}^s = M_{jm} \psi_s$ および

$$\mathcal{T}_{im}^s = \sum_{j=1}^2 \left(D_i W_{jm}^s + D_j W_{im}^s - \frac{1}{\mu} W_{3m}^s \delta_{ij} \right) n_j$$

とすると、 $k = 1, 2$ で

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; x) \rangle dy \\ &\approx \sum_{m,s} \left(-W_{km}^s(x) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} (\mathcal{T}_{im}^s v_{ki} - \Sigma_{ki} W_{im}^s) d\sigma_y \right) \alpha_{ms} \quad (10)\end{aligned}$$

が成立する。

(3) 計算スキーム

以上の(6), (9), (10)で構成される積分方程式に選点法を適用する。 Γ を、角を含まない E 個の部分集合に分割し、これに付随する $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ の区分定数近似を表す $T \in \mathbb{R}^{2E}$ と、 $(u_1(x_1) \cdots u_1(x_S) \quad u_2(x_1) \cdots u_2(x_S))^T$ に相当する $U \in \mathbb{R}^{2S}$ が、適当な $V_\Gamma \in M_{2S,2S}(\mathbb{R})$ と $\Phi_1 : \mathbb{R}^{2S} \rightarrow M_{2E,2S}(\mathbb{R})$ によって

$$V_\Gamma T = b + \Phi_1(U)U,$$

を満たすとする。ただし $M_{mn}(\mathbb{R})$ は実数を成分とする m 行 n 列の行列全体である。さらに(5),(9),(10)も同様に離散化し、 $V_\Omega \in M_{2E,2S}(\mathbb{R})$ と $\Phi_2 : \mathbb{R}^{2S} \rightarrow M_{2S,2S}(\mathbb{R})$ によって

$$U = V_\Omega T - c - \Phi_2(U)U$$

を満たすとする。ここで、 V_Γ と V_Ω の各要素は v_{ki} の線積分を含み、 $b \in \mathbb{R}^{2E}$, $c \in \mathbb{R}^{2S}$ は境界値 $u_i(x_s^{\text{bd}})$ を含む。

以上で得られる $(T, U) \in \mathbb{R}^{2E} \times \mathbb{R}^{2S}$ の満たす非線型方程式の逐次近似法として次のふたつのスキームを提案する。文献[1]では Navier-Stokes 方程式は扱われていないが、スキーム 2 はそこで他の方程式に対して提案されているものに相当する。

スキーム 1 1. 内点での流速の初期推定 U^0 を設定する。反復回数を表すインデックスを $n = 1$ とする。

2. 積分方程式を離散化した $V_\Gamma T^n = b + \Phi_1(U^{n-1})U^{n-1}$ を解き、 T^n を求める。
3. 境界値から内部の点への関係式 $U^n = V_\Omega T^n - c - \Phi_2(U^{n-1})U^{n-1}$ により、 U^n を求める。
4. $\|U^n - U^{n-1}\|$ が充分小さければ U^n, T^n を近似解として終了する。そうでなければ n をひとつ増やして、ステップ 2 へ戻る。

スキーム 2 1. 内点での流速の初期推定 U^0 を設定する。反復回数を表すインデックスを $n = 1$ とする。

2. T^n, U^n についての連立方程式

$$\begin{pmatrix} V_\Gamma & -\Phi_1(U^{n-1}) \\ V_\Omega & -I_{2S} - \Phi_2(U^{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^n \\ U^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

を解く。ただし I_{2S} は $2S$ 次の単位行列である。

3. $\|U^n - U^{n-1}\|$ が充分小さければ U^n, T^n を近似解として終了する。そうでなければ n をひとつ増やして、ステップ 2 へ戻る。

スキーム 1 で現れる境界積分方程式は、未知数が境界要素と同じ数であり、また方程式の係数は反復回数に依存しない。一方、スキーム 2 の連立方程式は反復ごとに変化し、かつ境界点と内点の両方を未知数とする大規模問題となり、スキーム 1 に比して計算コストが高くなる。

4. 2 次元キャビティ流れに対する数値実験結果

$\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ とし、境界条件を上辺で $u(x_1, 1) = (1, 0)$ 、他では $u = (0, 0)$ として数値実験をおこなった。

N を正とし、 Γ の各辺を N 等分して境界要素法を適用し、分割された各線分の中点を $\{x_s^{\text{bd}} ; 1 \leq s \leq 4N\}$ と

した。また Ω を $N \times N$ の正方形に等分割し、その重心の全体を $\{x_s^{\text{in}} ; 1 \leq s \leq N^2\}$ とした。形状函数 $\varphi_s^{(i)}$ には、DRMで標準的にもちいられる radial basis 函数

$$\varphi_s^{(i)}(x) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)}r + c_2^{(i)}r^2 + c_3^{(i)}r^3, \quad r = |x - x_s| \quad (11)$$

を利用する。 v_{ki} を含む積分は対数函数の特異性が現れるため、正則化[6]もしくは対数函数を扱いうる数値積分則[7]の利用が有効である。また初期推定を $U^0 = 0$ とし、 U^n と U^{n-1} の ℓ^2 ノルムでの差が 10^{-8} 以下となったときに反復を停止した。一方、反復回数が 100 回を超えた場合は収束しないと判断した。

(1) Reynolds 数が低い場合

DRMで利用する radial basis 函数の性質を調べるために、 $\rho = \mu = 1$ とし、(11)の係数 $c_j^{(i)}$ を $\{0, 1\}$ から選択して数値計算をおこなった。 $c_j^{(i)}$ の組み合わせは全部で 256通りあり、 $N = 20$ の場合、スキーム 1 で収束したのは 103通りであったが、収束する $c_j^{(i)}$ の組み合わせに明確な規則性を見出すことはできなかった。例えば $\varphi_s^{(1)}(x) = r$, $\varphi_s^{(2)}(x) = r + r^2$ の場合には収束して図 1 に示すプロファイルの u が得られる。これはスキーム 2 でも同様であった。このときの $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴を図 2 に示す。一方、 $\varphi_s^{(1)}(x) = r$, $\varphi_s^{(2)}(x) = r^2$ の場合にはスキーム 1,2 ともに収束しなかった。

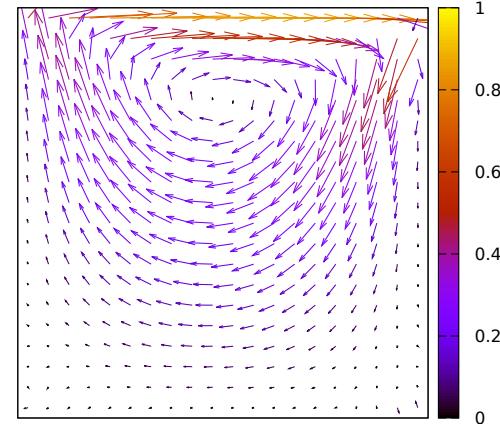


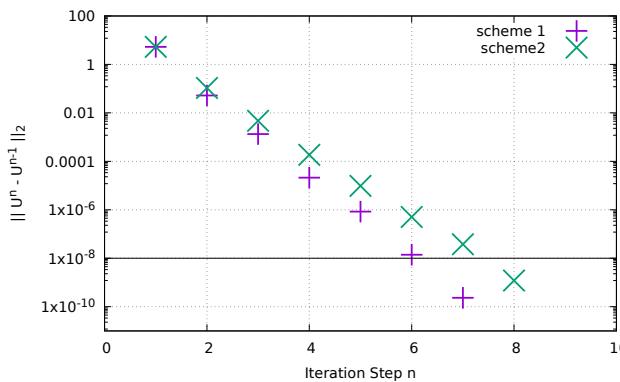
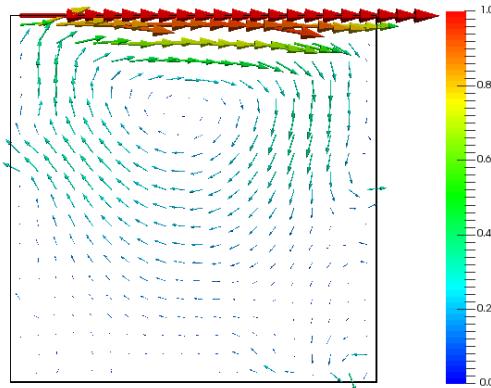
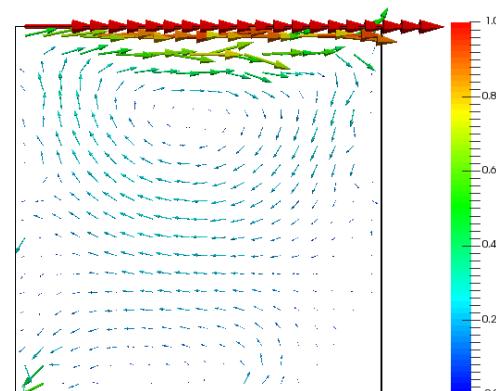
図-1 $\rho = \nu = 1, N = 20$ でスキーム 1 で得られる流速 U^7

(2) Reynolds 数が高い場合

前述のとおり、産業利用で想定されるのは高 Reynolds 数の場合である。 $\varphi_s^{(1)} = r$, $\varphi_s^{(2)} = r + r^2$ としてスキーム 2 で、空気を想定する $\rho = 1.2$, $\mu = 2 \times 10^{-5}$ (Reynolds 数 6×10^4)で得られる U^{18} を図 3 に、水を想定する $\rho = 10^3$, $\mu = 10^{-3}$ の場合 (Reynolds 数 1×10^6) で得られる U^{23} を図 4 に示す。いずれの場合も提案する二つのスキームは収束せず、スキーム 1 では差のノルム $\|U^n - U^{n-1}\|$ は発散したが、スキーム 2 では差のノルムは発散しなかった。

5. 提案手法への幾つかの注意点

DRMの利用にあたり、以下の検討が必要である。

図-2 $\rho = \nu = 1, N = 20$ の場合の $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴図-3 空気想定、 $N = 20$ でスキーム 2 で得られる流速 U^{18} 図-4 水を想定し $N = 20$ でスキーム 2 で得られる流速 U^{23}

- 標本点 $\{x_s^{\text{in}}\}$ の適切な選択方法は、著者らの知る限り、知られていない。
 - 関数近似 (7) に対して、微分係数(導函数)が (8) で近似されるとは限らない。
- 特に radial basis 函数について次の問題点が挙げられ、更なる研究が望まれる。

- 各 x_s に対して $r = |x - x_s|$ は $x = x_s$ で微分可能ではないが、この問題点は先行研究では論じられていない。例えば [1] の 157 頁のプログラム例ではこの微分係数を 0 としており、本研究でも $x_s \in \Omega$ の場合は $D_j \varphi_s^{(i)}(x_s) = 0$ とした。一方 $x_s \in \Gamma$ の場合は、 x_s における境界 Γ の接線と x 軸の正の向きとなす角 θ により

$$D_1 \varphi_s^{(i)}(x_s) = c_1^{(i)} \cos \theta,$$

$$D_2 \varphi_s^{(i)}(x_s) = c_1^{(i)} \sin \theta$$

とした。

- 流れの問題の近似には、例えば上流差分など、流れの方向を考慮した近似が有効な場合が多い。対称性を持つ radial basis 函数による流れ場 u の近似の妥当性は議論が必要である。

また、本研究で提案するスキーム 1,2 では、 p は陽に現れず、 Γ 上の τ に含まれる。スキームに現れる連立方程式の一意可解性、スキームの収束性のみならず、それらが (1) および (3) を近似するかの検証が必要である。

6. 結言

本論文では、Navier-Stokes 方程式に対する数値計算法として境界要素法および DRM に基づく 2 つのスキームを提案し、数理的視点からその問題点を論じた。

謝辞: 第 3 著者の研究の一部は JSPS 科研費 JP22K18674 の助成を受けた。

参考文献

- [1] Partridge, P. W. Brebbia, C. A. and Wrobel, L. C.: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, 1992.
- [2] 数値流体力学編集委員会編: 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会, p. 253, 1995.
- [3] 山田義博, 登坂宣好: 微分作用素の基本解と特解に基づいた非圧縮粘性流れの低成本非圧縮粘性流れ解析数値スキームの開発, 計算工学講演会論文集 Vol. 27, 2022.
- [4] Yamada, Y. and Tosaka, N.: Development of low-cost solver for incompressible viscous fluid flow based on the fundamental and particular solutions of differential operator, 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV), 2022.
- [5] 山田義博, 登坂宣好: 微分作用素の基本解と特解に基づいた非圧縮粘性流れの低成本 3 次元数値解法の開発, 計算工学講演会論文集 Vol. 28, 2023.
- [6] Tanaka, M., Sladek, V. and Sladek, J.: Regularization techniques applied to boundary element methods, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47, pp. 457–499, 1994.
- [7] Crow, J. A.: Quadrature of integrals with logarithmic singularities, *Math. Comp.*, Vol. 60, pp. 297–301, 1993.