

レーザスキャナによる点群データを用いた有限要素法解析の妥当性確認に関する基礎的検討

Fundamental Study on Validation of Finite Element Analysis Using Point Cloud Data from Laser Scanner

小杉龍矢¹⁾ 原木響也²⁾ 遊佐泰紀³⁾ 増田宏⁴⁾

Ryuya Kosugi, Hibiya Haraki, Yasunori Yusa, and Hiroshi Maduda

¹⁾学 (工) 電気通信大学大学院情報理工学研究科 (〒182-8585 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1, E-mail: r.kosugi@uec.ac.jp)

²⁾修 (工) 電気通信大学大学院情報理工学研究科 (〒182-8585 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1)

³⁾博 (工) 電気通信大学大学院情報理工学研究科 助教 (〒182-8585 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1, E-mail: y.yusa@uec.ac.jp)

⁴⁾博 (工) 電気通信大学大学院情報理工学研究科 教授 (〒182-8585 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1, E-mail: h.masuda@uec.ac.jp)

A laser scanner is effective for measuring the overall shape of a structure. When using point cloud data from a laser scanner for validation of a finite element analysis, there are options on how to compare the point cloud data consisting of many points with the analysis results. In this study, several methods to quantitatively compare point cloud data and analysis results were examined. In particular, the comparison method based on distance and normal vector, and the evaluation method based on contour map, histogram, and scalar value were numerically investigated.

Key Words : Laser Scanner, Finite Element Analysis, Point Cloud

1. 緒言

構造物の全体的な形状計測には、地上型レーザースキャナ (Terrestrial Laser Scanner, TLS) が比較的高精度な上に離れた場所からでも測定できる点から有効である。そのため TLS は、形状モデルの作成 [1] や点群データを用いた有限要素法解析 [2] などに利用されている。特に点群を用いた多くの有限要素法解析では、構造物が建造されてから形状計測を行う間に生じた変形を考慮していなかった。そこで変形後形状拘束条件を伴う有限要素法解析 [3][4] が提案されている。このように、点群データを利用した有限要素法解析がさまざま行われているのに対して、有限要素法解析の妥当性確認のために、TLS で取得できる点群データを解析結果と比較する方法についてはまだ確立されていない。レーザスキャナによる点群データを有限要素法解析の妥当性確認を利用する場合、多数の点から成る点群データと解析結果をどのようにして比較するかについては検討されていないため、新たに考案する必要がある。

本研究では、解析結果である変形後のメッシュと測定した点群データを定量的に比較する方法を複数検討し、それらの性能を定量的に調査することを目的とする。特に、変形後の表面を示すメッシュと点群に含まれる点までの距離に基づく比較法、変形後の表面を示すメッシュの法線ベクトルと点群から作られる法線ベクトルに基づく比較法を用いて、代表値による評価法、コンター図による評価法、ヒストグラムによる評価法の 3 つ評価法を数値的に調査した。数値例には、実際に TLS を用いて計測したアクリル板と机の点群を用いた。数値例の採用理由は、計算機内で CAD モデルを作成するのが容易なシンプルな形状かつ実験室内で測定

可能な大きさであることである。実測点群に含まれる外れ値の影響を観察しながら、作成した比較法の数値的な調査を行った。

2. 解析結果と点群データの比較法

(1) 本研究に用いた有限要素法解析手法

本研究では、平衡方程式の弱形式を有限要素法で離散化した式 (1) を解いている。

$$\mathbf{r} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega = \mathbf{0} \quad (1)$$

このとき、 Ω は変形前領域、 \mathbf{B} はひずみ・節点変位行列、 \mathbf{S} は第二 Piola-Kirchhoff 応力、 \mathbf{N} は形状関数、 $\bar{\mathbf{t}}$ は表面力、 $\bar{\mathbf{b}}$ は物体力を表している。第二 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} は、材料モデルによって決定される。Vladimirov et al. の圧縮性 neo-Hooke モデル [5][6] を使用している。

(2) 距離に基づく比較法

点群とメッシュの距離に着目したのが距離に基づく比較法である。点群データは、 x , y , z で表される三次元座標で構成された点の集合体のデータであり、本研究で比較したい有限要素法解析の結果のメッシュとは異なる形のデータである。点群のままメッシュと比較することやメッシュの節点を点群データとみなして、点群と比較するなどの手法も考えられたが、メッシュとメッシュの比較にすることで対応関係の決定や法線ベクトルの作成が容易になることを期待したため、本研究では点群データをメッシュに変換して比較する方法を選択した。この比較法は、原木ほか [7] の変形後形状の拘束条件の収束判定に用いられてるメッシュ-点群間

の距離を部分的に転用したものである。

まず、点群データを三角形メッシュに変換する。この2(4)項のアルゴリズムを使って探索した三角形に、解析結果である変形後のメッシュの節点*i*から垂線を下ろす。この垂線の長さを*h_i*、垂線の足を含む三角形の面積を*A_i*とする。このとき、距離に基づく比較のためのベクトル値を

$$v_i = \frac{h_i}{\sqrt{A_i}} \quad (2)$$

とする。

式(2)において単純な距離*h_i*を比較法として用いず、三角形の面積の平方根 $\sqrt{A_i}$ で除した理由は以下の2点である。一つ目の理由は無次元化である。無次元化によって、寸法の単位が異なる場合にも同様の比較法を適用することができる。二つ目の理由は、点群の密度の影響の軽減である。点群が密になると節点とメッシュの距離は、短くなる。また、点群から作られるメッシュの面積も小さくなる。そのため、式(2)の右辺の分母も分子も小さくなるため点群の粗密変化による*v_i*の変化を軽減することができる。

(3) 法線ベクトルに基づく比較法

点群とメッシュの一致度を評価するために、ここでは点群とメッシュの法線ベクトルに着目した。法線ベクトルに着目することで変形後の表面の向きの比較ができると考えたからである。点群データは、初めは法線の情報を持たないが点群処理によって法線の情報を持たせることができる。そこで本研究では、距離に基づく比較法と同様に、まず点群をメッシュに変換することで点群の法線ベクトルを得た。具体的には、原木ほか[3]の変形後形状の拘束条件に用いている三角形メッシュの法線ベクトルを算出し、ある頂点を含む全ての三角形の法線ベクトルの平均をとる方法を採用了。点群をメッシュに変換する理由は、法線情報の付与と対応関係の一致に2(4)項のアルゴリズムを用いるためである。この比較法も、原木ほか[3]の変形後形状の拘束条件の収束判定に用いられてるメッシュ-点群間の法線ベクトルを部分的に転用したものである。

有限要素法解析に用いるモデルの各要素面*e*の単位法線ベクトルを*n_e*、要素面*e*と対応する点群から得られる単位法線ベクトルを*ñ_e*とする。この対応する法線ベクトルも2(4)で説明するアルゴリズムで決定する。このとき、法線ベクトルに基づく比較のためのベクトル値を

$$v_e = |\bar{n}_e - n_e| \quad (3)$$

とする。法線ベクトルに基づく比較法は、単位ベクトルの差を用いているため距離に基づく比較法と違って*v_e*の最大値は2である。

(4) 対応関係の決定法

距離に基づく評価法の節点と三角形メッシュの対応関係の決定と法線ベクトルに基づく比較法の点群から作られる法線ベクトルと三角形メッシュの法線ベクトルの対応関係の決定には、図-1の接触解析で多用されるNode-to-Surfaceアルゴリズム[8]を使用した。他の

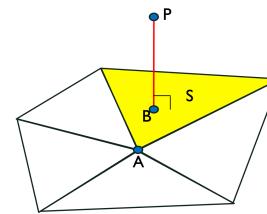


図-1 Node-to-Surface アルゴリズム

対応関係の決定法として、Nearest-Neighborアルゴリズムなども考えられたため、法線ベクトルに基づく比較法では、Node-to-Surfaceアルゴリズムに加えて最近傍点と対応関係をとるNearest-Neighborアルゴリズムも用いた。Node-to-Surfaceアルゴリズムの内容は以下の通りである。

1. 点Pから最も近い三角形メッシュの頂点Aを探索する。ただし、点Pは距離に基づく比較法の場合は解析結果である変形後のメッシュの節点、法線ベクトルに基づく比較法の場合は解析結果である変形後のメッシュの法線ベクトルの始点を表す。
2. その頂点Aに隣接する三角形のうち、点Pから三角形に下ろした垂線が三角形内に含まれる三角形を探索する。
3. 探索した三角形のうち点Pに最も近い三角形に対して*v_i*や*v_e*を適用する。

ここで条件が満たされる三角形が存在しない場合は、その点Pに対して式(2)や式(3)を適用しないこととした。このように対応関係が得られない場合があるのがNode-to-Surfaceアルゴリズムの特徴である。

Nearest-Neighborアルゴリズムでは、前述の点Pと点群の最近傍で対応関係を決めている。

(5) 代表値による評価法

代表値による評価法は、式(2)や式(3)により作成されるベクトル値の代表値を求めたものである。代表値として、最大値、最小値、中央値、一般化平均値を試した。最大値は、

$$s = \max_i v_i \quad (4)$$

で表される。最小値は、

$$s = \min_i v_i \quad (5)$$

で表される。中央値は、

$$s = \text{median}_i v_i \quad (6)$$

で表される。一般化平均は、

$$s = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

で表される。ただし、*N*は*v_i*の成分数である。また、本研究では*p* = 1, *p* = 1.5, *p* = 2を選択した。以上の合計6種類の代表値を試した。この6種類を試した理由としては、最大値、最小値、中央値、一般化平均*p* = 1は一般的な代表値であるから採用した。*p* = 1.5, *p* = 2

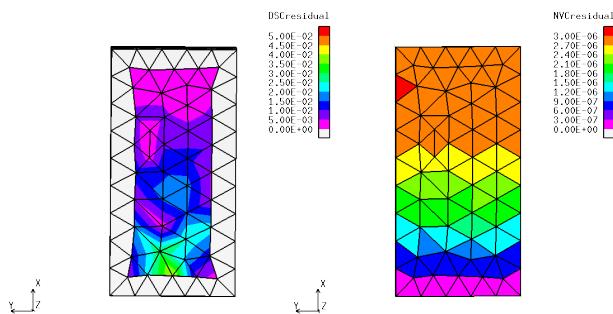


図-2-a 距離に基づいた比較 図-2-b 法線ベクトルに基づいた比較の結果の可視化

図-2 コンター図の表示例

を採用した理由は、点群レジストレーションによく用いられる二乗平均平方根誤差 (Root Mean Squared Error, RMSE)[9] からの転用である。最大値や最小値は、外れ値の影響を最も強く受けることが予想される。一般平均においても外れ値の影響を受けると考えられる。

(6) コンター図による評価法

コンター図による評価法は、式(2)や式(3)の値がメッシュのどの場所でどのような値をとるかについて可視化したものである。距離に基づく比較法では、図-2-aに示すように式 v_i の値は各節点ごとに定義されるため、各節点間では隣り合った式 v_i の値同士を線形補完する形で可視化している。法線ベクトルに基づく比較法では、図-2-bに示すように要素面ごとに v_e の値が適用されるため、要素面ごとに色分けされた形で表示される。色分けに関しては、最大値と最小値を考慮して決定しているため、コンター図ごとに色の示す v_i , v_e の値が異なる点は注意すべきである。またコンター図が示す v_i , v_e の値が0でグレーで表示される部分は v_i , v_e の値が適用できなかったことを示している。

(7) ヒストグラムによる評価法

ヒストグラムによる評価法は図-3に示すように v_i や v_e の値の度数分布を視覚的に表示したものである。縦軸に度数、横軸に v_i や v_e の値を取っている。

ヒストグラムを用いることによって、外れ値の確認や代表値による評価法の代表値の選択の検討を行うことができる。本研究はステージェスの公式(8)を使用して階級の数 x を決定した。

$$x = 1 + \log_2 N \quad (8)$$

ただし、 N は v_i , v_e の成分数である。

3. アクリル板を用いた数値例

(1) 解析条件

アクリル板を用いた数値例は、変形している形状をTLSを用いて点群で取得することを想定している。そのためアクリル板を2つのスイベルバイスにより固定し、水平方向から78.91°傾けてTLSによって点群を得た。点群取得に用いたTLSは、FARO Lasor Scanner

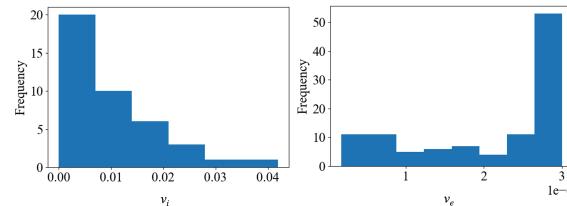


図-3-a 距離に基づく比較法 図-3-b 法線ベクトルに基づく比較法

図-3 ヒストグラムの例

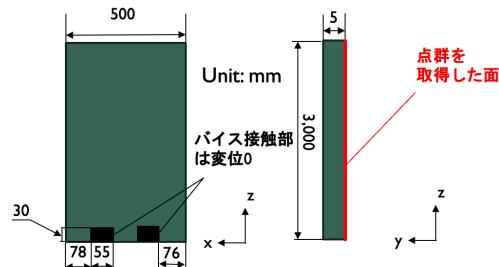


図-4 アクリル板の寸法

Focus X 330 であり、分解能 1/1、品質 2×に設定した。TLSと板の間の距離は約 2,280 mm でポイント距離 1.534 mm/10m で測定を行った。アクリル板の寸法は図-4に示す。

本研究に用いた解析モデルについて説明する。TLSで測定を行ったアクリル板の状態をできるだけ忠実に再現するように、解析モデルを作成した。板は図-4の寸法で、ヤング率を 2,200 MPa、ポアソン比を 0.3 とした。要素数 60,000 の四面体二次要素であり、節点数 100,903、密度は $1.18 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 、また重力加速度は、板が水平から 78.91° 傾いていたため、y 軸方向に 1.887 m/s^2 、z 軸方向に -9.627 m/s^2 とすることで再現した。角度は、角度計をアクリル板下面に当て計測した。また板を固定するバイスと板の接触面での変位は 0 とした。

法線ベクトルに基づく比較法では、点群を用いた主成分分析により得られる法線ベクトルと三角形メッシュの各三角形の法線ベクトルを用いて作成した法線ベクトルを用いた。

実測点群はノイズが含まれるため点群から三角形メッシュを作成する際にダウンサンプリングといった処理が必要である。本研究では、変形後拘束条件を伴う有限要素法解析のための点群処理方法(処理方法1)[7]と形状モデル作成のための点群処理方法(処理方法2)[10][11]の2種類を行なった。

変形後形状拘束条件を伴う有限要素法解析のための点群処理方法を以下に示す。

1. まず、比較したい有限要素法解析のモデルと原点が一致するように座標変換を行った。
2. 次に点群のノイズを削除するために、ある点を k としたときその点の近傍 ζ 個の点までの距離 l_k を

求め、式(9)を満たす点のみ抽出した。

$$l_k < \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^Z l_k + q \sqrt{\frac{1}{Z} \sum_{k=1}^Z \left(l_k - \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^Z l_j \right)^2} \quad (9)$$

ここで Z は点の総数、 q は任意のパラメータで、 $q = 1$ 、 $\zeta = 4$ とした。

3. ダウンサンプリングにて変形後表面形状を適切に抽出するため、ある点の近傍の座標の $q = 1$ をその点の座標とする平滑化を2回行った。
4. 解析の計算コスト削減のためにFarthest Point Sampling (FPS)アルゴリズムによるダウンサンプリングを行った。
5. ダウンサンプリング後、Ball Pivotingアルゴリズムを用いて三角形メッシュを作成した。
6. 作成した三角形メッシュに対して、重みなしLaplacian平滑化を10回実施した。

三角形メッシュ作成時に必要となる最近傍探索等は、Open3Dライブラリ[12]を用いて実施した。

形状モデル作成のための点群処理方法(処理方法2)を以下に示す。

1. まず、比較したい有限要素法解析のモデルと原点が一致するように座標変換を行った。
2. 次にレーザスキャナの照射方向の仰角と方位角を用いて、点群を2次元平面に投影した。
3. 投影された点群に対して、ドロネ三角形分割[10]を行い、各三角形に対して面を張ることによって、メッシュモデルを作成した。
4. 作成されたメッシュの三角形の数を基準にQuadratic Error Metrics (QEM)を用いたポリゴン簡略化手法[11]によってメッシュの簡略化を行った。
5. 作成された各三角形メッシュの面積を計算し、微小面積を削除した。ただし、微小面積とは計算機上にて0と見なせるような小さい値のことである。

点群処理方法1との大きな違いはデータ量削減の際に点の数ではなく三角形の数を基準にしていることである。

図-5に本研究のアクリル板の点群に対して処理を行った後のメッシュの拡大図を示す。図から読み取れるように処理方法1と処理方法2では、メッシュの凹凸に大きな差がある。これは、平滑化の回数の違いが影響しているものと考えられる。特に処理方法1では、変形後形状拘束条件を伴う有限要素法解析のために凹凸がないように平滑化処理を多く行っている。これは同じ点群データを用いているにも関わらず結果に違いを与えると予想される。

(2) 結果と考察

以下に示す法線ベクトルに基づく比較法の結果は、Node-to-Surfaceアルゴリズムと三角形メッシュの法線ベクトルを用いたときのものである。まず、代表値による評価結果を表-1, 2にまとめた。また、距離に基づく比較において、コンター図とヒストグラムによる評価結果をそれぞれ図-6, 7に示す。法線ベクトルに基づく比較における両者をそれぞれ図-8, 9に示す。

表-1, 2から処理方法1と処理方法2ではどの代表値

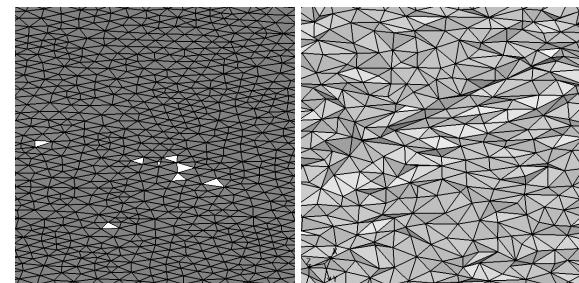


図-5-a 処理方法1

図-5-b 処理方法2

図-5 点群処理後の作成されるメッシュの様子

表-1 板による数値例の最大値、最小値、中央値

比較方法、処理方法	最大値	最小値	中央値
距離、処理方法1	2.37	8.94×10^{-5}	0.254
距離、処理方法2	19.9	2.52×10^{-4}	2.59
法線、処理方法1	0.0800	4.27×10^{-4}	0.0118
法線、処理方法2	1.15	1.86×10^{-3}	0.0809

表-2 板による数値例の一般化平均

比較方法、処理方法	$p = 1$	$p = 1.5$	$p = 2$
距離、処理方法1	0.314	0.362	0.408
距離、処理方法2	3.34	3.89	4.36
法線、処理方法1	0.0128	0.0135	0.145
法線、処理方法2	0.0899	0.0994	0.144

も約10倍異なることがわかる。これは同一の点群データを用いていても、点群の処理方法が異なると大きく値が異なることを示している。点群の処理方法による違いは図-6, 8でも確認でき、処理方法1に比べ処理方法2では v_i や式 v_e の値を取らないグレー色の部分が多く分布していることがわかる。特に処理方法2では、変形の大きい上部で v_i や v_e の値が適用できていない箇所が多い。図7, 9のヒストグラムから、代表値の小さい点が非常に多いことがわかる。この傾向は処理方法に関わらない。したがって、代表値における最大値は外れ値である可能性が高いと考えられる。また、最小値は常に小さい値であり、比較として成立していないことが考えられる。一般化平均では p の値が大きいほど、代表値が大きくなる。そのため、 p の値が大きいほど、外れ値の影響を受けやすいと考えられる。よって外れ値の影響を考えた場合、中央値は最も外れ値の影響を受けない可能性が高い。

4. 机を用いた数値例

(1) 解析条件

机を用いた数値例は、ほとんど変形が見られない形状を点群で取得することを想定している。これは変形している形状を想定したアクリル板との比較を行うためである。また机は、板と違って三次元効果があり、天板や足などの構造を持っている。

アクリル板の数値例と同様の設定で、TLSで机の点群を取得した。机を用いた数値例の寸法は図-10に示す。机の点群は、机の天板上面を示す点群のみを使用した。

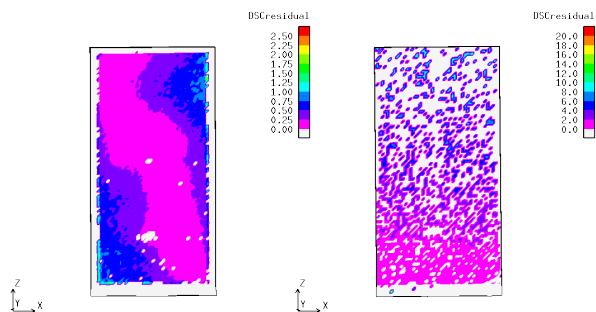


図-6-a 处理方法 1

図-6-b 处理方法 2

図-6 板による数値例の距離に基づく比較法のコンター図

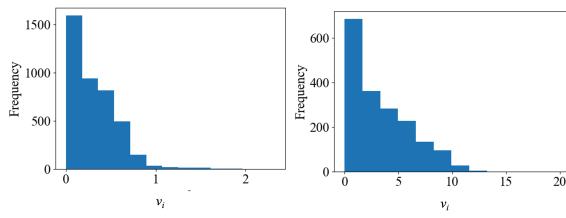


図-7-a 处理方法 1

図-7-b 处理方法 2

図-7 板による数値例の距離に基づく比較法のヒストグラム

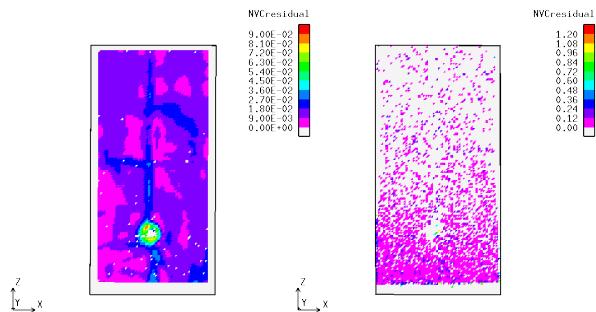


図-8-a 处理方法 1

図-8-b 处理方法 2

図-8 板による数値例の法線ベクトルに基づく比較法のコンター図

本研究にて行った三角形メッシュ作成方法を以下に示す。

- まず、比較したい有限要素法解析のモデルと原点が一致するように座標変換を行った。
- FPS アルゴリズムを用いてダウンサンプリングを行った。
- Ball-Pivoting アルゴリズムを用いて三角形メッシュを作成した。
- 最後に Laplacian 平滑化を実施した。

本研究にて作成した三角形メッシュは 9739 個であり、頂点数は 5000 個であった。

点群から作成された三角形メッシュと比較する解析モデルの条件について説明する。TLS で測定を行った机の状態をできるだけ忠実に再現するように、解析モデルを作成した。机は図 10 の寸法で、天板がヤング率を 10 GPa、ポアソン比を 0.4、密度を $1.7 \times 10^{-7} \text{ kg/mm}^3$ と

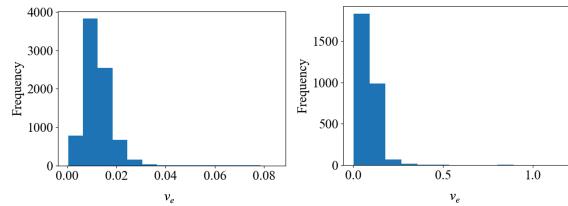


図-9-a 处理方法 1

図-9-b 处理方法 2

図-9 板による数値例の法線ベクトルに基づく比較法のヒストグラム

表-3 机による数値例の最大値、最小値、中央値

比較方法	最大値	最小値	中央値
距離	3.49	7.08×10^{-2}	0.972
法線	0.0269	3.08×10^{-4}	0.0185

表-4 机による数値例の一般化平均

比較方法	$p = 1$	$p = 1.5$	$p = 2$
距離	0.971	1.01	1.05
法線	0.0166	0.0174	0.018

した。天板以外の部分はヤング率を 16 GPa、ポアソン比を 0.3、密度を $4.22 \times 10^{-7} \text{ kg/mm}^3$ とした。要素数 10,313 の四面体二次要素であり、節点数 21,640 であった。鉛直下方向に 9.81 m/s^2 の重力加速度を設定した。また、机と床の接触面を変位 0 とした。

(2) 結果と考察

本節にて示す法線ベクトルに基づく比較法の結果は、Node-to-Surface アルゴリズムと三角形メッシュの法線ベクトルを用いたときのものである。まず、代表値による評価結果を表-3、4 にまとめた。また、距離に基づく比較において、コンター図とヒストグラムによる評価結果をそれぞれ図-11-a, 12-a に示す。法線ベクトルに基づく比較における両者をそれぞれ図-11-b, 12-b に示す。

表-3、4 と表-1、2 の結果を比較すると変形していない机の方が v_i , v_e の値が大きくなっている。実測点群にはノイズなどの誤差が含まれるため変形の大きさよりも点群の処理方法などが v_i や v_e の値に大きく影響していると考えられる。図-11-a, 11-b のコンター図から天板中央部で v_i や v_e の値が小さくなることがわかる。しかし天板中央部以外の値も非常に小さい値であるため、全体的に一致していると解釈できる。図-12-a, 12-b に示す。

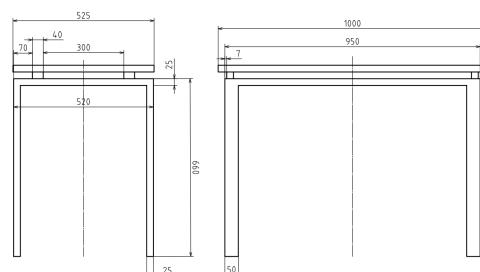


図-10 机の寸法

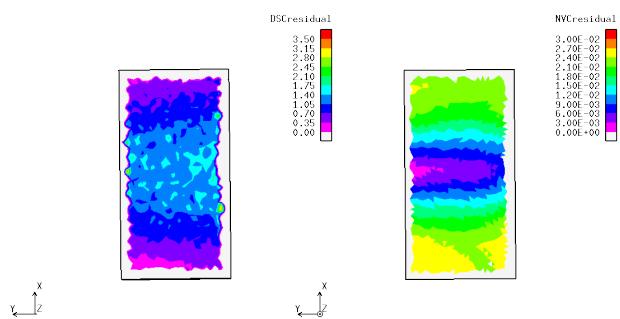


図-11-a 距離に基づく比較 図-11-b 法線ベクトルに基づく比較法

図-11 机による数値例のコンター図

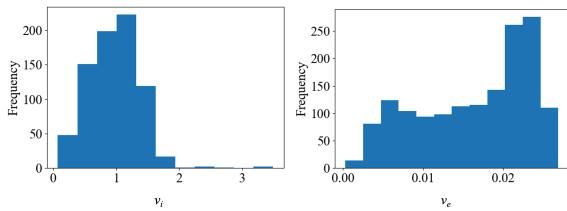


図-12-a 距離に基づく比較 図-12-b 法線ベクトルに基づく比較法

図-12 机による数値例のヒストグラム

のヒストグラムからアクリル板の数値例と異なり v_i や v_e の小さい点は多くなかった。したがって、アクリル板の数値例よりも外れ値が少ないと読み取れる。

5. 結言

通常の有限要素法解析の妥当性確認のために、TLSで取得できる点群データを解析結果と比較する方法、特に距離や法線ベクトルに基づき、代表値、コンター図、ヒストグラムによって評価する比較法を複数作成した。これらの比較法を TLS で取得したアクリル板と机の点群データに適用し、数値的な調査を行った。1つ目のアクリル板による数値例では、2種類の点群処理方法を試したが同じ点群データにもかかわらず v_i や v_e の値の適用結果は大きく異なるものとなった。2つ目の机による数値例では、変形がアクリル板による数値例よりも小さかったが v_i , v_e の値はアクリル板の数値例よりも大きくなかった。それぞれの結果において、いくつかの代表値では、実測点群の外れ値の影響が大きいことがわかった。その主な原因是実測点群に含まれるノイズなどの誤差であると考えられる。そのため外れ値の影響を受けにくい代表値は中央値であった。また、点群処理方法の違いが代表値に約 10 倍の違いを生むこともわかった。実測点群においては、点群処理方法が最も結果に影響を与えていていると考えられる。

今後は点群処理方法にかかわらず評価できる比較法を作成する予定である。それには、まず点群から三角形メッシュを作らずに点のままメッシュと比較する方法の考案が必要であると考えられる。

謝辞: 本研究は日本学術振興会科研費 JP22K14167 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] H. M. Lee, H. S. Park. Estimation of Deformed Shapes of Beam Structures using 3D Coordinate Information from Terrestrial Laser Scanning. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 29, No. 1, pp. 29-44, 2008.
- [2] Gad N. Abenham. A virtual fixture using a FE-based transformation model embedded into a constrained optimization for the dimensional inspection of nonrigid parts. *Computer-Aided Design*, Vol. 62, pp. 248-258, 2015.
- [3] 原木響也, 遊佐泰紀, 増田宏. レーザ計測点群を用いた構造物の変形解析手法の改良. 第 35 回計算力学講演会講演論文集, 5-07, 2022.
- [4] 遊佐泰紀, 増田宏. 構造物の不完全な as-built モデルを用いた応力解析法の検討. 2021 年度精密工学会春季大会学術講演会論文集, pp. 37-38, 2021.
- [5] Koichi Hashiguchi, Yuki Yamakawa. *Introduction to Finite Strain Theory for Continuum Elasto-plasticity*, Wiley, 2012.
- [6] Ivaylo N. Vladimirov, Michael P. Pietryga, Stefanie Reese. On the modelling of non-linear kinematic hardening at finite strains with application to springback - Comparison of time integration algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 75, No. 1, pp. 1-28, 2008.
- [7] 原木響也, 遊佐泰紀, 増田宏. 構造物表面の部分的なレーザ計測点群を用いた変形解析の検討. 構造物表面の部分的なレーザ計測点群を用いた変形解析の検討. 第 34 回計算力学講演会講演論文集, 056, 2021.
- [8] Peter Wriggers. *Computational Contact Mechanics*, Springer, 2006.
- [9] Zhen Donga, Fuxun Lianga, Bisheng Yang, Yusheng Xub, Yufu Zangc, Jianping Lia, Yuan Wang, Wenxia Daia, Hongchao Fand,, Juha Hyypae, Uwe Stilla Registration of large-scale terrestrial laser scanner point clouds: A review and benchmark. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, Vol. 163, pp. 327-342, 2020.
- [10] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld , M. Overmars. *Computational Geometry Algorithms and Applications*, Springer, 2008.
- [11] M. Garland, P.S. Heckbert. Surface Simplification Using Quadric Error Metrics, *Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 209-216, 1997.
- [12] Qian-Yi Zhou, Jaesik Park, Vladlen Koltun. Open3D : A Modern Library for 3D Data Processing. *arXiv.1801.09847*, 2018.