

二層混合体理論に基づく 不飽和土の解析手法の開発

Development of finite deformation analysis method
for unsaturated soils based on two-phase mixture theory

阿部悠太¹⁾, 山田正太郎²⁾, 星啓太郎³⁾, 京谷孝史⁴⁾

Yuta Abe, Shotaro Yamada, Keitaro Hoshi, Takashi Kyoya

¹⁾東北大大学院工学研究科(〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:yuta.abe.p7@dc.tohoku.ac.jp)

²⁾東北大大学院工学研究科 教授(〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:shotaro.yamada.d2@dc.tohoku.ac.jp)

³⁾東北大大学院工学研究科(〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:keitaro.hoshi.r2@dc.tohoku.ac.jp)

⁴⁾東北大大学院工学研究科 教授(〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:takashi.kyoya.b1@tohoku.ac.jp)

This study proposes a new unsaturated soil analysis method that treats unsaturated soil as a two-phase mixture by treating pore water and pore air as a single fluid (pore fluid). The proposed method allows for stable calculations even under analytical conditions with highly saturated or dry regions since the pore fluid is present in all regions. In addition, this study constructs the finite deformation Cam-clay model extended to a model that can reproduce deformation and strength properties of unsaturated soils. The simulation of drained and exhausted shear tests demonstrated that the phenomenon of shear strength increasing with unsaturation can be expressed.

Key Words : unsaturated soil, mixture theory, Cam-clay model

1 はじめに

不飽和土の解析手法として、三相混合体理論に基づく空気～水～土連成解析[1], [2], [3]が広く用いられており、実問題を対象とした高度な解析が行われている。一方で、高飽和領域で安定的に解析ができない問題が指摘されている。また、有効応力の表現式としてBishopの有効応力式が一般的に用いられているが、間隙水・空気圧の寄与分を表す係数の決定法に定見はない。このような問題に対して、本研究では、間隙水と間隙空気を一括して間隙流体として扱うことにより、不飽和土を二相混合体として理想化する解析手法を構築する。これにより二相混合体として飽和度の力学挙動を記述した水～土連成解析と同様に安定的な計算が可能となる。さらに、間隙水圧と間隙空気圧の区別がなくなり、有効応力式の定義に関する問題を解決することもできる。本研究では、上記の発想に元に、不飽和土の力学を有限変形理論の枠組みで記述する。加えて、有限変形Cam-clay modelを不飽和土を対象とした構成則へと拡張し、構築した連成解析手法と合わせることで、変形・破壊問題を有限要素法を適用して解く。

2 間隙流体～土骨格連成解析手法の定式化

2.1 二相混合体理論

上述した通り、本研究では間隙水と間隙空気を間隙流体として同列に扱うことにより、土骨格と間隙流体を構成要素とした二相混合体理論に基づいて

諸法則を記述する。

混合体理論では、ある時刻にある空間を占める物質が複数存在することを許容し、各相の密度を平均化した連続体を考える。西村[4]に倣い、固相と液相の二相混合体として定式化を行う。以下では、添え字 s, f, w, a はそれぞれ土骨格、間隙流体、間隙水、間隙空気に関する諸量であることを示す。

図 1に示すように、土骨格と間隙流体が混合体の体積を一様に占めるとして、平均化した密度 ρ_s , ρ_f はそれぞれ以下のように表せる。

$$\rho_s = (1-n)\rho^s, \rho_f = n\rho^f \quad (1)$$

$$\rho^f = \phi\rho^w + (1-\phi)\rho^a \quad (2)$$

ここで、 n は間隙率、 ϕ は飽和度であり、 $\rho^c, c = (s, w, a)$ は各構成要素の単体での密度を表す。混合体の密度 ρ は土骨格と間隙流体の平均化した密度 ρ_s , ρ_f を用いて、以下のように表せる。

$$\rho = \rho_s + \rho_f \quad (3)$$

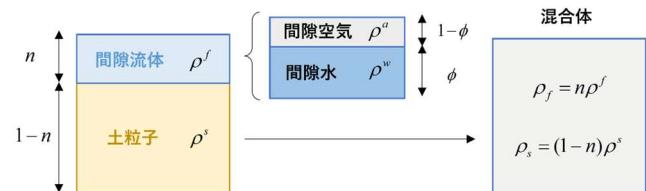


図 1 密度の平均化

2.2 間隙流体～土骨格連成式

各構成要素における質量保存則は以下のように表せる。

$$D_s \rho_s + \rho_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0 \quad (4)$$

$$D_f \rho_f + \rho_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 \quad (5)$$

ただし、 D_s 、 D_f はそれぞれ土骨格、間隙流体から見た物質時間微分である。土粒子および間隙水、間隙空気の非圧縮性を仮定することで、式(4)、(5)は以下のように表せる。

$$D_s n - (1-n) \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0 \quad (6)$$

$$D_f n + n \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 \quad (7)$$

各相から見た物質時間微分に留意し、式(6)、(7)を合わせることで、土骨格と間隙流体の幾何学的制約である土骨格～間隙流体連成式が得られる。

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \operatorname{div} \mathbf{w} = -n \frac{(\rho^w - \rho^a) D_f \phi}{\rho^f} \quad (8)$$

ただし、 \mathbf{w} は平均相対流速であり、 $\mathbf{w} = n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$ と定義する。これは土骨格に対する間隙流体の相対速度を混合体として平均化したものである。

2.3 混合体の運動方程式

間隙流体圧力を p^ϕ とすると、間隙流体の部分応力 $\boldsymbol{\sigma}_f$ は以下のように表せる。

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -n p^\phi \mathbf{I} \quad (9)$$

また、有効応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ と全応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の有効応力式を満足するものとする。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p^\phi \mathbf{I} \quad (10)$$

したがって、式(9)、(10)より土骨格の部分応力 $\boldsymbol{\sigma}_s$ は以下のように表せる。

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_f = \boldsymbol{\sigma}' - (1-n) p^\phi \mathbf{I} \quad (11)$$

各相における運動方程式は以下のように表せる。

$$\rho_s \mathbf{a}_s = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{i}_s \quad (12)$$

$$\rho_f \mathbf{a}_f = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f + \rho_f \mathbf{g} + \mathbf{i}_f \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{i}_c 、 $c=(s,f)$ は各相が他の相から受ける相互作用力である。なお、 $\mathbf{i}_f = -(\rho_f g/k) \mathbf{w} + u_c \operatorname{grad} \phi + p \operatorname{grad} n$ とおくことにより、式(12)から \mathbf{w} が以下のように得られ、 $\mathbf{a}_f = \mathbf{0}$ かつ $\phi = \text{const.}$ のときにダルシ一則に帰着する。

$$\mathbf{w} = -\frac{k}{g} \left(\frac{\operatorname{grad} p}{\rho^f} + \frac{u_c \operatorname{grad} \phi}{\rho^f} + \mathbf{a}_f - \mathbf{g} \right) \quad (14)$$

ここで、作用・反作用の関係 ($\mathbf{i}_s + \mathbf{i}_f = \mathbf{0}$) から式

(12)、(13)を合わせ、 $\rho_f(\mathbf{a}_f - \mathbf{a}_s) \ll \rho \mathbf{a}_s$ と仮定すると、混合体の運動方程式が以下のように得られる。

$$\rho \mathbf{a}_s = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (15)$$

2.4 飽和度の時間発展方程式

飽和度の時間発展方程は、界面移動を表現する数理モデルとして使用される Allen-Cahn 方程式を用いる。 $D_f \phi$ は以下の方程式を満足するように時間発展する。

$$D_f \phi = -M_a \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} - k_\phi \nabla^2 \phi \right) \quad (16)$$

ここで、 ϕ はダブルウェルポテンシャルであり、 $\phi(\phi) = \phi^2(1-\phi)^2$ と定義する。また、 M_a はモビリティ係数、 k_ϕ は勾配エネルギー係数と呼ばれるパラメータである。

3 有限要素法への適用

3.1 弱形式化

本研究では、未知数を土骨格の変位 \mathbf{u} 、間隙流体圧 p^f 、飽和度 ϕ として、式(8)、(15)、(16)に従う初期値・境界値問題を有限変形理論の枠組みにおいて強連成で解く。有限要素法を適用するために、支配方程式を以下のように弱形式化する。

$$\delta W^m = \delta W_{\text{int}}^m - \delta W_{\text{ext}}^m + \delta W_{\text{acc}}^m = 0 \quad (17)$$

$$\delta W^c = \delta W_s^c + \delta W_f^c = 0 \quad (18)$$

$$\delta W^\phi = \delta W_1^\phi - \delta W_2^\phi + \delta W_3^\phi = 0 \quad (19)$$

ただし、

$$\delta W_{\text{int}}^m = \int_v \delta \mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma} dv \quad (20-1)$$

$$\delta W_{\text{ext}}^m = \int_v \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dv + \int_{s'} \delta \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{t}} ds \quad (20-2)$$

$$\delta W_{\text{acc}}^m = \int_v \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} dv \quad (20-3)$$

$$\delta W_s^c = \int_v \delta p^f \rho^f \mathbf{I} : \mathbf{d} dv \quad (21-1)$$

$$\delta W_f^c = \delta p^f \tilde{q}^f - \int_v \rho^f \nabla \delta p^f \cdot \mathbf{w} dv \quad (21-2)$$

$$\delta W_\phi^c = \int_v \delta p^f n (\rho^w - \rho^a) D_f \phi dv \quad (21-3)$$

$$\delta W_1^\phi = \int_v \delta \phi \left(D_f \phi + M_a \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) dv \quad (22-1)$$

$$\delta W_2^\phi = \int_s \delta \phi M_a \tilde{\theta} ds \quad (22-2)$$

$$\delta W_3^\phi = \int_v M_a k_\phi \nabla \delta \phi \cdot \phi dv \quad (22-3)$$

である。ここで、表面荷重 $\tilde{\mathbf{t}}$ 、流量 \tilde{q} 、親水性 $\tilde{\theta}$ はノイマン境界上で与える値である。また、ディリクレ境界上では、 $\tilde{\mathbf{u}}$ 、 \tilde{p}^f 、 $\tilde{\phi}$ を与える。

式(17)~(19)を離散化して得られる非線形方程式をNewton-Raphson法で解くために、未知関数 \mathbf{u} , p^f , ϕ に関して線形化する。ただし、線形化方程式の詳細は本概要では省略する。

3.2 離散化

空間離散化手法として有限要素法を用いるため、形状関数と要素節点値を用いて要素内の値を以下のように補間近似する。

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m_i} N_i \mathbf{u}_i, \quad p^f = \sum_{i=1}^{m_f} N_i^f p_i^f, \quad \phi = \sum_{i=1}^{m_f} N_i^f \phi_i \quad (23)$$

なお、離散化に用いる補間関数の組み合わせにより、圧力場に数値的な振動が生じることが知られているため、土骨格と間隙流体に関して異なる次数の形状関数を選択可能とした。

4 乗算分解型有限変形Cam-clay modelの不飽和構成則への拡張

本研究では、Abe et al. [5]が提案する乗算分解型有限変形Cam-clay modelを不飽和土を対象とする構成則へと拡張する。以下に、弾塑性構成則を示す。

$$\text{変形勾配の乗算分解} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (24)$$

$$\text{超弾性構成則} \quad \bar{X} = 2\bar{C}^e \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}^e} \quad (25)$$

$$\text{塑性流れ則} \quad \bar{L}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{X}} \quad (26)$$

$$\text{等方硬化則} \quad p_c^{\bar{X}} = p_{c,0}^{\bar{X}} \exp \tilde{\theta}(\varepsilon_v^p - \varepsilon_{v,0}^p) \quad (27)$$

$$\text{降伏関数} \quad f = \frac{p^{\bar{X}}}{p_r^*} \frac{(\mathbf{M}^{\bar{X}})^2 + (\boldsymbol{\eta}^{\bar{X}})^2}{(\mathbf{M}^{\bar{X}})^2} - \frac{p_c^{\bar{X}}}{p_r^*} \leq 0 \quad (28)$$

式(25)の超弾性構成則および式(26)の塑性流れ則は塑性散逸の非負性を満足するように定義した。その際に中間配置に生じる体積変化を考慮し、次式で定義するEshelby-Aoba応力 \bar{X} を用いることで、弾性と塑性で共通の応力を用いる弾塑性構成則とした。

$$\bar{X} = (\mathbf{F}^e)^T \boldsymbol{\chi} (\mathbf{F}^e)^{-T} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\sigma} - \psi \mathbf{I} \quad (30)$$

この有限変形Cam-clay modelを不飽和状態に対応可能な構成則へと拡張する。はじめに、図2に示すように不飽和化に伴い降伏曲面の大きさを拡大し、弾性領域を拡大させる。飽和状態の降伏曲面に対する不飽和状態の降伏曲面の大きさの拡大倍率を $R^\phi(\phi)$ とすると、不飽和状態における降伏曲面は以下のように表せる。

$$f = \frac{p^{\bar{X}}}{p_r^*} \frac{(\mathbf{M}^{\bar{X}})^2 + (\boldsymbol{\eta}^{\bar{X}})^2}{(\mathbf{M}^{\bar{X}})^2} - \frac{R^\phi p_c^{\bar{X}}}{p_r^*} = 0 \quad (31)$$

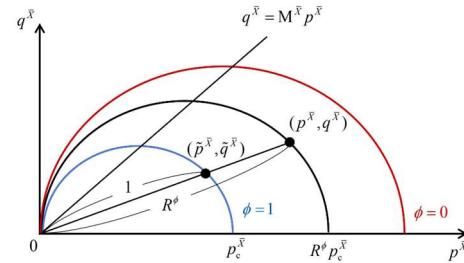


図2 飽和度に応じた降伏曲面の拡大・縮小

R^ϕ を飽和度の関数と定義することで、飽和度に応じて弾性領域が拡大し、不飽和化に伴う強度の増加を表現する。加えて、 R^ϕ に応じて圧縮線の位置が変化するため、浸水して体積減少が生じる（浸水コラプス）現象を再現することができる。

さらに、図3に示すように飽和度に応じて降伏曲面を有効応力空間の等方応力軸に沿って引張側へ平行移動させる。本研究では、ひずみエネルギー関数 ψ を以下のように飽和時のひずみエネルギー関数 $\hat{\psi}$ に平行移動量 $p^\phi(\phi)$ を加えて定義する

$$\psi = \hat{\psi} + p^\phi \quad (32)$$

p^ϕ を飽和度の関数として定義することによって、以下のように飽和度に応じて有効応力空間を引張側へと平行移動することができる。

$$p = \hat{p} - p_\phi \quad (33)$$

したがって、平行移動による不飽和状態の降伏曲面は以下のように表せる。

$$f^\sigma = \frac{p + p^\phi}{p_r} \frac{M^2 + \{q/(p + p^\phi)\}^2}{M^2} - \frac{p_c}{p_r} = 0 \quad (34)$$

この拡張により、不飽和化に伴う引張強度が発現し、拘束圧依存性の構成則であるCam-clay modelでは見かけの拘束圧が上昇することで剛性の増加が表現可能になる。

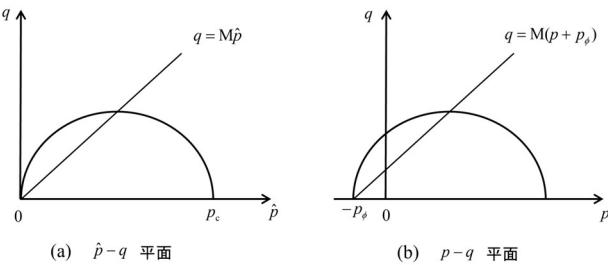


図3 飽和度に応じた降伏曲面の平行移動

5 数値解析例

飽和度によってせん断強度の変化が表現可能であることを排水・排気せん断試験のシミュレーションにより示す。

解析対象は、図4に示すような高さ10.0cm、直径5.0cmの正規圧密状態の円柱供試体を想定する。6面体8節点1次要素を使用し、解析対象を640要素に分

割した。今回の解析では、はじめに飽和度が0の乾燥状態の供試体に対して、拘束圧100kPaをかけた等方応力状態下において下面の飽和度を上昇させることで浸水させる。ある飽和度に達したら、下面の全方向と上面の水平方向の変位を拘束した状態で、鉛直下向きに軸ひずみ速度 $\dot{\varepsilon} = 0.3$ (%/s) で強制変位を与える、軸ひずみが30%に達するまでせん断を行う。なお、今回の解析では下面の飽和度が0, 0.20, 0.40, 0.60, 0.75, 0.80になるまで上昇させる計6つの解析（以下では順にCase 1～Case 6と表記する）を行う。

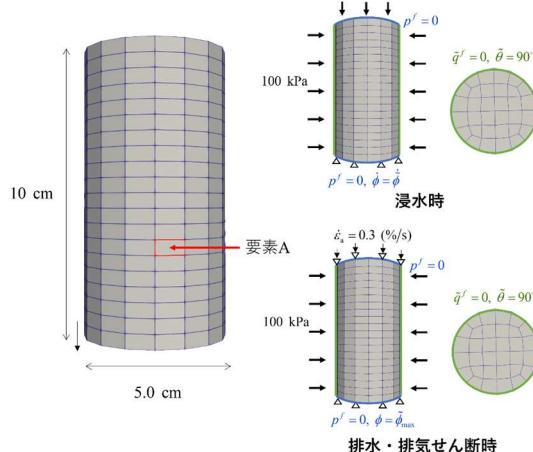


図4 解析モデル・解析条件

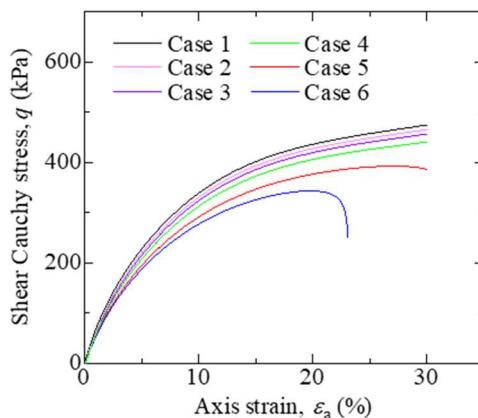


図5 軸ひずみ - せん断応力関係

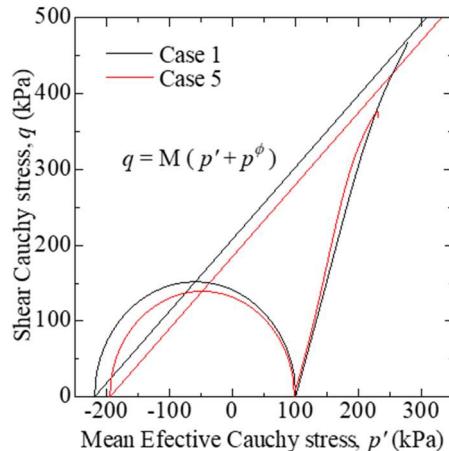


図6 要素 A における応力経路 (Case1, Case5)

図5に軸ひずみ-せん断応力関係を示す。なお、軸ひずみとせん断応力は供試体を一つの要素とみなして算出した値であり、せん断応力は断面補正を施して計算を行った。また、初期浸水時にわずかに圧縮するため、せん断開始時を0として表示している。飽和度が低いほど初期の傾きが大きくなっている。不飽和化による剛性の増加を再現することができている。これは、乾燥状態に近づくほど平行移動量 p^{ϕ} 分だけ拘束圧が実質的に大きくなり、拘束圧依存性のあるCam-clay modelでは剛性が高くなるためである。また、飽和度が高くなるにつれて限界状態に漸近した際のせん断応力が小さくなっている。これは、図6に示すように、浸水により降伏曲面が圧縮側に平行移動した移動量だけ、限界状態線も平行移動するため、飽和化した状態でせん断していくと、乾燥状態よりも低いせん断応力で限界状態に到達したことがわかる。

6 結論

本研究では、間隙水と間隙空気を同列に間隙流体として扱うことで、二相混合体理論に基づく有限変形不飽和土解析手法を構築した。また、有限変形 Cam-clay modelを不飽和土の変形・強度特性を表現するモデルへと拡張した。構築した連成解析手法と不飽和土構成則を合わせ、排水・排気せん断のシミュレーションを行い、不飽和化に伴うせん断強度の変化を再現することができた。

参考文献

- [1] De Boer, R.: Theory of porous media—past and present—, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 78, Issue 7, pp. 441-466, 1998.
- [2] Uzuoka, R. and Borja, R. I.: Dynamics of unsaturated poroelastic solids at finite strain, Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 36, No. 13, pp. 1535-1573, 2012.
- [3] Noda, T., Yoshikawa, T.: Soil-water-air coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, Soils and Foundations, Vol.55, No.1, pp.45-62, 2015.
- [4] 西村直志：第3章土質力学，地盤工学ハンドブック，地盤工学会, pp.51-64, 1999.
- [5] Abe, Y., Yamada, S., Hoshi, K., Kyoya, T.: Reconstruction of Cam-clay model based on multiplicative decomposition of the deformation gradient, Computer and Geotechnics.