計算工学講演会論文集　Vol.29 (2024年6月)　日本計算工学会

アイソジオメトリック解析(IGA) vs アイソパラメトリック解析(IPA)

Isogeometric Analysis (IGA) vs Isoparametric Analysis (IPA)

今村純也[1)]

Junya Imamura

1) 博(工) *imi* 計算工学研究室（〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2-so-net.ne.jp)

This report is part of a research project to apply Helmholtz decomposition (*H-d*) to the finite element method. The equation of *H-d* is applicable to vector field in general and accompanies Coulomb gauge ($div\boldsymbol{\psi}=0$), *i.e.* general solution for $\boldsymbol{\psi}$ and particulars:($div\boldsymbol{\psi}\neq 0$). Accordingly, *H-d* decompose strain vector field $\boldsymbol{\tau}$ using potential $\boldsymbol{\Psi}$, also potential vector field $\boldsymbol{\psi}$ using potentials $\boldsymbol{\lambda}$, and the same way, decompose higher, also lower derivative fields using vector potentials $(\cdots,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\Psi},\cdots)$ and scalar potentials $(\cdots,\upsilon,\varphi,\Phi,\cdots)$. This report discusses regarding relationship between isogeometric analysys (IGA) and isoparametric analysis (IPA), also relationship between derivatives of distributed outer forces and inner forces represented by *H-d*.

Key Words : *Isogeometric Analysis, Isoparametric Analysis, Helmholtz decomposition, NURBS*

1.　はじめに：NURBS は有限要素表示できる？

(1) 有限要素法はTaylor級数法

アイソジオメトリック解析（IGA）のNURBS 曲面を，三角形・四辺形の板曲げ(Platte)，或いは平面版(Scheibe)の有限要素の系で再現する．(別報 [1] 参照のこと.）

NURBS は多項式(Taylor 級数)の補間法である．つまり線形関数を取り扱う．

状態方程式を表す正の物理量：温度T×圧力P×密度ρ は，指数関数表示すると都合よいが，非線形なので結局，多項式の有限要素表示法に落ち着く．

そこで，著者は有限要素法を“Taylor 級数法”と解釈している．したがってNURBSは“有限要素表示可能”とするものである．

ラグランジュ(Lagrange) 補間やエルミート(Hermite) 補間は従来から在るが，適用の機会は殆ど無く，Taylor 級数の係数ベクトルをノードパラメータで，直接表示する方法を常用している．(高次要素のノードパラメータ表示法の“コツ”は **[** 付録**]** 参照.）

(2) Helmholtz分解は任意のベクトル場を分解する

本報は，Helmholtz 分解(*H-d*) に基づく連続体理論の有限要素法への適用に関する研究，から派生した“形状入力”に関する考察・提案である．

H-d は任意のベクトル場をポテンシャルφと$\boldsymbol{\psi}$で，Lateral (縦)成分とTransverse(横)成分に分解する．

任意のベクトル場とは，変位ベクトル場・ひずみベクトル場・ポテンシャルベクトル場，などが考えられるが，形状ベクトル場 $\mathbf{X}$ を考える．

ベクトル場 $\mathbf{X}$ を，ポテンシャルルΦと$\boldsymbol{\Psi}$ で分解表示するものである．

粒子で考えれば，Φ は粒跡(particle path)を表し，$\boldsymbol{\Psi}$ は3軸周りそれぞれの粒子自転の，粒子群相互間の影響による，流跡への影響分である．つまり Φ の横ズレ分である．

$\cdots,\nabla^2_{diag}\upsilon=\nabla\varphi,\nabla^2_{diag}\varphi=\nabla\Phi,\nabla^2_{diag}\Phi=\nabla\Theta,\cdots$ で任意のベクトル場を表して行けば，流跡 Φ は$\nabla\varphi,\nabla^2_{diag}\upsilon,\cdots$ で表せる．($\nabla^2_{diag}\upsilon$ は $\nabla\nabla\upsilon$ の 対角成分．)

まり $\mathbf{X}$ は，C1級Φ , C2級φ, C3級 $\upsilon,\cdots$ で表して行ける．

それがNURBS曲線であり，*H-d* に基づくけば，曲面・ソリッドも表せる．

つまり，IGAはアイソパラメトリック解析(IPA)可能である．

ただ，解析目的はC1級要素で十分達せられる，と考えている．

CADの形状表示の要求(審美的要求)は，C2 級・C3 級のスプラインである．(サブパラメトリック要素法の概念と，変位・形状の次数が逆の要求となる：super parametric.）

IPAは，CAD へ適用してもスプライン曲面に留まらず，地層や，皮膚・皮下層・筋肉層・骨層　などの3D 層の表現・解析も可能となる．

(3) IGAの目的

ポテンシャル表示の適合要素はC1 級が要求される．必然的にC1 級要素の適用法検討が，*H-d* に基づく連続体理論の有限要素法への適用に関する研究，の主体となった．

Bスプライン曲線は，C^n 連続が謳い文句である．

IGAはそれら関数による新しい解析法の開発が目的となるが，いまひとつの目的は，CADデータを転用して，形状データ作成ステップを省略する，２つの目的を持つと解釈している．

H-d は C^n 連続な解析・C^n 連続な形状表示，いずれも可能であるが，本報では後者を検討する．

前者はC1要素で解析目的は充分達せられる，とするものである．

離散計算向きに *H-d* のベクトルポテンシャル項 $curl\boldsymbol{\psi}$ を

修正した"離散Helmholtz 分解（*dHd*）法"を提唱しているが，形状表示が検討目的の本報では，スカラーポテンシャル項 $\nabla\varphi$ が主体となり，*H-d*, *dHd* 共に共通である．

（4）桁で解り易く

NURBS曲線とポテンシャル表示の関係は，1Dの桁で曲線（アーチなど）の形状を表す方法で理解できる．（概念が関係付けできる．）

簡単のため，変位自由度は鉛直方向の w のみ考える．

桁の始端・終端位置を決め，複数の中間点（ノード）k に $\{w\}_k$ を与えて折れ線を描く．（制御点と折れ線に相当．）

ポテンシャル φ を＜$d\varphi/dx - w = 0$＞と定義し，φ 曲線を描く．

ただ，局所原点 $\{\varphi\}_0$ の位置は自由なので，始端位置に置き，かつ勾配 ＜$\{d\varphi/dx\}_0 = \{w\}_0$＞ を与えて，$\varphi$ スプラインを順次描いて行く．（$\{d\varphi/dx\}_k = \{w\}_k$）

終端 $\{\varphi\}_m$ の位置は，桁の他端位置に一致させ，かつ，全体を回転すれば，φ 曲線はC1級である．

各点の $\{\varphi\}_k$ は，$\{x\}_k$ に比例して修正する．或いは，等分割点の修正量を，それぞれ配分して行けば，計算負荷は減る．（始端の修正係数 =0，終端は =1，等分割点なら，係数は予め分かっている．）

更に，＜$d^2 v/dx - d\varphi/dx = 0$＞と定義し，$v$ 曲線を同様に描き，同様に修正して行けば，C2級曲線を得る．

上述を連続桁で考えれば，始端・終端直線からの相対変位を中間支持点に与え，せん断力は不連続，モーメント曲線をC0級で，傾角をC1級で，w をC2級で，φ をC3級で描いて行くことになり，それらは更に，剛性分布でコントロールできる．

要するに，区間 m の両端のベクトル：$\{w,\varphi,v,\cdots\}_{m-0}$ と $\{w,\varphi,v,\cdots\}_{m+1}$ を与えれば，当該区間のCn 曲線は描ける．

それら両端ベクトルは parametric に，かつ interactive に決定した NURBS-CAD システムの値で，与え得る．

2.　遷移行列と*H-d* 有限要素法

（1）遷移行列有限要素法

力学の系は一般に，ひずみは不連続で，"変位・応力"が連続である．

したがって混相・混［剛性］の系では有限要素は，状態量ベクトル$\{\boldsymbol{u},\nabla\mathbf{F}\}$（$\{\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{u}\}$ に代えて，変位を $\boldsymbol{u}$，剛性を G，$\nabla\mathbf{F}\equiv \mathrm{G}\nabla\boldsymbol{u}$ として表すベクトル）を遷移行列で表示して行くべきである．（単相も！）

形状関数は＜ $\mathrm{G}=1$ ＞の ［遷移行列］･{ 状態量ベクトル} で表す．（つまり Taylor 級数表示．）

なお，状態量ベクトル（state vector，独：Zustandvektor）で表す遷移行列法の特徴（特長）は，＜ $\mathrm{G}=\infty$ ＞の剛体が，隘路なしに計算可能なことであり，マルチボディダイナミクスは，遷移行列でそのまま計算して行ける．

（2）Helmholtz 分解表示

多少重複説明になるが，Helmholtzの定理は任意のベクトル場 $\mathbf{V}$ をスカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ で，Coulombゲージを制約条件として，式(1)のごとく，Lateral（縦）成分とTransverse（横）成分に分解表示できるとする．[2]

$$\mathbf{V} = \nabla\varphi + curl\boldsymbol{\psi}\ \ (div\boldsymbol{\psi} = 0) \tag{1}$$

本報では $\nabla\varphi$ 項で形状表示し，形状表示には非圧縮/圧縮は関係しないが，解析では非圧縮成分を$\nabla\varphi$ とし，圧縮成分を$\nabla\varphi^C$ として，変位ベクトル場の縦成分 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{L}}$ は，式(2)で表す．

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{L}} = \nabla\varphi + \nabla\varphi^C\ \ (\nabla^1\varphi = 0, \nabla^1\varphi^C \neq 0) \tag{2}$$

ラプラシアン $\nabla^2\varphi$と同様，$\nabla^1\varphi \equiv \{1,1,1\}\cdot\nabla\varphi$ と定義し，以降では $\nabla^3\varphi, \nabla^4\varphi, \cdots, \nabla^n\varphi$ 表示も適用して行く．

＜$\nabla^1\varphi = 0$ ＞ は ＜$\nabla^1\varphi \neq 0$＞の一般解であり，前述のように，圧縮/非圧縮に拘わらず計算して，式(1)や式(2)を表して行く必要がある．

任意のベクトル場を分解表示できるとは，変位ベクトル場 $\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{\Psi}$，ひずみレベルのベクトル場 $\mathbf{V}$，また，ポテンシャルベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ も分解表示できると解釈し，$\nabla\varphi, curl\boldsymbol{\psi}$ 前後の導関数ベクトルを，式形(3)の記号で表して行く．

そのうち，スカラーポテンシャル項に関しては既に述べた．

$$\left.\begin{array}{r}\nabla(\cdots,v,\varphi,\Phi,\Theta,\cdots)\\ curl(\cdots,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Pi},\cdots)\end{array}\right\} \tag{3}$$

Θ は湧き出し（sink）であり，圧力 P は法線応力平均と定義されているので，μ を粘性係数として，$\nabla\mathrm{P} = \mu\nabla\Theta/3$ の関係に在る．

（3）Helmholtz 分解の原始変数表示と非圧縮計算

したがってprimitive variable（原始変数）で，式(1)の変位ベクトル場 $\boldsymbol{u}(\equiv\boldsymbol{\Psi})$，ひずみレベルのベクトル場 $\mathbf{V}(\equiv\boldsymbol{\Pi})$，並びに $\mathbf{V}$ の 導関数レベルのベクトル場 $\mathbf{W}$ を表示すれば，式(4)となる．

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + curl\boldsymbol{\psi}\ \ (div\boldsymbol{\psi} = 0)\\ \mathbf{V} = \nabla\Phi + curl\boldsymbol{u}\ \ (div\boldsymbol{u} = 0)\\ \mathbf{W} = \dfrac{3}{\mu}\nabla\mathrm{P} + curl\mathbf{V}\ \ (div\mathbf{V} = 0)\end{array}\right\} \tag{4}$$

解析では，前述のように，非圧縮計算が必ず要求される．

＜ $\Phi^{\mathrm{C}} - div\boldsymbol{u}^{m-1} \Rightarrow 0, \nabla(\Phi^{\mathrm{C}} - div\boldsymbol{u}^{m-1}) \Rightarrow \mathbf{0}$ ＞を 反復計算：$\boldsymbol{u}^m = \boldsymbol{u}^{m-1} + \Delta\boldsymbol{u}, (\mathrm{m}=0,1,2,\cdots)$ の第１ステップとし，第２ステップで増分（修正量）$\Delta\boldsymbol{u}$を＜$\Delta\boldsymbol{u} + \Phi^{\mathrm{C}} \Rightarrow \mathbf{0}$, $\nabla(\Delta\boldsymbol{u} + \Phi^{\mathrm{C}}) \Rightarrow \mathbf{0}$＞で計算（或いは $\boldsymbol{u}$ の ひずみエネルギー変分計算の制約条件式として計算）して行けば，$\boldsymbol{u}$ に含まれる偽圧縮成分をoffset（相殺）して行ける．

上述スキームでは，流れ場の加速度項も，拡散項の変分項も，いずれもCoulombゲージを満たす．

（4）修正MAC法

C1級の φ およびＰ要素を適用する流れ場の仮想仕事法スキームで，Ｐ要素を時間ステップの中間 $(n+\Delta t/2)$ で計算して行く．

MAC（Marker And Cell）法の縦成分加速度項の計算は，式(5)でＰ要素を計算し，式(6)を加速度項計算の制約式として，$\nabla\varphi^{n+1}$ の増分 $\nabla\Delta\varphi^{n+1}$ を計算して行く．

$$\int_{\Omega}\delta\nabla\mathrm{P}\cdot\left(\nabla p-\frac{\nabla\varphi^{n+1}+\nabla\varphi^{n}}{2\Delta t}\right)d\Omega=0 \qquad (5)$$

$$+\int_{\Omega}\delta\nabla\varphi\cdot(\nabla\Delta\varphi^{n+1}+\Delta t\nabla p)d\Omega=0 \qquad (6)$$

上述は $(\nabla\varphi^{n+1}+\nabla\varphi^{n})$ に 含まれる偽圧縮成分 $\nabla\varphi^{C}$ の offset（相殺）スキームである．

C1級Ｐ要素では，式(5)の計算と同時に式(7)を計算し，式(8)をNavier-Stokes（NS）方程式の拡散項計算の制約条件式として，式(6)と共に計算して行く．

$$\int_{\Omega}\delta\nabla^{2}\mathrm{P}\cdot(p-\nu\nabla^{2}\varphi)d\Omega=0 \qquad (7)$$

$$+\int_{\Omega}\delta\nabla^{2}\varphi\cdot(\nu\nabla^{2}\Delta\varphi^{n+1}+p)d\Omega=0 \qquad (8)$$

よって，速度・速度勾配，いずれも弱形式ではあるが，Coulombゲージを満たす．

（5）C^{n} 連続要素

目的とする形状は，スカラーポテンシャルで表示（描画）する．（スプライン曲線は φ で表す．曲線群で曲面を表示．）

既に述べたが，$\nabla\varphi$ が連続なら，φ 要素はC1級である．

$\nabla\nabla\upsilon$ が連続なら，υ 要素はC2級であり，形状（スプライン曲線群）はスカラーポテンシャル υ で描画する．

同様にして，階数を遡ってポテンシャルを定義して行けば，C3級要素，・・・，Cn 級要素が，定義したポテンシャルで表せ，それらポテンシャルで描画できる．

（6）ゆがみパラメータ項の計算

C1級要素では，$\nabla_{n}\varphi$ を要素間境界への法線方向勾配とすれば，$\nabla_{n}\varphi$ が要素辺，或いは稜に沿って連続，が条件である．

したがって，頂点ノードパラメータに $\{\nabla_{n,s}\varphi\}_{k}$ を含む必要がある．つまり，三角形要素であっても，ゆがみパラメータ$\{\varphi^{(11)}\}_{k}$ を含む．

辺・稜に沿って $\nabla_{n,s}\varphi$ を安定させるために，各辺に沿って $\int_{\partial\Omega}\nabla_{n,s}\varphi\partial\Omega\Rightarrow 0$ を$\{\varphi^{(11)}\}_{k}$ で変分する．

要素内積分形では $\int_{\Omega}\varphi^{(11)}d\Omega\Rightarrow 0$ である．

上述は要素ごとに計算して，$\{\varphi^{(11)}\}_{k}$ を消去できる．

或いは$\{\varphi^{(11)}\}_{k}$ を，当該頂点ノードで，要素間で共有（等値）し，連立方程式で満たして行く．（後者の板曲げ計算例は厳密解と，高度に一致する．）

C2級要素では＜$\nabla\nabla\upsilon\Rightarrow\mathbf{0}$＞で，ノードパラメータ成分$\{\nabla\nabla\upsilon\}_{k}$ を，同様に消去して行けば，NURBSを有限要素で再現できる．ただ，解析はC1級で十分応え得る，とした．

したがってCADシステムの描画に，IPAシステムのC1描画を重ね書きし，必要に応じて有限要素を2分割，3分割すれば解析目的に十分適う．

3.　スカラーポテンシャルによるスプライン曲線・曲面

（1）スプライン曲線

はじめに述べた，曲げ剛性 $\mathrm{G}=1$ の連続桁で表示する．

桁の，棒としての伸縮変位 u は＜$u=\varphi^{(1)}$＞で表し，C1級棒要素（φ 要素）のノードパラメータは $\{\varphi^{(1)}\}_{k}$ で表す．

たわみもポテンシャル表示＜ $w=\varphi$ ＞し，通常の連続桁としてノードパラメータ値を与え，たわみを表示すれば，C1 連続スプライン曲線を得る．

それを形状データとすれば，3D曲線の連続桁解法は確立している．[3] ～[5]

（2）スプライン曲面

桁曲げ同様，板曲げで表示できる．面内変位はScheibeの φ で 表す．（前掲 [1] ）

NURBSによる板曲げ解法[6]に比べ，格段に容易である．

（3）1D要素，2D三角形要素・四辺形要素・五辺形要素

1Dのn 階連続要素は(2n+1)次の要素で，両端に(n+1)数のノードパラメータを有す．

2Dの三角・四辺形要素は，辺上1Dの関数が，頂点のノード上で回転するので，回転行列(n+1)×(n+1)数のノードパラメータを有す．

2D五辺形要素は、四辺形要素から部分的に三角形面積を欠くので，四辺形要素の頂点ノードの一つを$\{\varphi^{(11)}\}_{0}$で表し，そのノードを共有する三角形 $\varphi^{(11)}$ 要素を重ねる．

三角形面積内の $\varphi^{(11)}$ 分布を，共有する$\{\varphi^{(11)}\}_{0}$の自由度で，数値的にゼロ分布として行けば，三角形要素の残り2頂点ノードパラメータが，五辺形要素のノードパラメータとなる．

4.　ま と め

NURBS は多項式の補間法であるから，同じくTaylor級数法であるCn 級有限要素で表示可能な筈である．

NURBS-CADシステムは，parametric に，かつ interactive にCn連続な形状を作図する．

有限要素のノードパラメータを出力するよう機能追加すれば，有限要素法の形状データとして，そのまま使える．

形状データが精密であれば，要素細分割計算可能な有限要素法では，C1級要素解法で対応できる，とした．

謝辞: Helmholtz分解の有限要素法への適用の研究に関し，長年慶應義塾大学名誉教授　棚橋隆彦先生にアドバイスを頂いた．記して感謝の意を表します．

付録: 高次要素のノードパラメータ表示による計算法

有限要素の関数の係数ベクトルをノードパラメータ表示するには，三角形要素の例では，ノードパラメータベクトル$\{\varphi_k\} \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ を，先ず要素関数で表す．

つまり係数ベクトルを$\{\varphi^{(ij)}\}_0 \equiv \{\varphi^{(00)}, \varphi^{(10)}, \varphi^{(01)}\}_0$として，行列 $[\mathbf{A}]$ を介し，$\{\varphi_k\} = [\mathbf{A}] \cdot \{\varphi^{(ij)}\}_0$ で表す．

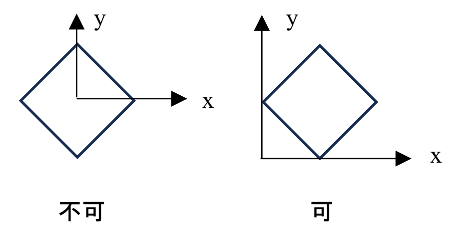
次いで，$[\mathbf{A}]^{-1}$ を計算して，$\{\varphi^{(ij)}\}_0 = [\mathbf{A}]^{-1} \cdot \{\varphi_k\}$で表せばよい．

ただし，要素重心を局所原点として $[\mathbf{A}] \cdot \{\varphi^{(ij)}\}_0$ を 表したのでは，高次要素では $[\mathbf{A}]^{-1}$ は計算できない．

そこで，要素を第 I 象限に置くよう，局所原点を設定して計算すれば，$[\mathbf{A}]^{-1}$ は確実に計算できる．

上述は高次要素に限らず，低次のC^0要素でも，菱型要素の$[\mathbf{A}]^{-1}$ は計算できない．（第 I 象限に置けば計算できる．）

上述の知見は，高次要素法を可能とする第 1 歩である．



参考文献

[1] 今村: 重調和関数方程式の解法 / 新しい板曲げスキーム，並びに（適合化/アイソレート化）ノード法，Locking-free要素，計算工学講演会2024，Vol.29 (2024).

[2] 例えば：数学ハンドブック，丸善, pp.258, 1960.

[3] Falk, S. : Die Berechnung offener Rahmentragweken nach dem Reduktiosverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.61-80.

[4] Falk, S.: Die Berechnung geschlossener Rahmen-tragweken nach dem Reduktiosverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.96-109.

[5] R. Kersten著，伊藤学訳: 構造力学における還元法, 技法堂, (1968).

[6] L. Beirão Da Veiga, T. J. R. Hughes, et al.: A locking-free model for Reissner-Mindlin plates: Analysis and isogeometric implementation via NURBS and triangular NURPS, World Scientific, (2015).

[7] 小紫誠子: 多方向上流差分を用いた 2 次元バーガース方程式の数値計算，第 23 回数値流体力学シンポジウム，[E5-3]，2009.

[8] 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論，培風館，1972.

[9] Martine, H.C. and Carey, G.F.: 有限要素法の基礎と応用，（鷲津久一郎，山本善之共訳），培風館，1979.