

# 源点選択を含む基本解近似解法の開発と その面内弾性波動問題への適用

Development of the method of fundamental solutions with source point selection and  
its application to in-plane elastic wave problems

古川陽<sup>1)</sup> 中尾奏太<sup>2)</sup>  
Akira Furukawa and Kanata Nakao

<sup>1)</sup>博 (工) 北海道大学 大学院工学研究院 准教授 (〒 060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail: afurukawa@eng.hokudai.ac.jp)

<sup>2)</sup>北海道大学 大学院工学院 修士課程 (〒 060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail: nakao.kanata.h7@elms.hokudai.ac.jp)

The method of fundamental solutions (MFS) is a mesh-free numerical method for solving partial differential equations. In MFS, the source points of fundamental solution are placed in the complementary domain of the analysis domain. It is well known that the location of source points is arbitrary and strongly affects the accuracy of approximate solutions. In this study, we develop MFS which can select the source points using orthogonal matching pursuit. We solve in-plane wave problems in elastic bodies and discuss the effectiveness of our proposed method.

**Key Words** : The method of fundamental solutions, Orthogonal matching pursuit, In-plane wave

## 1. はじめに

波動問題に対する数値シミュレーションには、有限要素法や境界要素法が広く用いられている。これらの手法はメッシュ分割型の解法に分類され、解析領域やその境界を離散化して解析を行う。一方で、解析においてメッシュを使用しないメッシュフリー型の数値シミュレーション手法として、基本解近似解法が知られている [1]。基本解近似解法は、領域や境界の要素分割が必要ないため、解析における未知量が少なく済む。また、基本解近似解法は、複雑な定式化・離散化を要求しないため、数値計算の実装が容易である。その一方で、基本解近似解法では、解表現に用いる基本解の源点の数・配置が近似解の精度に影響を及ぼすことが知られている。

線形システムを対象に、疎な解を求める手法のひとつとして直交マッチング追跡 [2] がある。この手法は<sup>1)</sup>最適化に分類され、貪欲法に基づいて基底ベクトルの選択を繰り返し行う。直交マッチング追跡により、線形システムの解を表現するために必要となる基底を選択することが可能となる。そのため、直交マッチング追跡は基本解近似解法の源点の数・配置の決定にも適用可能と考えられる。そして、著者らはこれまでに、面外波動問題 [3] に対して源点選択を含む基本解近似解法の開発を行ってきた。

以上を踏まえ、本研究では、2次元面内波動問題を対象に源点選択を含む基本解近似解法を開発する。源点の選択には、これまでと同様に直交マッチング追跡を用いる。本論文では、提案手法を用いた数値解析例を示し、近似解の特徴と源点配置の選択傾向について考察する。以下では、特に断りのない限り、ギリシャ文

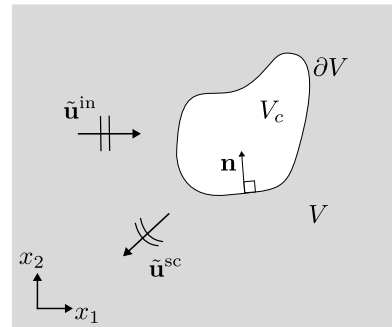


図-1 面内波動の散乱問題

字の下付き添え字は 1,2 をとる。また、1 つの項に繰り返し現れる下付き添え字に対しては、総和規約を適用する。

## 2. 解析手法

### (1) 対象とする問題

本研究で対象とする問題は、図-1 に示す通りである。同図において、解析領域は無限領域  $V$  とする。この領域  $V$  は等方で均質な線形弾性体によって構成される。また、散乱体の境界は  $\partial V$ 、補領域は  $V_c$  で表す。さらに、入射波の変位は  $\mathbf{\tilde{u}}^{\text{in}} (= [\tilde{u}_1^{\text{in}}, \tilde{u}_2^{\text{in}}]^T)$ 、散乱波の変位は  $\mathbf{\tilde{u}}^{\text{sc}} (= [\tilde{u}_1^{\text{sc}}, \tilde{u}_2^{\text{sc}}]^T)$  とする。加えて、境界上の単位外向き法線ベクトルは  $\mathbf{n} (= [n_1, n_2]^T)$  で表す。ただし、 $(\cdot)^T$  は行列・ベクトルの転置を表す。

面内波動問題に対する周波数領域の運動方程式は、以

下の式で与えられる.

$$\tilde{L}_{\alpha\gamma}\tilde{u}_\gamma(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (1)$$

ここに,  $\tilde{u}_\alpha(\mathbf{x}, \omega)$  は, 位置  $\mathbf{x}$ , 角周波数  $\omega$  における変位を表す. ただし, 式 (1) では物体力をゼロと仮定しており,  $\tilde{L}_{\alpha\gamma}$  は次式で与えられる.

$$\tilde{L}_{\alpha\gamma} := C_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta\partial_\delta + \rho\omega^2\delta_{\alpha\gamma} \quad (2)$$

ここに,  $\partial_\beta = \partial/\partial x_\beta$  であり,  $\delta_{\alpha\beta}$  は Kronecker のデルタを表す. また,  $\rho$  は解析領域を構成する弾性体の密度であり,  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  は以下に示す弾性定数である.

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \mu(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \quad (3)$$

ここに,  $\lambda, \mu$  は Lamé 定数を表す.

境界  $\partial V$  における表面力  $\tilde{t}_\alpha(\mathbf{x}, \omega)$  は, 以下の式で与えられる.

$$\tilde{t}_\alpha(\mathbf{x}, \omega) = T_{\alpha\gamma}^{(\mathbf{x})}\tilde{u}_\gamma(\mathbf{x}, \omega); \mathbf{x} \in \partial V \quad (4)$$

ここに,  $T_{\alpha\gamma}^{(\mathbf{x})}$  は表面力作用素であり, 次式で与えられる.

$$T_{\alpha\gamma}^{(\mathbf{x})} := n_\beta(\mathbf{x})C_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\delta \quad (5)$$

本研究で取り扱う散乱問題は, 式 (1) に適切な境界条件を与えることで解くことができる. 本論文では, 境界条件として表面力フリーを仮定する. このとき, 境界条件は次式で与えられる.

$$\tilde{t}_\alpha(\mathbf{x}, \omega) = 0; \mathbf{x} \in \partial V \quad (6)$$

## (2) 基本解近似解法

前節に示した面内波動の散乱問題に対する基本解近似解法の適用について考える. 式 (1) の線形性から, 変位  $\tilde{u}_\alpha(\mathbf{x}, \omega)$  は次式を満たす.

$$\tilde{u}_\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{u}_\alpha^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega) + \tilde{u}_\alpha^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega); \mathbf{x} \in V \cup \partial V \quad (7)$$

基本解近似解法では, 散乱波  $\tilde{u}_\alpha^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega)$  を基本解と近似係数の線形結合によって表現する. このとき, 領域  $V$  および境界  $\partial V$  上の変位  $\tilde{u}_\alpha(\mathbf{x}, \omega)$  は次式で表現できる.

$$\tilde{u}_\alpha(\mathbf{x}, \omega) := \tilde{u}_\alpha^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega) + \sum_{k=1}^{N_y} \tilde{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k, \omega)\tilde{c}_\beta^k; \mathbf{x} \in V \cup \partial V, \mathbf{y}^k \in V_c \quad (8)$$

ここに,  $\tilde{c}_\beta^k$  は近似係数を表す. また,  $\tilde{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  は変位に関する基本解であり, 次式で与えられる [4].

$$\tilde{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} \left[ \delta_{\alpha\beta}\Phi_1(r, k_T) + \frac{1}{k_T^2} \partial_\alpha\partial_\beta\Phi_2(r, k_L, k_T) \right] \quad (9)$$

ここに,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  であり,  $k_L$  および  $k_T$  は縦波および横波の波数を表す. また,

$$\Phi_1(r, k_T) = H_0^{(1)}(k_T r) \quad (10)$$

$$\Phi_2(r, k_L, k_T) = H_0^{(1)}(k_T r) - H_0^{(1)}(k_L r) \quad (11)$$

であり,  $H_n^{(1)}(\cdot)$  は  $n$  次の第 1 種 Hankel 関数を表す.

基本解近似解法では, 式 (8) に含まれる近似係数  $\tilde{c}_\beta^k$  の決定に境界条件を用いる. このとき, 式 (4), (6), (8) を用い, さらに散乱体の境界  $\partial V$  上に選点  $\mathbf{x}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_x$ ) を配置すれば, 解くべき連立 1 次方程式として次式を得ることができる.

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{h}} \quad (12)$$

ここに, 未知ベクトル  $\tilde{\mathbf{c}}$  の構成要素は, 以下の式で与えられる.

$$\{\tilde{\mathbf{c}}\}_k := \left\{ \begin{matrix} \tilde{c}_1^k \\ \tilde{c}_2^k \end{matrix} \right\} \quad (13)$$

また, 係数行列  $\tilde{\mathbf{D}}$  と既知ベクトル  $\tilde{\mathbf{h}}$  の構成要素は, 以下のように与えられる.

$$[\tilde{\mathbf{D}}]_{ik} := \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) & \tilde{T}_{12}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \\ \tilde{T}_{21}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) & \tilde{T}_{22}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\{\tilde{\mathbf{h}}\}_i := - \left\{ \begin{matrix} \tilde{t}_1^{\text{in}}(\mathbf{x}^i, \omega) \\ \tilde{t}_2^{\text{in}}(\mathbf{x}^i, \omega) \end{matrix} \right\} \quad (15)$$

ただし,  $\tilde{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  は表面力の基本解を表す. 式 (12) を解くことで得られる近似係数  $\tilde{c}_\beta^k$  を用いれば, 領域の変位や境界上の表面力を計算することができる. なお, 本研究で取り扱う面内波動問題では,

$$\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{C}^{M \times N}, \tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{C}^N, \tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^M \quad (16)$$

および

$$M = 2N_x, N = 2N_y \quad (17)$$

である.

## (3) 直交マッチング追跡の適用

本研究における提案手法では, 式 (12) に示す連立 1 次方程式の解法に直交マッチング追跡を用いる. 直交マッチング追跡では,  $l^0$  最適化問題を取り扱う. このとき, 線形システムを  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  とすれば,  $l^0$  最適化問題は以下のように表現できる.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (18)$$

ここに,  $\|\cdot\|_0$  は  $l^0$  擬似ノルムであり, その値は対象とするベクトルの非ゼロ成分の個数に対応する. 直交マッチング追跡では, 式 (18) を反復計算によって解く. このとき, 初期値は以下のように設定する.

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}, \mathbf{r}[0] = \mathbf{y}, \mathbf{S}_{-1} = \emptyset, k = 0 \quad (19)$$

ここに,  $\mathbf{0}$  は零ベクトル,  $\mathbf{S}_k$  は各反復ステップで選択した列ベクトルの情報を記憶するためのインデックス集合である. 式 (19) に示す初期値をもとに, 以下に示

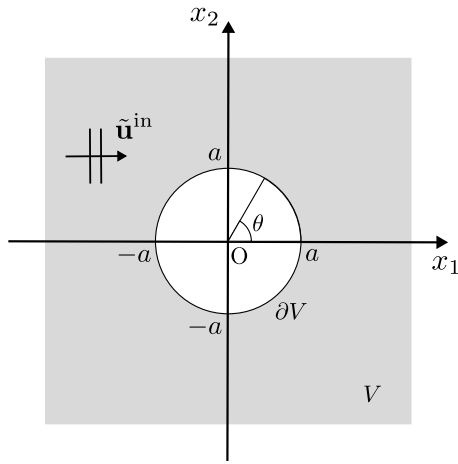


図-2 解析モデル

す処理を順に実行することで最適解の計算を行う。

$$i[k] := \arg \max_i \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r}[k] \rangle|^2}{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle} \quad (20)$$

$$\mathcal{S}_k := \mathcal{S}_{k-1} \cup \{i[k]\} \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{x}}[k] := [\mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}^H \mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}]^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}^H \mathbf{y} \quad (22)$$

$$\mathbf{x}[k+1] := \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{e}_i \quad (23)$$

$$\mathbf{r}[k+1] := \mathbf{y} - \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{a}_i \quad (24)$$

$$k := k+1 \quad (25)$$

ここに、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  はベクトルの内積、 $\mathbf{a}_i$  は行列  $\mathbf{A}$  の  $i$  列目の列ベクトルを表す。また、 $\mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}$  は、行列  $\mathbf{A}$  のうち、インデックス集合  $\mathcal{S}_k$  に記憶されたインデックスの列ベクトルのみで構成される行列とする。加えて、 $\mathbf{e}_i$  は  $i$  番目の成分にのみ値を持つ標準基底である。式 (24) に示す  $\mathbf{r}[k+1]$  は、 $k+1$  回目の反復計算における残差ベクトルに対応する。なお、式 (20)–(25) に示す反復計算は、以下の終了条件が満足されるまで繰り返し実行する。

$$k = M \quad (26)$$

ただし、この終了条件の判定は、式 (25) の計算の後に実行される。これにより、最適解として得られる近似係数は、形式上、以下のように表現できる。

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{x}[M] \quad (27)$$

式 (27) で与えられるベクトル  $\tilde{\mathbf{c}}$  の非ゼロ成分の個数は  $M$  である。ただし、面内波動問題の場合は、非ゼロ成分の個数は  $M$  であっても選択された源点の数が  $M$  になるとは限らないことに注意が必要である。

### 3. 数値解析例

#### (1) 解析条件

本論文では、前節で説明した源点選択を含む基本解近似解法による数値解析例を示す。図-2 に解析モデルを示す。同図において、散乱体は原点  $O$  を中心とする半径  $a$  の円とし、境界条件は表面力フリーとした。選点  $\mathbf{x}^i$

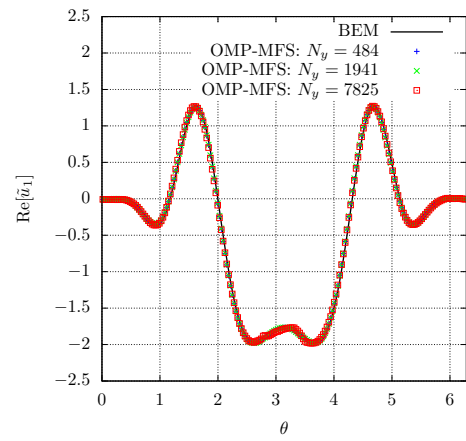


図-3 変位の境界値の実部 (入射波：縦波)

は境界上に等間隔に配置し、その数は  $N_x = 200$  とした。源点  $\mathbf{y}^k$  は補領域  $V_c$  の内部に  $x_1, x_2$  軸方向に対して等間隔に配置した。ただし、源点の数は  $N_y = 484, 1941, 7825$  とした。入射波は平面波として、次式で与えた。

$$\tilde{u}_\alpha(\mathbf{x}, \omega) = d_\alpha^{\text{in}} \exp[ik^{\text{in}} x_1] \quad (28)$$

ここに、 $k^{\text{in}}$  は入射波の波数、 $d_\alpha^{\text{in}}$  は入射波の振動方向ベクトルを表す。これらは、入射波が縦波の場合は、以下の式で与えた。

$$k^{\text{in}} = k_L, \quad d_\alpha^{\text{in}} = \delta_{\alpha 1} \quad (29)$$

一方、横波の場合は、以下の式で与えた。

$$k^{\text{in}} = k_T, \quad d_\alpha^{\text{in}} = \delta_{\alpha 2} \quad (30)$$

また、解析モデルの代表長さは  $a = 1$ 、角周波数は  $\omega = 2\pi$ 、弾性体の密度は  $\rho = 1$ 、Lamé 定数は  $\lambda = 1, \mu = 1$  とした。これは、横波の波長が代表長さ  $a$  と等しくなる条件に対応する。

#### (2) 解析結果

はじめに、入射波が縦波の場合の解析結果を示す。図-3, 図-4 に、境界における変位の実部と虚部をそれぞれ示す。これらの図において、 $\theta$  は図-2 に示すように  $x_1$  軸から反時計回りにとった角度を表す。また、提案手法 (OMP-MFS) において源点の数を  $N_y = 484, 1941, 7825$  とした結果に加え、境界要素法 (BEM) による近似解もあわせて示している。図-3, 図-4 に示す結果を比較すると、提案手法による近似解は、境界要素法による近似解と概ね一致していることが確認できる。続けて、図-5, 図-6, 図-7 に、 $N_y = 484, 1941, 7825$  に対して選択された源点の分布と近似係数の絶対値を示す。これらの図に示す結果から、境界から離れた位置に近似係数の絶対値の大きな源点が分布し、境界近傍には近似係数の絶対値の小さな源点が密に分布していることが確認できる。

次に、入射波が縦波の場合の解析結果を示す。図-8, 図-9 に、変位の境界値の実部と虚部をそれぞれ示す。これらの図では、入射波が縦波の場合と同様に、境界要素法による近似解もあわせて示している。境界値の

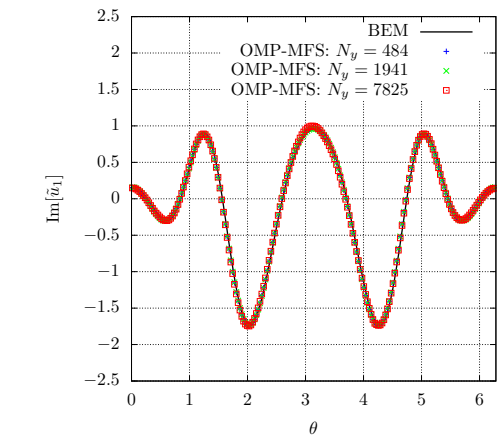


図-4 変位の境界値の虚部（入射波：縦波）

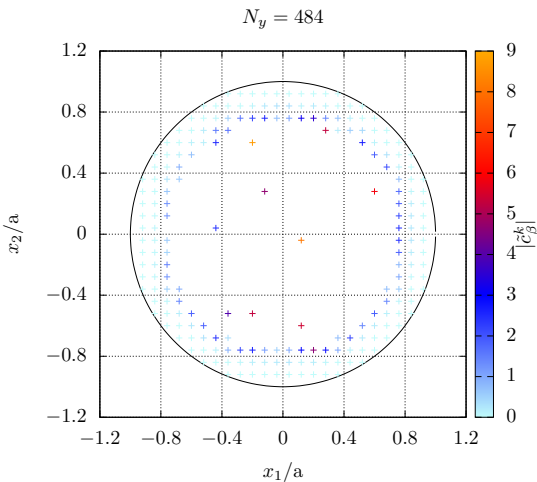


図-5 選択された源点の分布と近似係数の絶対値（入射波：縦波， $N_y = 484$ ）

比較から，提案手法において  $N_y = 484, 1941$  とした結果は，境界要素法による境界値を概ね再現できていることが確認できる．一方で， $N_y = 7825$  に対する結果は，他の 2 つの結果とは異なり，境界値を正しく計算することができなかった．続けて，直交マッチング追跡によって選択された源点について比較する．図-10，図-11，図-12 に， $N_y = 484, 1941, 7825$  に対して選択された源点の分布と近似係数の絶対値を示す．これらの図に示す結果の比較から， $N_y = 484, 1941$  に対する結果では，近似係数の絶対値の大きな源点が境界から離れた位置に分布し，近似係数の絶対値の小さな源点が境界近傍に密に分布していることが確認された．その一方で， $N_y = 7825$  に対する結果では，境界近傍にも近似係数の絶対値の大きな源点が確認された．これらの源点は，図-8，図-9 において境界値の誤差が大きくなった位置の近くに分布した．

最後に，選択された源点の数とそれらによって構成される係数行列の条件数を比較する．表-1 に，各解析条件における選択された源点の数  $N_y^*$  と係数行列の条件数  $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$  を示す．この表に示す結果から，選択された源点の数  $N_y^*$  はいずれも選点の数  $N_x (= 200)$  よりも多くなった．これは，直交マッチング追跡における基底ベク

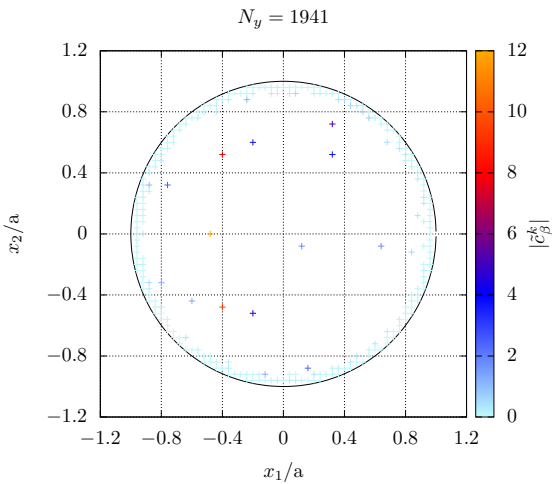


図-6 選択された源点の分布と近似係数の絶対値（入射波：縦波， $N_y = 1941$ ）

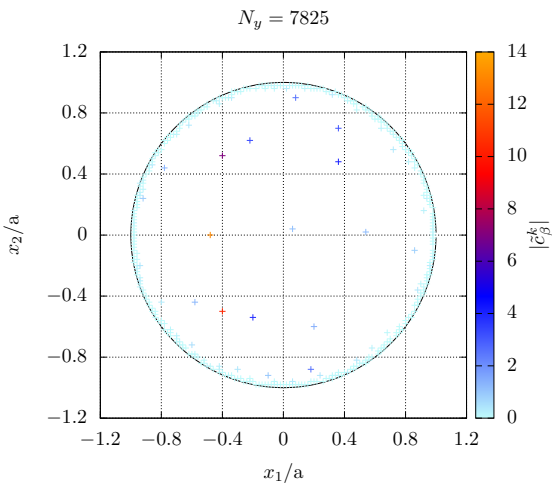


図-7 選択された源点の分布と近似係数の絶対値（入射波：縦波， $N_y = 7825$ ）

表-1 選択された源点の数  $N_y^*$  と条件数  $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$

Incident wave	$N_y$	$N_y^*$	$\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$
Longitudinal	484	216	$2.45 \times 10^7$
	1941	244	$3.65 \times 10^3$
	7825	363	$7.11 \times 10^2$
Transverse	484	213	$2.63 \times 10^7$
	1941	240	$3.06 \times 10^3$
	7825	356	$6.83 \times 10^2$

トルの探索において， $x_1, x_2$  軸方向の成分を独立に取り扱ったためである．また，係数行列の条件数  $\text{cond } \mathbf{A}_{S_k}$  は，源点の数  $N_y$  の増加に伴い小さくなった．

4. おわりに

本研究では，面内波動の散乱問題を対象に，源点選択を含む基本解近似解法の開発を行った．提案手法では，源点の選択に  $l^0$  最適化問題の解法として知られる直交マッチング追跡を用いた．数値解析例として，入

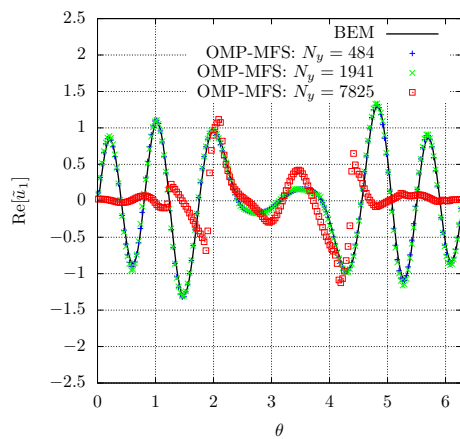


図-8 変位の境界値の実部（入射波：横波）

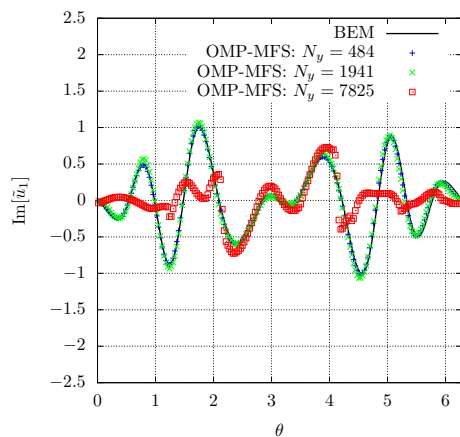
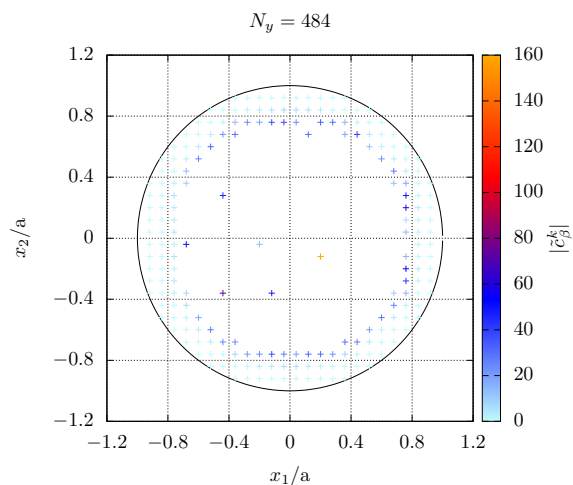
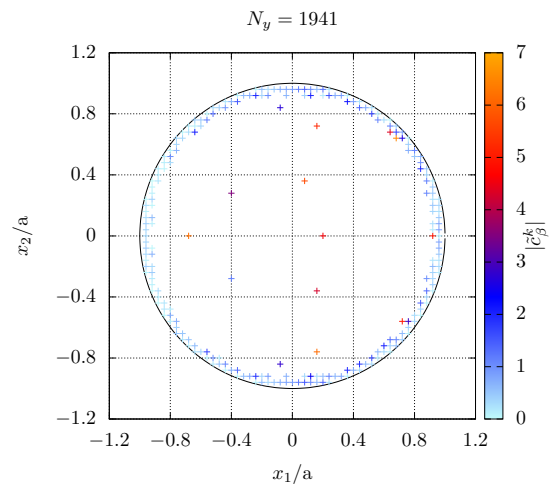
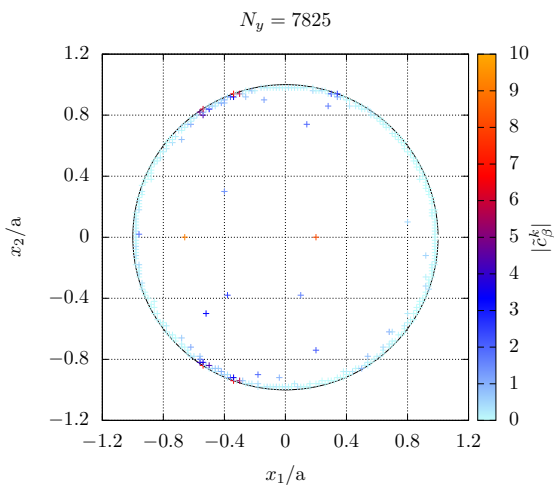


図-9 変位の境界値の虚部（入射波：横波）

図-10 選択された源点の分布と近似係数の絶対値（入射波：横波， $N_y = 484$ ）

射波を縦波とした場合と横波とした場合について、散乱解析を行った。提案手法と境界要素法による境界値の近似解の比較を行い、一部の結果を除き、両者の値が概ね一致することを確認した。また、選択された源点の配置と近似係数の絶対値を示し、境界値の誤差が大きくなった解析条件においては、境界近傍に近似係

図-11 選択された源点の分布と近似係数の絶対値（入射波：横波， $N_y = 1941$ ）図-12 選択された源点の分布と近似係数の絶対値（入射波：横波， $N_y = 7825$ ）

数の絶対値が大きい源点が分布していることを確認した。今後は、源点の配置方法について検討を行い、近似解の精度の向上に取り組む予定である。

**謝辞：** 本研究は、JSPS 科研費 22K04277 の助成を受けたものです。この場を借りて感謝申し上げます。

### 参考文献

- [1] Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.27, pp.759-769, 2003.
- [2] 永原正章：スパースモデリング-基礎から動的システムへの応用-, コロナ社, 2004.
- [3] 古川陽, 松村耕佑, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 異方性材料の面外波動問題に対する基本解近似解法の適用, 土木学会論文集, Vol.79, No.15, 論文 No.22-15024, 2023.
- [4] 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.