計算工学講演会論文集 Vol. 29 (2024 年 6 月)　日本計算工学会

H^1 型勾配法を用いた弾性波動方程式の係数同定問題に対する数値再構成手法

Numerical method for the coefficient identification problem in a linear elastic wave equation by H^1 type gradient method

代田健二 1)
Kenji Shirota

1)博 (理) 愛知県立大学 情報科学部 教授（〒 480-1189 愛知県長久手市茨ヶ廻間 1522 番 3, E-mail: shirota@ist.aichi-pu.ac.jp)

The purpose of this research is to produce the numerical method based on the H^1 type gradient method for the problem of Lamé coefficients identification in a linear elastic wave equation. Our inverse problem is to idenfity the unknown Lamé coefficients form the measured displacement on inner domain of the elastic body, and the surface traction on a part of the boundary. In order to solve numerically our inverse problem, we propose the iteration method based on topology optimization of a density type. The direct and inverse problem of the density type are introduced by using the density type Lamé coefficients which are defined as the composition of the given sigmoid and unknown control functions. The unknown coeffieints are identified approximately by finding the control functions. We introduce a cost functional with control functions by using given measured data, and then, a unconstrained minimizing problem is produced. We apply the H^1 type gradient method to solving our minimizing problem.

Key Words : *Lamé coefficients identification, Linear elastic wave equation, Toplogy optimization, H^1 type gradient method, Measured data on subdomain and boundary*

1.　はじめに

本研究では，弾性波動方程式の係数同定問題に対する数値解法について考察する．著者は，スカラー波動方程式，線形弾性波動方程式の係数同定問題 [1,2]，そして実用問題である鉄とコンクリートの合成梁に対する欠陥同定問題 [3] に対して，一定精度で同定可能な数値解法を研究・開発してきた．これらの研究では，変分法的定式化により元の係数同定問題を観測データを用いた制約条件付き最小化問題へと変換し，その問題を数値的に解くための射影勾配法を用いたアルゴリズムを導出，そして数値実験により一定精度で同定可能であることを示した．一方，観測データに確率的な誤差が含まれている場合やモデル化誤差が含まれる実測データに対しては，安定かつ一定精度の数値解を得ることができず，実用問題への適用に課題を残す結果となった．

一方，著者は，機械部品等の数理的設計分野で近年盛んに研究されている密度型位相最適化問題 [4] に対して研究を実施し，高精度解法と多倍長計算環境の組み合わせによる高精度手法を提案した [5]．密度型位相最適化問題の数理モデルは，適当に滑らかな関数を係数とする偏微分方程式に対する係数同定問題として表される．そのため，離散化・丸め誤差の影響により，最急降下法などの非線形計画法を適用すると数値不安定現象が発生する．この問題に対して畔上は，数値的に安定かつ理論的にも一定の裏付けを持った H^1 勾配法を開発した [6]．そこで著者は，1 次元波動型方程式の係数同定問題に対して H^1 勾配法を拡張した H^2 勾配法を開発し，確率的な観測誤差が含まれる場合についても，安定かつ一定精度で同定可能なことを示した [7]．さらに開発手法を，スカラー波動方程式の係数同定問題，内部観測データを伴った線形弾性波動方程式のラメ係数同定問題へ応用し，一定の成果を得ることができた [8,9]．

しかし，問題によっては十分な範囲の内部観測データを得られる保証はなく，その場合，同定精度に影響があることが予想される．そこで本研究では，内部観測データとともに境界観測データが与えられた場合の線形弾性波動方程式に対するラメ係数同定問題について考察する．ここで弾性体 Ω は，線形かつ等方的であると仮定する．さらに，$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$ を有界なリプシッツ領域 [10] とする．$\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}}$ を変位ベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\varepsilon_{ij})$ をひずみテンソル，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = (\sigma_{ij})$ を応力テンソルする．変位–ひずみの関係式，応力–ひずみの関係式は，それぞれ次が成り立っているとする．

$$\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}),$$
$$\sigma(\boldsymbol{u}) = 2\mu\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \lambda\,\mathrm{tr}\,(\varepsilon(\boldsymbol{u}))\,I_n$$

ここで，$\nabla \boldsymbol{u} = (u_{i,j})$，‘$_{,j}$’ は $\partial/\partial x_j$，‘tr’ は行列のトレース，I_n は n 次単位行列であり，λ, μ はラメの弾性係数である．このとき，支配方程式および初期値・境界値は，次のとおりに与えられていると仮定する．

$$\begin{cases} \rho\partial_t^2 \boldsymbol{u} &= \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_0,\ \partial_t \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{v}_0 & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{g} & \text{on } \Gamma_D \times (0, T), \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{q} & \text{on } \Gamma_N \times (0, T). \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\partial_t := \partial/\partial t$ であり，$\boldsymbol{n}$ は境界上の外向き単位法線方向ベクトルである．$\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$，$\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$,

$\boldsymbol{g} \in C([0,T];\ \boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma_D))$, $\boldsymbol{q} \in C([0,T];\ \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma_N))$, $\boldsymbol{f} \in C([0,T];\ \boldsymbol{L}^2(\Omega))$ は与えられた関数である．また，$\rho \in L^\infty(\Omega)$ は密度，$T > 0$ は観測時間の長さである．ラメの弾性係数 $\lambda, \mu \in L^\infty(\Omega)$ は，場所にのみ依存するとし，

$$0 < C_\lambda^{(1)} \le \lambda(\boldsymbol{x}) \le C_\lambda^{(2)},\ 0 < C_\mu^{(1)} \le \mu(\boldsymbol{x}) \le C_\mu^{(2)} \tag{2}$$

を満たすものとする．ただし，$C_\lambda^{(\ell)}, C_\mu^{(\ell)}$ $(\ell = 1,2)$ は与えられた正定数である．Γ_D，Γ_N は Ω の境界の一部であり．$\Gamma_D \cup \Gamma_N$ が Ω の境界と一致し，$\Gamma_D \neq \emptyset$，$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ を満たすものとする．このとき，与えられた関数に対して境界付近に一定の状況を課し，領域および境界に関しても制約を課すことで，順問題の適切性は理論的に保証される．

弾性波動場における逆問題については，様々な問題が考察されており，それらに対する数値解法についても研究されている [11,12]．本研究では，次のような内部および境界観測データが与えられているラメ係数同定問題を対象とする．$\omega \subseteq \Omega$ を与えられた部分領域とする．内部観測 $\overline{\boldsymbol{u}} \in C([0,T]; \boldsymbol{H}^1(\omega))$，境界観測 $\overline{\boldsymbol{q}} \in C([0,T]; \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma_D))$ が与えられているとき，次の係数同定問題を考察する．

ラメ係数同定問題

与えられた変位 $\boldsymbol{u}|_{\omega\times(0,T)} = \overline{\boldsymbol{u}}$，表面力 $\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_{\Gamma_D\times(0,T)} = \overline{\boldsymbol{q}}$ よりラメの弾性係数関数 $\lambda(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x})$ を同定せよ．

内部観測データによるラメ係数同定問題に対する数値解法として，著者は H^1 型解法を応用した手法を開発した [13]．本研究では，その手法を応用することで，ラメ弾性係数同定問題に対する数値解法を導出する．

2. H^1 型解法によるラメ係数同定

本研究で用いる H^1 型解法は，完備な内積空間，すなわちヒルベルト空間上での勾配法を基礎としている．そのため，係数関数はヒルベルト空間に属することを仮定する必要がある．そこで本研究において係数関数は，L^∞ 空間ではなく L^∞ 空間に連続的に埋め込まれる $H^2(\Omega)$ に属することを仮定し，$H^2(\Omega)$ 内で同定することを考察する．

H^1 型解法は，密度型位相最適化問題に対して開発された方法であるため，元の係数同定問題を密度型へと変換する必要がある．そのため，本研究においても密度型ラメ係数関数を導入することで密度型係数同定問題を定義する．

$\phi_\lambda, \phi_\mu \in C^1(\mathbb{R})$ を

$$0 \le \phi_\lambda(\xi) \le 1,\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \le \phi_\mu(\zeta) \le 1,\ \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

を満たす関数とする．このとき，設計変数関数 $\theta, \zeta \in H^2(\Omega)$ を用いて，密度型ラメ係数関数を次のとおりに定義する．

$$\widetilde{\lambda}(\theta) = (C_\lambda^{(2)} - C_\lambda^{(1)})\phi_\lambda(\theta(x)) + C_\lambda^{(1)},$$
$$\widetilde{\mu}(\zeta) = (C_\mu^{(2)} - C_\mu^{(1)})\phi_\mu(\zeta(x)) + C_\mu^{(1)}$$

導入された密度型ラメ係数は，$\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu} \in H^2(\Omega)$ であり，制約条件 (2) を満たす．

この密度型係数関数を用いて，元の係数同定問題を次のとおりに密度型へと変換する．

密度型ラメ係数同定問題

与えられた変位 $\boldsymbol{u}|_{\omega\times(0,T)} = \overline{\boldsymbol{u}}$，表面力 $\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_{\Gamma_D\times(0,T)} = \overline{\boldsymbol{q}}$ より設計変数関数 $\theta, \zeta \in H^2(\Omega)$ を同定せよ．

この問題は，元の問題とは違い，属する関数空間以外に制約条件が課されていない．

密度型逆問題を解くため，次の汎関数を導入する．

$$\begin{aligned} J(\theta,\zeta) &= \widetilde{J}(\widetilde{\lambda}(\theta), \widetilde{\mu}(\zeta)) \\ &:= \frac{\|\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}(\theta), \widetilde{\mu}(\zeta)] - \overline{\boldsymbol{u}}\|^2_{\omega\times(0,T)}}{\|\overline{\boldsymbol{u}}\|^2_{\omega\times(0,T)}} \\ &\qquad + \frac{\|\sigma(\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}(\theta), \widetilde{\mu}(\zeta)]) - \overline{\boldsymbol{q}}\|^2_{\Gamma_D\times(0,T)}}{\|\overline{\boldsymbol{q}}\|^2_{\Gamma_D\times(0,T)}}. \end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}(\theta), \widetilde{\mu}(\zeta)]$ は，ラメ係数関数 $\widetilde{\lambda}(\theta), \widetilde{\mu}(\zeta)$ が与えられたときの (1) の解であり，

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\omega\times(0,T)} := \int_0^T \int_\omega |\boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$
$$\|\boldsymbol{q}\|^2_{\Gamma_D\times(0,T)} := \int_0^T \int_{\Gamma_D} |\boldsymbol{q}|^2 \,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

である．汎関数 J の最小化関数により，設計変数を同定する．最小化関数を同定する方法としては，抽象勾配法を用いる．そのため，汎関数 J の導関数が必要となる．

汎関数 J の導関数は，次のとおりに求めることができる．

$$\langle \frac{\partial J}{\partial \theta}, h_\theta \rangle = \langle (C_\lambda^{(2)} - C_\lambda^{(1)}) \frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}\theta}(\theta) \frac{\partial \widetilde{J}}{\partial \lambda}, h_\theta \rangle,\ \forall h_\theta \in H^2(\Omega),$$
$$\langle \frac{\partial J}{\partial \zeta}, h_\zeta \rangle = \langle (C_\mu^{(2)} - C_\mu^{(1)}) \frac{\mathrm{d}\phi_\mu}{\mathrm{d}\zeta}(\zeta) \frac{\partial \widetilde{J}}{\partial \mu}, h_\zeta \rangle,\ \forall h_\zeta \in H^2(\Omega).$$

ただし，

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \widetilde{J}}{\partial \lambda}(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}), h_\lambda \rangle &= \int_\Omega \left(\int_0^T \mathrm{tr}\,(\varepsilon(\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}]))\mathrm{tr}\,(\varepsilon(\boldsymbol{v}))\,\mathrm{d}t \right) h_\lambda \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \partial_t \boldsymbol{U}[h_\lambda, 0](T) \cdot \boldsymbol{w} \,\mathrm{d}x,\ \forall h_\lambda \in H^2(\Omega), \\ \langle \frac{\partial \widetilde{J}}{\partial \mu}(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}), h_\mu \rangle &= \int_\Omega \left(2 \int_0^T \varepsilon(\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}]) : \varepsilon(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t \right) h_\mu \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \partial_t \boldsymbol{U}[0, h_\mu](T) \cdot \boldsymbol{w} \,\mathrm{d}x,\ \forall h_\mu \in H^2(\Omega). \end{aligned}$$

ここで，$:$，$\cdot$ はそれぞれ行列，ベクトルの内積であり，$\boldsymbol{v}$ は次の随伴問題の解である．

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \boldsymbol{v} = \mathrm{div}\,\sigma(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{p} & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \boldsymbol{v}(T) = \boldsymbol{w},\ \partial_t \boldsymbol{v}(T) = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{v} = \dfrac{2\,(\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} - \overline{\boldsymbol{q}})}{\|\overline{\boldsymbol{q}}\|_{\Gamma_D\times(0,T)}} & \text{on } \Gamma_D \times (0,T), \\ \sigma(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & \text{on } \Gamma_N \times (0,T). \end{cases} \tag{3}$$

ただし，

$$\boldsymbol{p} = \begin{cases} \dfrac{2(\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}] - \overline{\boldsymbol{u}})}{\|\overline{\boldsymbol{u}}\|^2_{\omega\times(0,T)}} & \text{in } \omega \times (0, T) \\ \boldsymbol{0} & \text{in } (\Omega \setminus \overline{\omega}) \times (0, T) \end{cases}$$

であり，$\boldsymbol{w}$ は境界値問題

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,\sigma(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{w} = \dfrac{2\left(\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}(T) - \overline{\boldsymbol{q}}(T)\right)}{\|\overline{\boldsymbol{q}}\|_{\Gamma_D\times(0,T)}} & \text{on } \Gamma_D, \\ \sigma(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & \text{on } \Gamma_N \end{cases}$$

の解である．また，$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}[h_\lambda, h_\mu]$ は，初期値境界値問題

$$\begin{cases} \rho\partial_t^2\boldsymbol{U} & = \mathrm{div}\,\sigma(\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{r}[h_\lambda, h_\mu] & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \boldsymbol{U}(0) & = \boldsymbol{0},\ \partial_t\boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{U} & = \boldsymbol{0} & \text{on } \Gamma_D \times (0, T), \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{n} & = \boldsymbol{0} & \text{on } \Gamma_N \times (0, T) \end{cases}$$

解である．ただし，

$$\boldsymbol{r}[h_\lambda, h_\mu] = \mathrm{div}\left(2h_\mu\varepsilon(\boldsymbol{U}) + h_\lambda \mathrm{tr}\,(\varepsilon(\boldsymbol{U})I_n)\right).$$

未知の設計変数関数を，次の反復プロセスにより同定する．

$$\begin{pmatrix}\theta_{\ell+1} \\ \zeta_{\ell+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta_\ell \\ \zeta_\ell\end{pmatrix} + \frac{\epsilon_\ell}{\|\boldsymbol{s}\|_{H^2}}\begin{pmatrix}s_\theta^\ell \\ s_\zeta^\ell\end{pmatrix} \quad (\ell = 0, 1, 2, \ldots\ldots).$$

ここで $s_\theta^\ell, s_\zeta^\ell$ は探索方向，$\epsilon_\ell > 0$ は適切に与えられた探索の幅である．探索方向は，次の弱形式の方程式を解くことで得る．

$$a_\theta(s_\theta, \varphi) = -\left\langle \frac{\partial J}{\partial \theta}, \varphi \right\rangle, \quad \forall\varphi \in H^2(\Omega),$$
$$a_\zeta(s_\zeta, \psi) = -\left\langle \frac{\partial J}{\partial \zeta}, \psi \right\rangle, \quad \forall\psi \in H^2(\Omega).$$

ただし，$a_\theta(\cdot,\cdot)$, $a_\zeta(\cdot,\cdot)$ は $H^2(\Omega)$ 上の有界対称かつ強圧的な双一次形式である．Lax-Milgram の定理 [6] より，探索方向は一意に定まる．

探索方向を定める双一次形式を定義する必要があるが，本研究では H^2 勾配法のアイディアを用いる．具体的には，H^2 内積を基礎として，次のとおりに定める．

$$\begin{aligned} &a_\theta(s_\theta, \varphi) \\ &\quad = \alpha_\theta(\nabla^2 s_\theta, \nabla^2\varphi)_{L^2} + \beta_\theta(\nabla s_\theta, \nabla\varphi)_{L^2} + (s_\theta, \varphi)_{L^2}, \\ &a_\zeta(s_\zeta, \psi) \\ &\quad = \alpha_\zeta(\nabla^2 s_\zeta, \nabla^2\psi)_{L^2} + \beta_\zeta(\nabla s_\zeta, \nabla\psi)_{L^2} + (s_\zeta, \psi)_{L^2}. \end{aligned}$$

ここで，$(\varphi, \psi)_{L^2} = \int_\Omega \varphi\psi\,\mathrm{d}x$ であり，$\alpha_\theta, \beta_\theta, \alpha_\zeta, \beta_\zeta$ は与えられた正定数である．これら双一次形式により，各ステップで探索方向を定め，更新することで設計変数を同定し，それにより未知のラメ係数関数を求める．

計算結果については，発表時に示す．

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 23K03236 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Choi, C., Nakamura, G., and Shirota, K.: Variational approach for identifying a coefficient for the wave equation, *Cubo A Math. J.*, Vol.2, pp.81-101, 2007.

[2] Shirota, K.: Adjoint numerical method for the identification of the Lamé coefficients in linear elastic wave field, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng.*, Vol.23, pp.321-329, 2006.

[3] Jimbo, S., Morassi, A., Nakamura,G., and Shirota, K.: A non-destructive method for damage detection in steel-concrete structures based on finite eigendata, *Inv. Prob. Sci. Eng.*, Vol.20, pp.233-270, 2012.

[4] Bendsøe, M.P. and Sigmund, O.: Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[5] 渡邉祥, 代田 健二: 勾配法と任意多点差分法を用いた高精度位相最適化手法の開発. 日本応用数理学会論文誌, 第 26 巻, pp.1-20, 2016.

[6] 畔上秀幸: 形状最適化問題, 森北出版, 2016.

[7] Kurashiki, D. and Shirota, K.: H^2 gradient method for the coefficient identification problem in a partial differential equation, *JSIAM Lett.*, Vol.10, pp.37-40, 2018.

[8] 代田健二: スカラー波動方程式の係数同定問題に対する H^2 勾配法, 日本応用数理学会 2018 年度年会講演予稿集, pp.121-122, 2018.

[9] 代田健二: 密度型位相最適化を応用した線形弾性波動方程式のラメ係数同定問題に対する数値解法, 日本応用数理学会 2022 年度年会講演予稿集, F3-3-1(PDF), 2022.

[10] 宮島静雄: ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, 2006.

[11] Fernández-Cara, E. and Maestre, F.: An inverse problem in elastography involving Lamé systems, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, Vol.26, pp.589-605,2018.

[12] Yaman, F., Yakhno, V. G., and Potthast, R.: A Survey on Inverse Problems for Applied Sciences, *Math. Probl. in Eng.*, Article ID 976837, 2013.

[13] オズテゥルク アハメット フルカン, 代田健二: 線形弾性波動方程式の係数同定問題に対する H1 型解法, 日本応用数理学会 2020 年度年会講演予稿集, pp.462-463, 2020.