

産業用機器における材料定数同定問題とその解法

Material Constant Identification Problem in Industrial Equipment and Its Solution

竹内謙善¹⁾福原颯²⁾平手利昌³⁾

Kenzen Takeuchi, So Fukuhara and Toshiaki Hirate

¹⁾香川大学創造工学部（〒 760-8521 香川県高松市幸町 1-1, E-mail: takeuchi.kenzen.u8@kagawa-u.ac.jp）

²⁾香川大学創造工学部（〒 760-8521 香川県高松市幸町 1-1, E-mail: s22g213@kagawa-u.ac.jp）

³⁾東芝産業機器システム株式会社（〒 510-8101 三重県三重郡朝日町繩生 2121, E-mail:toshiaki.hirate@toshiba.co.jp）

In order to perform finite element analysis of industrial equipments such as motors and transformers, it is necessary to identify some material constants. This paper deals with the problem of identifying the material constants of iron cores used in motors based on a small number of experimental results. The problem is formulated as an optimization problem and several solution methods are applied. These solution methods are compared from the perspective of practicality.

Key Words : Identification Problem, Newton Method, Surrogate Method

1. はじめに

産業用機器の設計において有限要素解析は欠かせないツールであるが、精度の良い解析結果を得るために解析に使用される材料定数を正確に設定する必要がある。一般的な線形等方性材料であれば単純な材料試験の結果に基づいてヤング率とポアソン比を同定することは比較的容易であるが、非線形材料や異方性材料の場合にはパラメータの数が多くなって同定に要する工数が問題となる。本研究ではモーター等に使用される積層鉄心の材料定数同定問題を取り上げて、それを最適化問題として定式化し、二つの解法を適用して比較検討を行った。

2. 積層鉄心の材料定数同定問題

モーター、発電機、変圧器に使用される鉄心は 1[mm] オーダーの薄い電磁鋼板を多数積層した構造になっている。それぞれの電磁鋼板の表面には絶縁被膜が形成されており、電磁鋼板は互いに電気的に絶縁された状態で積層されている。このように鉄心を積層構造にすることで、渦電流損を低減させて機器の効率を向上させることができる。このように、鉄心の積層構造は電気的には本質的に有用な構造であるものの、力学的な観点では等方均質な鋼材とは全く異なる構造物として解析する必要がある。実際、鉄心の振動特性は等方均質な鋼材として予測されるものとは全く異なることが経験上分かっている。

そこで、実際の積層鉄心やその一部を模擬した実験モデルを使って加振試験を行って、いくつかの固有振動数を計測し、有限要素解析でそれらを再現するように材料定数を同定することが試みられている [1]。

3. 最適化問題の定式化

鉄心を構成する積層構造は積層方向を主軸とする直交異方性材料としてモデル化される。直交異方性材料の剛性を決定付ける材料定数は、綫弾性係数 3 成分、せん断弾性係数 3 成分、ポアソン比 3 成分の合計 9 成分である。これらのパラメータが設計変数となる。本稿では、設計変数を \mathbf{x} とし、その各成分を $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ と表記する。一つの有限要素モデルの中で複数の材料を同時に同定する場合もあるので、一般的に n は 9 の整数倍である。

実験モデルを用いた加振試験によって得られた m 個の固有振動数を本稿では目標値と呼ぶこととし、これをベクトル $\bar{\mathbf{f}}$ と表記する。その各成分は $\bar{f}_i, i = 1, 2, \dots, m$ とする。有限要素解析を行った結果得られる固有振動数を本稿では評価関数と呼ぶこととし、これを $J(\mathbf{x})$, $f_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, m$ とする。この時、誤差ベクトル $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{f}}$ を最小化するために、以下のような最適化問題が定義できる。

$$\begin{aligned} & \text{find} && \mathbf{x} \\ & \text{minimize} && J(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ & \text{subject to} && \mathbf{x} \in X \\ & && a(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r) = (2\pi f_r)^2 b(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r), \forall \mathbf{v}_r, \\ & && r = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $J(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ は目的関数、 X は設計変数の許容集合である。 $\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r$ は、 r 番目の固有振動数に対応する固有振動モードとそれに対応する試験関数である。また、 $a(\cdot, \cdot)$ と $b(\cdot, \cdot)$ は次式で定義される。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \int_{\Omega} D(\mathbf{x})_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} d\Omega \quad (2)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \int_{\Omega} \rho u_i v_i d\Omega \quad (3)$$

ここで、 Ω は解析領域、 $D(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} に対応する剛性テンソル、 ρ は質量密度を表す。

式(1)に現れる固有方程式は有限要素法によって離散化されて解くことができるが、試行回数を多くとることは実用性の観点で現実的ではない。

4. 最適化問題の解法

以上で述べた最適化問題に対して、主に二つの解法について述べる。

(1) ニュートン法に基づく解法

固有振動数が設計変数に対して一階微分可能だとすると、次式のような行列を計算することができる。

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

この行列の計算には随伴変数法が使用される。数値微分を使用すると固有方程式の解析を設計変数に比例する回数だけ行う必要があるが、随伴変数法を使用することで1回の固有方程式の解析と付加的な演算だけでこの行列を計算することができる[2]。

設計変数を適当な初期値として行列 \mathbf{G} を求めれば、次式を解くことで設計変数を更新することができる。

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_{\text{new}} - \mathbf{x}_{\text{old}}) = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_{\text{old}}) \quad (5)$$

これは、非線形連立方程式の解法としてのニュートン法に相当する。しかしながら、一般的に $m \neq n$ のので \mathbf{G} の逆行列は存在しない。そこで一般化逆行列を使って更新する。 $m > n$ の場合には次式を用いる。

$$\mathbf{x}_{\text{new}} = \mathbf{x}_{\text{old}} - (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\text{old}}) \quad (6)$$

$m < n$ の場合には次式を用いる。

$$\mathbf{x}_{\text{new}} = \mathbf{x}_{\text{old}} - \mathbf{V} \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{V} \mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\text{old}}) \quad (7)$$

ただし、 \mathbf{W}, \mathbf{V} はそれぞれ適当な正定値行列である。

なお、式(6)は、目的関数を次式のように定義し、ガウス・ニュートン法を適用した場合の更新式と一致する。

$$J(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{W} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

ここで述べた手法は、最適解に近い初期値からスタートできれば少ない試行回数で最適解に収束するものと考えられる。

(2) サロゲート法に基づく解法

微分情報を利用しない、汎用的な解法としてサロゲート法に基づく解法も利用されている[1]。一般的に、微分情報を利用しない最適化手法は試行回数が多くなって計算コストの面で不利になるが、サロゲート法により固有振動数を近似することで試行回数を極力抑制することができる。

本手法では、満足化トレードオフ法に基づいた次式で示される目的関数を用いる。

$$J(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \equiv \max_i \left(\frac{|g_i(\mathbf{x})| - A_i}{A_i - I_i} \right) \quad (9)$$

表-1 固有振動数

	Freq.[Hz]
mode1	290.7
mode2	794.2
mode3	1029.

ここで、 $A_i, i = 1, 2, \dots, m$ は希求水準、 $I_i, i = 1, 2, \dots, m$ は理想点を表す。

このような目的関数は設計変数に対して微分不可能なのでニュートン法に代表されるような微分情報を必要とする解法には適さないが、微分情報を利用しない本手法では採用できる。式(8)のような目的関数を採用することも可能であるが、正定値行列 \mathbf{W} を適切に選ばないと設計者の意図した解が得られないこともあるのに関わらず、正定値行列 \mathbf{W} を予め適切に選ぶことが難しいという問題がある。それに対して、満足化トレードオフ法では、設計者の意図に応じて希求水準や理想点を比較的容易に調整できるメリットがある。

サロゲート最適化手法では、事前の k 回の解析によって得られた固有振動数 $f(c_i), i = 1, 2, \dots, k$ を使って、固有振動数を次式で近似する。

$$f(\mathbf{x}) \approx \hat{f}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^k w_i \exp \left\{ \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|_2}{r_i} \right\}^2 \quad (10)$$

ここで、重み係数 $w_i, i = 1, 2, \dots, k$ の各成分は、 $f(\mathbf{c})$ と $\hat{f}(\mathbf{c})$ の二乗誤差が最小となるように決定される。

ここで近似された固有振動数に対して遺伝的アルゴリズムを使って最適解を探索する。得られた最適解について実際に固有振動解析を行って、そこで得られた固有振動数を加えて近似式を再構築する。本手法ではこのような操作を繰り返すことによって近似精度を向上させながら最適解を探索していく。

5. 解析例

積層鉄心を模擬した有限要素モデルに対して、先に述べた二つの解法を適用し比較検討した。実務では同じ寸法の実験用モデルを準備して、実験により固有振動数を計測することになるが、本研究では予め用意した材料定数を設定して有限要素解析を行って固有振動数を求め、その値を「正解」とした。その「正解」の固有振動数が得られるように材料定数を同定した。

図-1に有限要素モデルを示す。このモデルでは18箇所にボルト締結部がモデル化されている。ボルト締結部以外の部分は直交異方性材料が設定されており、その材料定数9成分が設計変数である。表-1に「正解」の固有振動数を示す。この表において mode1 は上下曲げ1次モード、mode2 は上下曲げ2次モード、mode3 は水平曲げ1次モードである。図-2にこれらの固有振動モードの変形図を示す。

この問題に対して、ニュートン法を初期値を変えて2回、サロゲート法をアルゴリズムの過程で使用する乱数のシード値を変えて2回、それぞれ適用して結果を比較した。ニュートン法は繰り返し回数10回とし

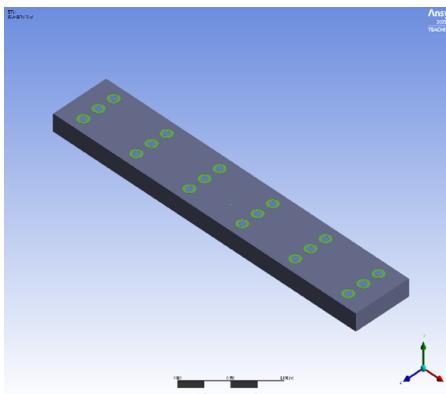


図-1 有限要素モデル

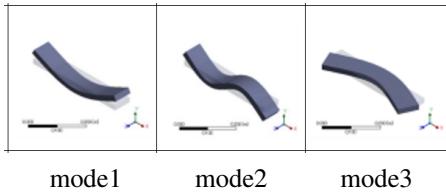


図-2 固有振動モード

表-2 誤差率比較

	N.1[%]	N.2[%]	S.1[%]	S.2[%]
mode1	0.80	3.1E-9	0.94	0.11
mode2	0.80	2.0E-9	0.73	0.85
mode3	0.78	1.9E-9	1.04	0.12

た。サロゲート法は初期サンプリング回数30回、最適化繰り返し回数300回の合計330回の試行回数とした。

それぞれの解法で得られた材料定数における固有振動数と「正解」の固有振動数の誤差率を表-2に示す。この表において、N.1とN.2はニュートン法の1回目と2回目を表しており、S.1とS.2はサロゲート法の1回目と2回目を表している。

これによると、いずれの場合でも最大で1%程度の誤差で固有振動数を一致させることに成功している。これは十分実用的な精度だと言える。ただし、ニュートン法の場合は初期値によって結果にばらつきがあり、1回目では1%程度の誤差が残ったが、2回目では極めて高い精度で固有振動数が一致している。ニュートン法は収束性能が高いことが知られており、適切な初期値を選ぶことができれば少ない繰り返し回数で精度の高い最適解が得られる可能性が示唆される。

予め設定された材料定数と、それぞれの解法で得られた材料定数の比較を表-3に示す。この表において、Ans.は予め設定された材料定数、N.1, N.2, S.1, S.2は、表-2と同様である。 E_x, E_y, E_z は縦弾性係数、 $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$ はポアソン比、 G_{xy}, G_{yz}, G_{xz} は横弾性係数である。この表を見ると、それぞれの材料定数が大きく異なるにも

表-3 材料定数比較

	Ans.	N.1	N.2	S.1	S.2
$E_x[\text{GPa}]$	51.3	51.9	51.1	49.1	50.6
$E_y[\text{GPa}]$	51.3	207.	152.	11.3	223.
$E_z[\text{GPa}]$	51.3	206.	151.	298.	49.7
ν_{xy}	0.30	0.31	0.27	0.15	0.15
ν_{yz}	0.30	0.30	0.27	0.11	0.34
ν_{xz}	0.30	0.28	0.26	0.30	0.37
$G_{xy}[\text{GPa}]$	19.7	19.2	20.1	99.5	86.9
$G_{yz}[\text{GPa}]$	19.7	79.1	60.0	13.3	90.5
$G_{xz}[\text{GPa}]$	19.7	20.2	20.0	87.9	24.7

関わらず、表-2に示すように固有振動数は所望の値と正確に一致していることが分かる。このことから、この最適化問題は最適解が一意に定まらない問題であったことが分かる。

最適解を一意に定めるためには問題設定に何らかの工夫が必要である。しかしその一方で、最適解が一意に定まらない問題であっても現実的な計算コストで複数の最適解が得られたことは実用性の観点では意義深い成果だと言える。初期値あるいは乱数のシード値を変えて最適化解析を複数回実行して最適解を比較するだけで最適化問題の解の一意性を確認することができる。その結果に基づいて設計者は最適化問題をより適切な方向に修正することが可能となる。

6. おわりに

本研究ではモーター等に使用される積層鉄心の材料定数同定問題を取り上げて、目的関数を複数の固有振動数の誤差として最適化問題を定式化した。その最適化問題に対して、特性の異なる二つの解法を適用した。ニュートン法は目的関数に微分可能性が要求されることと初期値に対する依存性があるものの少ない試行回数で精度の高い最適解が得られる可能性が示唆される。サロゲート法はニュートン法よりも多くの試行回数が必要であるが十分実用的と言える。また、サロゲート法では目的関数の微分可能性を必要としないことがメリットとなり得る。

解析例では、最適解が一意に定まらない問題であることが示唆された。最適解を一意に定めるための手法については今後の課題としたい。

参考文献

- [1] 一文字正幸, 見村勇樹, 池田和徳, 永田寿一, 平手利昌, 平井匡平, 平野俊夫, 渕本遼, 塩飽宣貴, 荒川雅生, 多目的最適化手法を用いた構造物の動的問題における実験同定, 日本機械学会論文集, Vol.83, No.853, 2017
- [2] Fukuhara, S., Hirate, T., Takeuchi, K. and Arakawa, M., Identification Method for Material Constants of Industrial Equipment Based on the Adjoint Variable Method, Asian Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022