計算工学講演会論文集　Vol.29 (2024年6月)　日本計算工学会

座標変換によるメタマテリアルの検討

Study on Metamaterials Using Coordinate Transformation

橋口真宜[1)]，米大海[2)]

Masanori Hashiguchi and Dahai Mi

1) 技術士（機械部門）計測エンジニアリングシステム株式会社　主席研究員（〒101-0047 東京都千代田区内神田1-9-5 SF内神田ビル, E-mail: hashiguchi＠kesco.co.jp)

2) 工博 計測エンジニアリングシステム株式会社 技術部　部長（〒101-0047 東京都千代田区内神田1-9-5 SF内神田ビル, E-mail: midahai＠kesco.co.jp）

In this research, we investigated metamaterials using coordinate transformation. The finite element method was applied to obtain the numerical solution of the governing equations transformed into the generalized coordinate system to maintain the invariant form. Preliminary calculations verified that the present method works well. Reasonable results were obtained when applied to an acoustic sound field with two cloaked regions.

Key Words : *Metamaterial, Generalized Coordinates, Acoustics，FEM, COMSOL Multiphysics*

1.　はじめに

超スマート社会ではCAEとデータサイエンス(DS)が深く結びつくことになる．CAEは場の方程式を使って数値解を求めることで多様な現象を予測できることを示してきた．予測精度を確保するには場の方程式と境界条件の詳細化があるが, DS活用には軽量の予測が望まれている．

メタマテリアルは，自然界に存在する物質から成る微細構造を多数，組み上げて巨視的な系を構成することで，その系の平均特性を自然界に存在しないようなものに仕立てる魅力的な考え方である．メタマテリアルの応用を考える場合，メタマテリアルが周期性を持つものであれば１周期分の構造の詳細を実際に描画して周期境界条件の下で直接数値計算（Direct Numerical Simulation）をすることで，得られうる平均特性の検討ができる．

アイデアを創出するという立場からは簡単な絵を描く程度の手間で所望の性能が得られるかを検討できる仕組みがあると良い．メタサーフェスは境界に微細構造を設置することで境界の性質を狙い通りに設定するメタマテリアル技術であり，光や音響では一般化スネル則を使って数学的に検討を実施し，その内容は実際の微細な境界形状として表現する考え方も利用できるようになってきた．空間を対象とするメタマテリアルも数学的な方法でアイデアを創出することが良い方法に思える．しかしながら，この分野の発展は目覚ましく内容の理解も追いつかない現状にある．スマート社会で誰もが利用できるように，メタマテリアルについて考える糸口が必要である．

本稿では, クロークを題材として選び, メタマテリアルを効率的に理解できるようにその糸口となる簡単な課題を設定し，座標変換からの数学的アプローチを検討した．

2.　座標変換に対して不変な方程式の利用

（1）モデル方程式

簡単のために2次元空間を考えることにする．

物理現象を支配する基礎方程式には，偏微分方程式（PDE，Partial Differential Equations）によってデカルト座標系$(\mathrm{X,Y,t})$で次式のように記述できるものがある．

$$\rho_0 C_{p0}\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\Gamma=f,\quad \Gamma=-\mathrm{D_0}\nabla \mathrm{u} \tag{1}$$

ここで，$\nabla\coloneqq(\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial Y})$である．

この方程式は時間１階微分をもつ発展方程式である．この形の方程式は例えば熱伝導方程式や化学種の質量保存式（$\rho_0 C_{p0}=1$）がある．形式的には時間項を0とし，ソース項を調整して角周波数の2乗を含む項を入れれば音波の周波数領域解析（Helmholtz方程式）として使える．

（2）座標変換に対して不変となる条件

さて，デカルト座標系$(\mathrm{X,Y,t})$(CC, Cartesian Coordinate System)から一般座標系（GC, Generalized Coordinate System）$(\mathrm{x',y',t})$への変換を考えるとき，座標変換行列Aおよび行列式Jは次式で定義できる．

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x'}{\partial X} & \frac{\partial x'}{\partial Y}\\ \frac{\partial y'}{\partial X} & \frac{\partial y'}{\partial Y}\end{bmatrix},\qquad \mathrm{J}=\det(\mathrm{A}) \tag{2}$$

座標変換に関して式(1)が不変（invariant）であるためには，変換後の現象論的係数$\rho C_p, D$およびソース項fと，変

数前の$\rho_0 C_{p0}$，D_0およびソース項f_0との間に，次の関係があることが必要である．

$$\rho C_p = \frac{\rho_0 C_{p0}}{\det(A)}, D = \frac{\mathrm{A}D_0\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}{\det(\mathrm{A})}, f = \frac{f_0}{\det(A)} \tag{3}$$

変換後の支配方程式は次の通り，式(1)と同型になる．

$$\rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla' \cdot \Gamma = f, \qquad \Gamma = -D\nabla' \mathrm{u} \tag{4}$$

ここで，$\nabla' \coloneqq (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'})$である．

3.　数値実験

(1)　予備検討

座標変換の有無に応じて妥当な数値解が得られるか否かを検討した．数値解は有限要素解析ソフトウェアCOMSOL Multiphysics®(以後，本ソフトウェアと称す．COMSOL社(ストックホルム/ボストン))によって求めた．

計算領域は幅1，高さ1/2の矩形領域であり，領域の左下角点を座標原点としたデカルト座標系(X, Y)（CC）を考え，そこで未知数$u(X,Y)$の数値解を得ることを考える．手計算で理論の内容を可視化でき，かつ解析解が得られる程度に簡単な問題を設定し，実際に図１に示す解析解を導出した．

現象は定常であるとして，支配方程式は次の通りであるとする．

$$\nabla \cdot (-k_0 \nabla \mathrm{u}) = f_0 \tag{5}$$

ここで，$k_0 = 1$，$f_0 = 8$ とした．

境界条件は左右の境界で次のディリクレ条件を課した．

$$\mathrm{u}(0, \mathrm{Y}) = 0, \mathrm{u}(1, \mathrm{Y}) = 1 \tag{6}$$

上下の境界では次のノイマン条件を課した．

$$\frac{\partial u}{\partial y}(X, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}\left(X, \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{7}$$

座標変換は次式で与えられるものを適用した．

$$x'(X,Y) = X^{1/2},\ \ y'(X,Y) = Y \tag{8}$$

一般化座標系(GC)では式(9)で表現される．

$$\nabla' \cdot \left(-\frac{\mathrm{A}k_0\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}{\det(\mathrm{A})} \nabla' \mathrm{u}\right) = \frac{f_0}{\det(\mathrm{A})} \tag{9}$$

(2)　座標変換の有無における数値解の検証

図1に計算領域中央高さでの水平方向の解の比較を示す．解析解と座標変換の有無における有限要素解は全て一致しており，一般化座標系で不変式(9)を解く本計算の妥当性が示された．一般化座標系で非不変式(1)を解いた解析解を図1に破線で示した．この破線に対応する有限要素解を△で示した．両者は一致することから，非不変式(1)は座標変換の影響を受けており，後述するクロークの検討には使えないことが確認された．

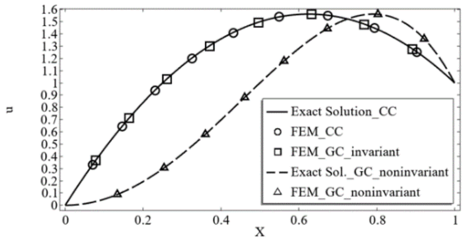


図-1 解析解（実線：デカルト座標系・式(1)，破線：一般化座標系・式(1)）および有限要素解（○：デカルト座標系・式(1)，□：一般化座標系・式(9)，△：一般化座標系・式(1)）の比較．

4.　クロークへの適用例

クローク（Cloak）とは，自由空間においた物体の存在が利用する物理現象（光，音，電磁波，伝熱，弾性波など）で検知できないように覆い隠す技術である．ただし，物体による信号の変化は物体近傍の補助領域には生じる．

図2に示す音響クローク問題に本計算法を適用した．

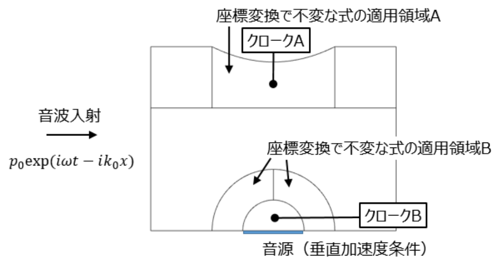
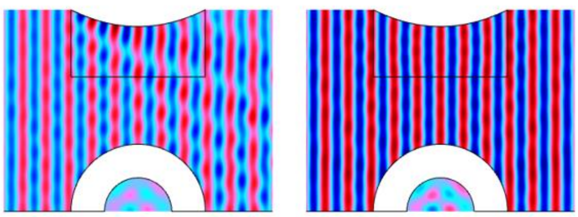


図-2 クローク領域とクロークを実現する補助領域．

結果を図３に示す．本計算法は妥当である．



(a) クロークAなし　　(b) クロークAあり

図-3 クロークＡについて本計算法の適用なし，適用ありの比較結果；音圧分布を周波数は500Hzで計算，クロークＢには音源あり，Ｂ上部に補助領域（白抜き）あり．

5.　今後の予定

今回，2個のクロークが近くにある場合でもクロークがうまく機能することを示すことができた．計算条件などの詳細は，講演会当日に報告する．市販ソフトウェアには利用上の特徴があり，課題を設定し，地道に理解を進める必要がある．ソフトウェアを使用する中で一般座標系の簡便な設定法を検討していくことが今後の課題となった．