計算工学講演会論文集 Vol. 29 (2024 年 6 月) 日本計算工学会

外部 source point を用いたアイソジオメトリック境界要素法に関する研究

Isogeometric boundary element method (IGABEM) with external source points

川崎凌吾 1) 乙黒雄斗 2) 岡田裕 3)
Ryogo Kawasaki, Yuto Otoguro and Hiroshi Okada

1)学士 (工) 東京理科大学 大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻（E-mail: 7523520@ed.tus.ac.jp)
2)博 (工) 東京理科大学 創域理工学部 機械航空宇宙工学科 助教（E-mail: yuto.otoguro@rs.tus.ac.jp)
3)Ph.D. 東京理科大学 創域理工学部 機械航空宇宙工学科 教授（〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2640, E-mail: hiroshi.okada@rs.tus.ac.jp)

In recent years, a method called Isogeometric Analysis combined with the Boundary Element Method (IGA-BEM), which uses the same geometry representation as CAD, was proposed. IGABEM enables the direct use of CAD models as analysis models, eliminating the need for mesh generation, and is expected to be a promising analysis method. However, the implementation of IGABEM requires properly handling computations known as singular integrals. In this study, a method is proposed to eliminate the need for handling singular integrals by placing source points exterior of the domain of geometry. Numerical analyses are performed on two-dimensional elasticity problems, and the accuracy criticall compared with conventional BEM are conducted.

Key Words : *Isogeometoric boundary element method, singular integral, source point, overdetermined system*

1. はじめに

近年，アイソジオメトリック解析 (Isogeometoric Analysis, IGA)[1] の概念を境界要素法 [2] に適用したアイソジオメトリック境界要素法 (Isogeometoric Boundary Element Method, IGABEM)[3] が提案された．現在のモノづくりの設計プロセスでは有限要素法が多く使用されており，手順として CAD(Computer Aided Design) で設計をし，それを数値解析に適した有限要素法解析モデルに変換している．この変換では，CAD で使用されている形状表現と解析モデルの形状表現が異なることから，有限要素法解析モデル生成は近似とみなすことができ，結果として形状誤差などを生む原因となっている．

この課題に対し CAD と同じ形状表現である NURBS を用いることで，形状誤差のない高精度な解析が可能かつ，有限要素法解析モデル生成の簡略化が期待される解析手法として IGA が提案された．しかし，実際多くの CAD ソフトでは三次元モデルの場合，B-rep 表現と呼ばれる境界面のみで形状を表現する方法を採用している．そのため体積内部の情報も必要とする IGA では，解析モデル生成を完全に省略することはできず，課題が残されたままである．

そこで IGA の概念を境界のみの離散化で計算を行う境界要素法 (Boundary Element Method, BEM) に適用した IGABEM が提案された．IGABEM は物理領域の境界のみで離散化を行うため，CAD モデルでは欠如している体積内部の情報の補間，メッシュ生成を行う必要がないという利点がある．これにより実際の工学設計において CAD モデルから解析モデルへの変換を不要にすることが期待されている．近年では IGABEM と T-spline 離散化を組み合わせることで従来の解析モデル生成を完全になくす研究もおこなわれている [4]．このような特長を有する IGABEM ではあるが，基本解が既知でなければならず，また基本解中に現れる特異性に対して積分計算を適切に行う必要がある．具体的には，二次元弾性問題の場合 $\ln(r)$ とコーシーの主値で評価されるべき $1/r$ を含む項が特異となるため，適切な処理を必要とし，これらの特異積分の処理に関する研究も行われている [5]．

以上を踏まえ本研究では，ソース点と呼ばれる計算点を形状の外側に置くことで特異積分の処理を不要にする手法を提案する．また，連立一次方程式の解法には過剰条件連立一次方程式 (overdetermined system) を用いた．数値解析例として二次元弾性問題を扱い，従来型の BEM との精度比較を行った．

2. アイソジオメトリック境界要素法（IGABEM）の解析手法

(1) アイソジオメトリック解析 (IGA)

IGA は非一様有利 B スプライン (None Uniform Rational B-Spline，NURBS) と呼ばれる CAD 等で使用される形状表現を用いて構成される．この NURBS は円弧等の曲線や局面を正確に表現するための数学的表現方法であり，CAD や CAM(Computer Aided Manufacturing) に用いられている．IGA では形状表現と変位場に NURBS を使用していることから，形状誤差のない高精度な解析が期待されている．NURBS は B-spline 基底関数に重みを導入することで得られ，B-spline 基底関数はノットベクトルと呼ばれる非減少数列で表されている．一次

元の場合，ノットベクトルを $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1}\}$ とすると B-spline 基底関数は以下のように表される．

$p = 0$ のとき

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

$p = 1, 2, 3, ...$ のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{2}$$

ここで n は B-spline 基底関数の個数，p は基底関数の次数である．また，NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ は B-spline 基底関数に重み w_i を導入したものであり，有理式で次のように表現される．

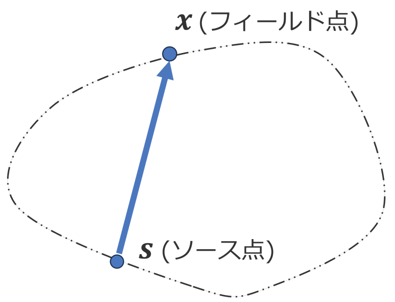
$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i} \tag{3}$$

n 個のコントロールポイント $\boldsymbol{B}_i$ と NURBS 基底関数の線形結合により，NURBS 曲線 $\boldsymbol{C}(\xi)$ が以下のように定義される．

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_i^p(\xi) \boldsymbol{B}_i \tag{4}$$

(2) 境界要素法 (BEM)

境界要素法は境界のみに離散化を行う手法であり，二次元問題であれば一次元モデル，三次元問題であれば二次元の面のみの情報で解析を行うことができる．



図–1 二次元空間におけるソース点とフィールド点の関係

a) 二次元静弾性問題に対する境界積分方程式

図 1 に示すようにソース点 (source points) とフィールド点 (field points) を $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}$ として定義し，2 点間の距離を $r = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}\|$ とする．境界要素法では境界値問題を境界積分方程式を用いて解いている．境界積分方程式では基本解が必要であり，二次元静的弾性問題の場合，基本解はある一点に作用する単位荷重により無限弾性体に生じる変位を表している．この解は Kelvin 解として知られている．以下に二次元静弾性問題に対する境界積分方程式を示す．

$$C_{ij}(\boldsymbol{s}) u_j(\boldsymbol{s}) + \int_\Gamma T_{ij}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma U_{ij}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}) t_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

ここで U_{ij}, T_{ij} はそれぞれ変位とトラクションに対する基本解，C_{ij} はjamp term や free term と呼ばれる係数であり以下のようにソース点の位置に依存する係数である．それぞれの基本解と jamp term を以下に示す．

$$U_{ij}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \{(3 - 4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}\} \tag{6}$$

$$T_{ij}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[\frac{\partial r}{\partial n} (1 - 2\nu) \delta_{ij} \right] + 2 r_{,i} r_{,j} - (1 - 2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \tag{7}$$

$$C_{ij}(\boldsymbol{s}) = \begin{cases} 0 & (\text{境界外}) \\ \frac{1}{2} & (\text{滑らかな境界上}) \\ 1 & (\text{境界内}) \end{cases} \tag{8}$$

ここで μ はせん断弾性率，ν はポアソン比，δ_{ij} は Kronecker-delta 関数，n_i はフィールド点とソース点における外向き法線ベクトルである．

境界積分方程式では，式 (5) 左辺第二項の積分はコーシーの主値で評価されなければならず，右辺の積分も $\ln 1/r$ の特異性を有しているため，適切な処理が必要となる．

この境界積分方程式をすべてのソース点に対して立てることで，解くべき連立一次方程式を構築していく．式 (5) の最初の二つの項をグループ化することで連立一次方程式は以下の行列で表記される．

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \tag{9}$$

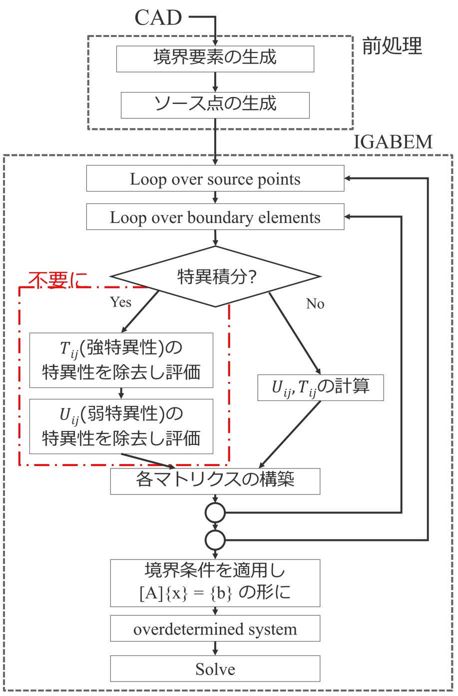
未知量の成分を左辺に，既知量を右辺に配置することで以下の方程式を構築する．

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{10}$$

ここで $\{x\}$ は未知の変位とトラクションで構成されている．この方程式を $\boldsymbol{x}$ について解くことで境界要素法の解を得ることができる．

b) 特異積分の処理

通常の境界要素法ではソース点がフィールド要素にある場合，式 (5) 中の T_{ij}, U_{ij} が特異積分になるため，適切に処理をし評価をする必要がある．本研究では，この特異積分の処理を不要にするため，ソース点を境界の外側に配置することでソース点とフィールド要素の一致を回避する．図 2 に本研究での IGABEM の解析手順を示す．ソース点を外側に配置することで特異積分の処理を完全に排除している．



図–2 IGABEM の解析手順

c) 過剰条件連立一次方程式の利用

通常の境界要素法ではソース点とフィールド点の数は一致しており，生成される連立方程式，式 (10) の行列 $[A]$ は $m \times n$ の正方行列になっている．ただし，m はソース点数，n はフィールド点数を示している．本研究ではソース点を境界の外側にランダムに配置することで特異積分を回避しているが，配置方法によって生成した連立一次方程式の係数行列が特異になる場合があった．そこでソース点の数をフィールド点の数よりも大きくし，過剰条件連立一次方程式として疑似逆行列を用いて連立一次方程式を解くことで係数行列が特異にならないように工夫をした．解放としては，式 (10) の両辺に行列 A の転置をかけ，左辺の解以外の逆行列をかけ疑似逆行列を使用して解を求めた．解は以下のようにあらわされる．

$$\{x\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{b\} \tag{11}$$

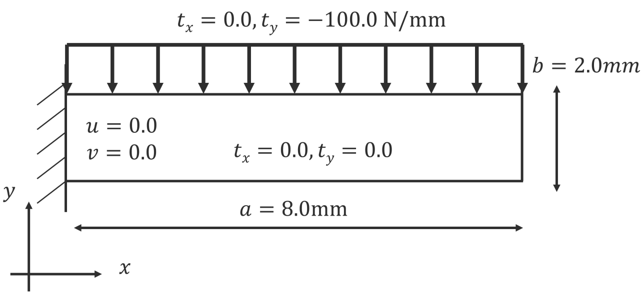
ここで T は行列の転置を表している．

3. 数値解析例

IGABEM において二次元性弾性問題として片持ち梁の曲げの解析を行い，従来型の一定要素 BEM(CONST_BEM) との精度比較を行った．

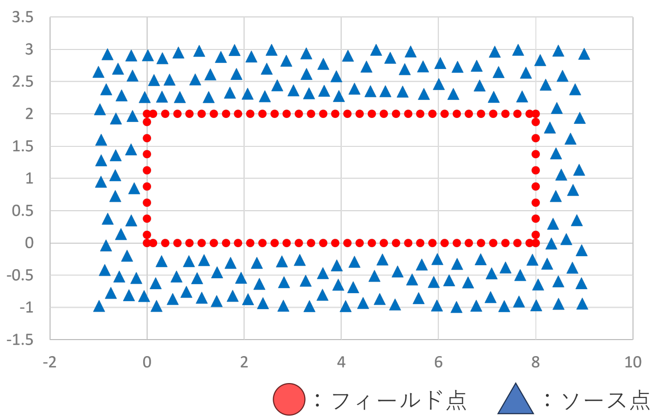
(1) 解析条件

図 3 に解析対称を示す．解析対象は横 8.0mm，縦 2.0mm の片持ち梁であり，上辺に下向き 100.0 N/mm の分布荷重を課した．解析では平面ひずみ状態を仮定し，ヤング率は 206 GPa，ポアソン比は 0.0 とし，数値積分では IGABEM，従来型 BEM ともに 10 点のガウス・ルジャンドル積分法を用いた．参照解として，節点数 5 万程度の詳細な有限要素法解析の結果を用いる．



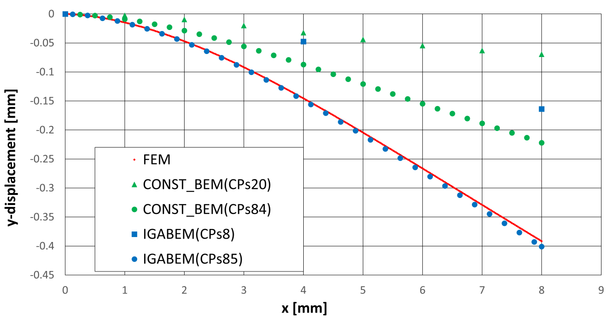
図–3 解析対称

ただし，今回解析解としてのたわみ曲線は中立軸の変位ではなく，それぞれ上辺での変位と比較をしている．また解析条件として，IGABEM と従来型 BEM でそれぞれ 2 通りのフィールド点数で解析を行った．ソース点に関しては，IGABEM では境界の外側に配置することで特異積分の処理をなくしており，従来型 BEM では境界上に配置することで通常と同じ特異積分を実行し解析を行った．またソース点は境界外にランダムに配置しており，その一例を図 4 に示す．図 4 は IGABEM におけるフィールド点 85 点，ソース点 170 点の配置を示している．IGABEM では 3 章で示した overdetermined system を疑似逆行列を用いて連立方程式を解いている．



図–4 フィールド点とソース点の配置

IGABEM と従来型 BEM の数値解析結果と理論解を図 5 に示す．ただし，従来型一定要素 BEM でのフィールド点数 20，84 点の結果をそれぞれ CONST_BEM(CPs20)，CONST_BEM(CPs84) とし，IGABEM でのフィールド点数 8，85 点の結果をそれぞれ IGABEM(CPs8)，IGABEM(CPs85) としている．



図–5 解析結果のたわみ曲線

従来型 BEM と比較して，IGABEM では少ない離散化で理論解に近づく結果となった．しかし，IGABEM での解析結果は詳細な有限要素法と完全には一致しなかった．これは境界要素法特有の問題である，角点の処理を適切に行っていないことにあると考えられる．

4. おわりに

本研究では，IGABEM においてソース点を形状の外側に置くことで特異積分の処理を排除し，解析を行い従来型 BEM との精度比較を行った．ソース点を境界外部に配置して特異積分の処理を不要にした本手法でも，従来型 BEM と比較して同自由度数での精度が高いことが示された．また，ソース点数をフィールド点数より大きくし，過剰条件連立一次方程式とすることで連立一次方程式の係数行列の特異を回避した．

今後は連立方程式が特異になってしまう原因に関する研究を行い，三次元問題への適用を行っていく予定である．

参考文献

[1] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, No.39-41, pp.4135-4195, 2005.
[2] カチカデーリス, J.T.: 境界要素法 –基本と応用-，朝倉書店, 2004.
[3] Simpson, R.N., Bordas, S.P.A., Trevelyan, J., Rabczuk, T.: A two-dimensional Isogeometric Boundary Element Method for elastostatic analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.209-212, pp.87-100, 2012.
[4] Scott, M.A., Simpson, R.N., Evans, J.A., Lipton, S., Bordas, S.P.A., Hughes, T.J.R., Sederberg, T.W.: Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines, *Computational Engineering and Science*, vol.254, pp.197-221, 2013.
[5] Guiggiani, M., Casaline, P.: Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.24, pp.1711-1720, 1987.