

# 有限幅の板におけるガイド波ビーム散乱問題に対するハイブリッド BEM の検討

Examination of Hybrid BEM for Scattering Problems of Guided Wave Beams in a Plate with Finite Width

山田純花<sup>1)</sup> 丸山泰蔵<sup>2)</sup> 神田昂亮<sup>3)</sup>  
Sumika Yamada, Taizo Maruyama, and Kosuke Kanda

<sup>1)</sup>東京工業大学 環境・社会理工学院 学生  
(〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W8-22, E-mail: yamada.s.bb@m.titech.ac.jp)

<sup>2)</sup>博(工) 東京工業大学 環境・社会理工学院 准教授  
(〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W8-22, E-mail:maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp)  
<sup>3)</sup>博(工) 電力中央研究所 エネルギートランスフォーメーション研究本部 主任研究員  
(〒 240-0196 神奈川県横須賀市長坂 2-6-1, E-mail:k-kosuke@criepi.denken.or.jp)

In ultrasonic testing of plates using guided waves, the design of incident excitation and analysis of measurement data rely on the two-dimensional (2D) plate-wave theory, which encompasses Lamb and SH waves. This approach is adopted due to the emergence of numerous dispersion curves of guided-wave propagation modes in the 3D dispersion theory of plates with finite width. In this study, we utilize hybrid boundary element method (BEM) to investigate guided-wave scattering with plate-wave beam incidence, within the framework of the 2D plate-wave theory. Furthermore, we examine the accuracy of the paraxial approximation of the plate-wave beam in the hybrid BEM model.

**Key Words :** Boundary element method, ultrasonic testing, guided wave, Gaussian beam

## 1. はじめに

構造物や機械の維持管理において、超音波による非破壊検査は重要な役割を果たしている。しかし、一般的な超音波探傷試験では、長大構造物に非破壊検査を実施する際には膨大なコストや時間がかかることが課題となる。この課題を解決するため長大構造物の非破壊検査においてはガイド波が有用であると期待される。ガイド波は低減衰で長距離を伝搬する性質があり、広範囲のスクリーニング検査やアクセス困難位置の検査に適しているためである。一方で、ガイド波は分散性や多重モード性を有するため分散解析を行うことが必須である。さらに、実際の検査対象は有限幅の板を有するため多数の伝搬モードが生じてしまい、入射波の設計や受信波の解析が難しい。このような理由から既往の研究においては、有限幅の板を伝搬するガイド波を用いた検査においても、板の幅を無限と仮定する2次元理論に基づいて入射波の設計や受信波の解析を行っている[1]。これらの実験の結果と解析結果は概ね整合するものの、有限幅を伝搬するガイド波の解析を2次元理論に基づいて行うことの妥当性は十分に検討されていない。

以上の背景から、丸山と神田[2]は近軸近似を用いてガイド波のビームの変位解を導出したが、近似解の精度や近似が散乱解析に与える影響については十分な検討が行われていない。そこで本研究では、トランステューサのモデル化および散乱解析を精度よく行うため、近軸近似により得られた解と近似を用いたフーリエ解析

より得られた厳密解をハイブリッド BEM による散乱解析の入射波として用い、近軸近似の精度検証を行った。

## 2. 解析手法

### (1) ガイド波のビームの変位解

Lamb 波のビームの変位解は次式のように表される。

[2]

$$u_1(\mathbf{x}) = \left( V(x_1, x_2) + \frac{1}{ik_{gw}} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) U_1(x_3) e^{ik_{gw}x_1} \quad (1a)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{ik_{gw}} \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) U_1(x_3) e^{ik_{gw}x_1} \quad (1b)$$

$$u_3(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2) U_3(x_3) e^{ik_{gw}x_1} \quad (1c)$$

ここで、 $k_{gw}$  は伝搬方向の波数、 $\mathbf{U}$  は Lamb 波の変位分布を表す。また、 $V$  は振幅関数であり、次式を満足する。

$$2ik_{gw} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0 \quad (2)$$

式(2)に近軸近似[3]を適用すると、次式のようにガウシアンビームの近似解を得られる。

$$V_a(x_1, x_2) = V_0 \sqrt{\frac{q_0}{q(x_1)}} \exp \left[ \frac{ik_{gw}}{2} \frac{x_2}{R(x_1)} - \frac{x_2}{\{w(x_1)\}^2} \right] \quad (3)$$

$$q(x_1) = (x_1 - x_0) + q_0, \quad q_0 = -\frac{ik_{gw}}{2} w_0^2$$

$$w(x_1) = w_0 \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_R^2}}, \quad x_r = \frac{k_{gw} w_0^2}{2}$$

$$R(x_1) = (x_1 - x_0) + \frac{x_r^2}{x_1 - x_0}$$

ここで、 $x_0$  はガウシアンビームの焦点の  $x_1$  座標、 $w_0$  は焦点におけるビーム幅の半分、 $R$  は波面の曲率半径を表す。一方、式(2)をフーリエ解析によって解くと、厳密解として次式を得る。

$$V_i(x_1, x_2) = \exp\{-ik_{gw}(x_1 - x_0)\}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} \left[ \hat{V}_+(\xi) \exp\left\{i(x_1 - x_0) \sqrt{k_{gw}^2 - \xi^2}\right\} \right.$$

$$\left. + \hat{V}_-(\xi) \exp\left\{-i(x_1 - x_0) \sqrt{k_{gw}^2 - \xi^2}\right\} \right] \times \exp(i\xi x_2) d\xi \quad (4)$$

$x_1$  正方向に伝搬するガウシアンビームのみを考え、 $\hat{V}_{\pm}$  は次式で与える。

$$\begin{cases} \hat{V}_+(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2s^2}\right) \\ \hat{V}_-(\xi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

また、 $x_1$  方向に指数関数的に振幅が増大・減衰するモードを考慮しないため、式(4)の積分項の積分範囲は  $[-k_{gw}, k_{gw}]$  とする。

近似解 [式(3)] と厳密解 [式(5)] を比較するため、 $x_1 = x_0$  において両者が一致するよう  $s = \sqrt{2}/w_0$  と設定した。したがって、ビーム幅  $w_0$  のみを指定することで厳密解と近似解とを比較することができる。

## (2) ハイブリッド BEM の概要

本研究では、図 1 のような減肉状の欠陥部分を含む有限幅の板におけるガイド波の反射・透過問題について、ハイブリッド境界要素法 (BEM) を用いて散乱解析を行った。局所領域に対しては BEM を用いて境界  $S_0$  に対する境界値問題を解き、仮想境界  $S_-$ 、 $S_+$  では半解析的有限要素法 (SAFE) の分散解析結果を用いてモード展開した [4]。

## 3. 数値解析結果と考察

### (1) 入射波の解析

式(1)で示した Lamb 波のビームを、欠陥のない一様な板に入射させ、近軸近似による解 [式(3)] とフーリエ積分による解 [式(4)] を比較した。その結果、両者の差はビーム幅  $w_0$  に依存して変化することが明らかとなった。ビーム幅  $w_0$  が十分大きいときは近軸近似による解とフーリエ積分による解との差が小さいのに対し、 $w_0$  が小さいときは両者の差が明確に生じた。

この原因として、式(5)に示したガウス関数  $\hat{V}_+$  が、積分範囲  $[-k_{gw}, k_{gw}]$  で 0 に収束するか否かが挙げられる。ビーム幅  $w_0$  が小さいとガウス関数  $\hat{V}_+$  が積分範囲

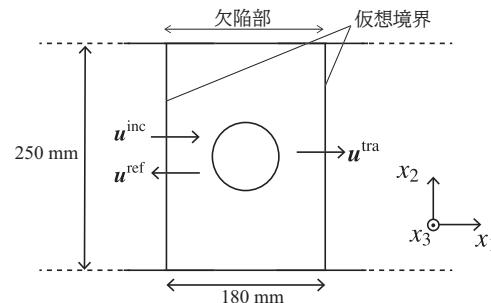


図-1 減肉状の欠陥を有する板におけるガイド波の反射・透過  
(板厚 38 mm 欠陥深さ 7 mm)

内で収束しないため、フーリエ積分による解の変位分布がガウス分布とならず、ガウシアンビームが構成されない。その結果、近軸近似が精度よく成立する範囲を超えて変位が存在する結果となり、両者に明確な差が生じたと考えられる。

### (2) 散乱解析

図 1 に示した領域について行った散乱解析の結果の概要を述べる。入射波の解析と同様、ビーム幅  $w_0$  が小さいときは散乱波にもフーリエ積分による解と近軸近似による解との間に差が生じた一方、 $w_0$  が十分大きいときは両者に明確な差は認められなかった。

両者の差についてさらに定量的に議論するため、エネルギー保存則に基づく相対誤差を用いて検討を行った。その結果、近軸近似の精度が著しく低下する場合でも相対誤差は 10%以下の値となった。相対誤差が大きくならない理由として、近軸近似の精度が保たれる伝搬方向軸付近にエネルギーが集中し、精度が低下する伝搬方向軸から離れた範囲の変位がエネルギーに寄与する影響が小さいことが考えられる。

## 4. おわりに

本稿では、ガイド波の散乱解析における解析手法とその結果の概要を述べた。当日は図表を交えて数値解析結果と考察について述べる。

## 参考文献

- [1] Harb M.S., Yuan F.G.: Non-construct Ultrasonic technique for Lamb wave characterization in composite plates, *Ultrasonics* **64**, 162-169, 2016.
- [2] T. Maruyama, K. Kanda: Derivation of an in-plane amplitude equation and its paraxial approximation for elastic guided waves in plates, *International Journal of Solids and Structures* **281**, No.112420, 2023.
- [3] L.W. Schmerr Jr.: Fundamentals of Ultrasonic Non-destructive Evaluation, Springer, 2016.
- [4] 丸山泰蔵, 神田昂亮: ハイブリッド SAFE-BEM を用いたガイド波散乱解析の定式化の検討, 計算工学講演会論文集, Vol.28, 2023.