

並列電磁界解析における積型反復法の検討

Study on Product-type Krylov Subspace Methods in Parallel Electromagnetic Field Analysis

杉本振一郎¹⁾

Shin-ichiro SUGIMOTO

1) 博(工) 八戸工業大学 工学部 教授(〒031-8501 青森県八戸市妙字大開88-1, E-mail: sugimoto@hi-tech.ac.jp)

This paper deals with a parallel finite element analysis by Hierarchical Domain Decomposition Method (HDDM) of an electromagnetic field problem with product-type Krylov subspace methods. A stabilized type (BiCGSTAB, BiCRSTAB, COCGSTAB and COCRSTAB methods) are applied to the HDDM and verified in the magnetostatic, time-harmonic eddy current and high-frequency electromagnetic problems. As a result, in the magnetostatic and time-harmonic eddy current problems, the numbers of iterations have been reduced. Furthermore, in the high-frequency electromagnetic problem, the convergence has improved, and the computational times have been reduced.

Key Words : Parallel Computing, Finite Element Method, Hierarchical Domain Decomposition Method, Electromagnetic Field Analysis, Product-type Krylov Subspace Method

1. はじめに

電磁界解析は解析対象のまわりの空間も解析対象としなければならないため他の物理現象の解析に比べてメッシュの自由度が大きくなりやすい。また電磁界解析で解くべき方程式には不定性があるため求解には反復法を用いざるを得ず、条件数も悪いためその反復回数は非常に多い。このような問題を解くための反復法としては、不完全Cholesky分解(Incomplete Cholesky Factorization: ICC) [1]を前処理とする共役勾配法(Conjugate Gradient method: CG法) [2]や、共役直交共役勾配法(Conjugate Orthogonal CG method: COCG法) [3]などが主に用いられている。また近年では大規模な解析で共役残差法(Conjugate Residual method: CR法) [4]から発展した共役直交共役残差法(Conjugate Orthogonal CR method: COCR法) [5]が反復回数および計算時間の面で有利なことがわかってきた[6]。

しかしいまだ電磁界解析において安定かつ高速に解を得られるとは限らない状況である。より安定かつ高速に解を得るために、本稿では積型反復法に着目する。積型反復法は、CG法をエルミート行列以外にも適用できるよう拡張した双共役勾配法(Bi-Conjugate Gradient method: BiCG法) [7]の収束性を改良することを目的に研究された一連の反復法である。またCR法をエルミート行列以外にも適用できるよう拡張した双共役残差法(Bi-Conjugate Residual method: BiCR法) [8]や、BiCG法、BiCR法を複素対称行列に限定することでシャドウ行列の更新、係数行列の随伴行列の行列ベクトル積を不要としたCOCG法、COCR法でも同様のスキームで収束性を改良する手法の研究[9][10][11]が進み、現在ではこれらも積型反復法に含まれている。

積型反復法の電磁界解析への適用は文献[12]など、すでに多くの試みが行われている。本稿では新たにインターフェース問題を並列反復法で解く階層型領域分割法

(Hierarchical Domain Decomposition method: HDDM)への積型反復法の適用を試みる。特に本稿では安定化双共役勾配法(Bi-Conjugate Gradient Stabilized method: BiCGSTAB法) [13]などの安定化系積型反復法の適用を試みる。数値実験では、実対称行列を解く静磁場問題、複素対称行列を解く時間調和渦電流問題および高周波電磁波問題にこれらの反復法を適用し、収束性と計算時間を比較する。

2. 積型反復法

(1) 記号のルール

- ・ 行列、多項式：英字大文字。 A , R など。
- ・ ベクトル：英字小文字。 b , x など。
- ・ スカラー：ギリシア文字。 α , β など。
- ・ ステップ数：上付き添え字。 x^0 , r^n など。
- ・ 転置： T , A^T , $(r^*)^T$ など。
- ・ 共役転置： H , A^H , $(r^*)^H$ など。

なお本章と次章では同じ英字を用いていても定義が異なる(x , y など)。

(2) CG法, CR法, BiCG法, BiCR法, COCG法, COCR法

次の連立一次方程式を解くための反復法について考える。

$$Ax = b. \quad (1)$$

ここで、 A は係数行列、 b は既知ベクトル、 x は求めるべき解ベクトルである。

まず A がエルミート行列($A = A^H$)である場合を考える。反復法では解ベクトルの初期値 x^0 を仮定し、漸化式により解ベクトルを修正していく。ただし x^n は n 次のクリロフ部分空間から作られる。

$$x^n \in K_n(A; r^0) := \text{Span}\{r^0, Ar^0, A^2r^0, \dots, A^{n-1}r^0\}. \quad (2)$$

ここで r^0 は初期残差ベクトルであり、 n ステップ目の解ベクトル x^n に対して $K_n(A; r^0)$ に直交する残差ベクトル r^n が次のように定義される。

$$r^n = b - Ax^n. \quad (3)$$

修正方向を定める補助ベクトル $p^n (\in K_{n+1}(A; r^0))$ 、修正量を定めるスカラー α^n 、 β^n を用いると、解ベクトルは次のように更新される。

$$x^{n+1} = x^n + \alpha^n p^n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (4)$$

$$r^{n+1} = r^n - \alpha^n A p^n, \quad (5)$$

$$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta^n p^n. \quad (6)$$

ただし、

$$p^0 = r^0 = b - Ax^0. \quad (7)$$

また CG 法では厳密解 y との差を最小とするため、 α^n は次の関数を最小にするように定められる。

$$f(x^n) = \frac{1}{2} \{x^n - y\}^H A \{x^n - y\}. \quad (8)$$

β^n は $A p^n$ と p^{n+1} の直交関係から求められる。一方、CR 法では残差を最小とするため、 α^n は次の関数を最小にするように定められる。

$$f(x^n) = \frac{1}{2} (Ax^n - b)^H (Ax^n - b). \quad (9)$$

β^n は $A p^n$ と $A p^{n+1}$ の直交関係から求められる。

残差ベクトルと補助ベクトルは多項式 R^n 、 P^n を用いて次のように表せる。

$$r^n = R^n(A) r^0, \quad (10)$$

$$p^n = P^n(A) r^0. \quad (11)$$

R^n はランチョス多項式と呼ばれる。

$$R^0(\lambda) = 1, \quad (12)$$

$$R^1(\lambda) = (1 - \alpha^0 \lambda) R^0(\lambda), \quad (13)$$

$$R^{n+1}(\lambda) = \left(1 + \alpha^n \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}} - \alpha^n \lambda\right) R^n(\lambda) - \alpha^n \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}} R^{n-1}(\lambda) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

ここで λ は固有値に対応する。また P^n は補助多項式と呼ばれ、 R^n との間で次の交代漸化式を満たす。

$$P^0(\lambda) = 1, \quad (15)$$

$$R^n(\lambda) = R^{n-1}(\lambda) - \alpha^{n-1} \lambda P^{n-1}(\lambda) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

$$P^n(\lambda) = R^n(\lambda) + \beta^{n-1} P^{n-1}(\lambda). \quad (17)$$

CG 法、CR 法ではこれらの多項式で用いる α^n 、 β^n が異な

る。

CG 法、CR 法をエルミート行列以外にも適用できるよう拡張したのがそれぞれ BiCG 法と BiCR 法である。BiCG 法、BiCR 法では式(1)と双対な次の連立一次方程式を陰的に解いていることになる。

$$A^H x^* = b^*. \quad (18)$$

そのため α^n 、 β^n の計算にシャドウ残差ベクトル r^* 、シャドウ補助ベクトル p^* が必要であり、これらを更新するために A^H の行列ベクトル積を行わなければならない。

$$r^{*,n+1} = r^{*,n} - \overline{\alpha^n} A^H p^{*,n}, \quad (19)$$

$$p^{*,n+1} = r^{*,n+1} + \overline{\beta^n} p^{*,n}. \quad (20)$$

また残差ベクトルは次のクリロフ部分空間に直交するように作られる。

$$r^n \perp K_n(A^H; r^{*0}) := \text{Span}\{r^{*0}, A^H r^{*0}, \dots, (A^H)^{n-1} r^{*0}\}. \quad (21)$$

r^{*0} を次のように r^0 の共役とし、 A を複素対称行列として BiCG 法、BiCR 法のアルゴリズムを整理すると、複素対称行列に特化した COCG 法、COCR 法が得られる。

$$r^{*0} = \overline{r^0}. \quad (22)$$

COCG 法、COCR 法ではシャドウベクトルが不要となり、 A^H の行列ベクトル積も不要となる。

(3) 積型反復法

BiCG法において次のように加速多項式 H^n を残差ベクトルにかけることで収束の加速を図る手法が積型反復法である。

$$r^n = H^n(A) R^n(A) r^0. \quad (23)$$

H^n は次の 3 項漸化式を満たすように設計される。

$$H^0(\lambda) = 1, \quad (24)$$

$$H^1(\lambda) = (1 - \zeta^0 \lambda) H^0(\lambda), \quad (25)$$

$$H^{n+1}(\lambda) = (1 + \eta^n - \zeta^n \lambda) H^n(\lambda) - \eta^n H^{n-1}(\lambda) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (26)$$

ζ^n 、 η^n は加速パラメータであり、これらの取り方で種々の積型反復法が構成される。また H^n は n 次多項式、

$$G^{n-1}(\lambda) := \frac{H^{n-1}(\lambda) - H^n(\lambda)}{\lambda}, \quad (27)$$

との間に次の交代漸化式を満たす。

$$G^0(\lambda) = \zeta^0, \quad (28)$$

$$H^n(\lambda) = H^{n-1}(\lambda) - \lambda G^{n-1}(\lambda) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (29)$$

$$G^n(\lambda) = H^n(\lambda) + \eta^{n-1} G^{n-1}(\lambda). \quad (30)$$

同じスキームを BiCR 法, COCG 法, COCR 法にも適用することができる。

(4) 安定化系積型反復法

加速パラメータを次のように取ることを考える[13].

$$\zeta^n = \arg \min_{\zeta} |r^{n+1}|, \quad (31)$$

$$\eta^n = 0. \quad (32)$$

すなわち、残差ベクトルを最小にするように ζ^n を選択する。

BiCG 法, BiCR 法, COCG 法, COCR 法に基づいた手法は、それぞれ BiCGSTAB 法, 安定化双共役残差法(Bi-Conjugate Residual Stabilized method: BiCRSTAB 法), 安定化共役直交共役勾配法(Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient Stabilized method: COCGSTAB 法), 安定化共役直交共役残差法(Conjugate Orthogonal Conjugate Residual Stabilized method: COCRSTAB 法)と呼ばれる。

図 1 に前処理付きの安定化系積型反復法を示す。4 種の反復法で異なるのは、3 行目の r^* と、6 行目、12 行目の (\cdot) の扱いである。違いによる分類を表 1 に示す。 r^* は BiCGSTAB 法, COCGSTAB 法では r^{*0} であり、BiCRSTAB 法, COCRSTAB 法では $(M^{-1})^H A^H r^{*0}$ である。ただし COCRSTAB 法では $A = A^T$ かつ $M = M^T$ であり、 (\cdot) の扱いから実際には $M^{-1} A r^{*0}$ である。 (\cdot) は BiCGSTAB 法, BiCRSTAB 法ではベクトルの内積であるので左側のベクトルの転置を取ると同時に共役を取るが、COCGSTAB 法, COCRSTAB 法は左側のベクトルで共役を取らない。

1	x^0 is an initial guess, $r^0 = b - Ax^0$,
2	r^{*0} is an arbitrary vector,
3	such that $(r^{*0})^H r^0 \neq 0$, e.g., $r^{*0} = r^0$,
4	Compute r^* ,
5	$p^0 = r^0$,
6	for $n = 0, 1, \dots$,
7	$\alpha^n = \frac{(r^*, r^n)}{(r^*, AM^{-1}p^n)}$,
8	$t^n = r^n - \alpha^n AM^{-1}p^n$,
9	$\zeta^n = \frac{(AM^{-1}t^n)^H (AM^{-1}t^n)}{(AM^{-1}t^n)^H (AM^{-1}t^n)}$,
10	$x^{n+1} = x^n + \alpha^n M^{-1}p^n + \zeta^n M^{-1}t^n$,
11	$r^{n+1} = t^n - \zeta^n AM^{-1}t^n$,
12	if $\frac{ r^{n+1} }{ b } < \epsilon$ (convergence criterion)
13	$\rightarrow \text{end}$,
14	$\beta^n = \frac{\alpha^n \cdot (r^*, r^{n+1})}{\zeta^n \cdot (r^*, r^n)}$,
15	$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta^n (p^n - \zeta^n AM^{-1}p^n)$,
16	end.

図 1. 前処理付き安定化系積型反復法。

表 1. 安定化系積型反復法の分類。

	$r^* = r^{*0}$	$r^* = (M^{-1})^H A^H r^{*0}$
$(a, b) = a^H b$	BiCGSTAB	BiCRSTAB
$(a, b) = a^T b$	COCGSTAB	COCRSTAB

3. 階層型領域分割法

階層型領域分割法は領域分割法[14]-[16]を並列計算環境に効率よく実装するための 1 手法である。大規模問題を効率よく数値計算することのできる手法としてよく知られており、分散メモリ環境で良好な並列効率を得られることが期待できる[17]。階層型領域分割法は大規模な構造解析[18]や熱伝導解析[19]に適用され、また電磁界解析でも数値人体モデルの高周波電磁波解析について 2016 年に 300 億自由度[20]、2019 年に 1,300 億自由度[21]の解析に成功している。

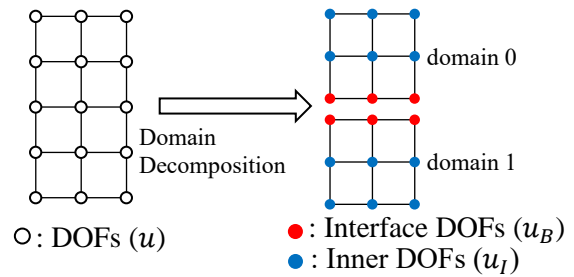


図 2. 領域分割。

元の問題: $Ku = f$

↓ 領域分割

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} \\ K_{IB}^T & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_I \\ f_B \end{bmatrix}$$

↓ 静的縮約

インターフェース問題: $Su_B = g$

図 3. 自由度の静的縮約。

$$y = Sx$$

$$= \sum_{i=0}^1 R_B^{iT} S^i R_B^i \cdot x = \sum_{i=0}^1 R_B^{iT} S^i x^i = \sum_{i=0}^1 R_B^{iT} y^i,$$

$$y^i = S^i x^i = \{K_{BB}^i - K_{IB}^{iT} (K_{II}^i)^{-1} K_{IB}^i\} x^i$$

$$= K_{BB}^i x^i + K_{IB}^{iT} z^i,$$

$$K_{II}^i z^i = -K_{IB}^i x^i. \quad \text{小領域での有限要素計算}$$

図 4. S の行列ベクトル積。

$$y = S^H x$$

$$= \sum_{i=0}^1 R_B^{iT} (S^i)^H R_B^i \cdot x = \sum_{i=0}^1 R_B^{iT} (S^i)^H x^i = \sum_{i=0}^1 R_B^{iT} y^i,$$

$$y^i = (S^i)^H x^i = \{K_{BB}^{iH} - K_{IB}^{iH} (K_{II}^i)^{-1} (K_{IB}^i)^H\} x^i$$

$$= \overline{K_{BB}^i} x^i + \overline{K_{IB}^i} z^i,$$

$$K_{II}^i z^i = -K_{IB}^i x^i. \quad \text{小領域での有限要素計算}$$

図 5. S^H の行列ベクトル積。

階層型領域分割法では解析領域を並列数よりもはるかに多くの小領域(1 小領域あたり数百自由度程度)に分割し、自由度を領域分割によって生じる領域間のインターフェース自由度(図 2)に静的縮約したインターフェース

問題(図 3)を並列反復法で解く. 解くべき問題そのものが変わるため並列性能を阻害する不完全 Cholesky 分解(IC) 前処理を使わずとも収束解を得られる. また分割数を変えずに並列数を変えられるため並列反復法の収束性に並列数は影響しない. 一方, 解くべき行列 S が密であり, 作成してしまうと効率的な解析ができなくなるので, 並列反復法に必要な S の行列ベクトル積は小領域での有限要素計算の結果の重ね合わせ(図 4)で行っている. また, 元の係数行列 A が対称行列であることから S も対称行列であることを利用して, S^H の行列ベクトル積は 図 5 のように求める. S の行列ベクトル積との違いは, 部分領域の有限要素解析の際に x^i の共役を取ることで, y^i を求める際, 最後に共役を取ることで, の 2 点である.

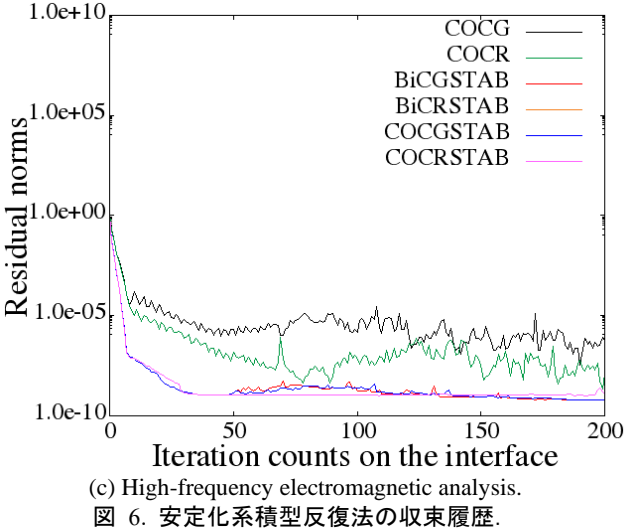
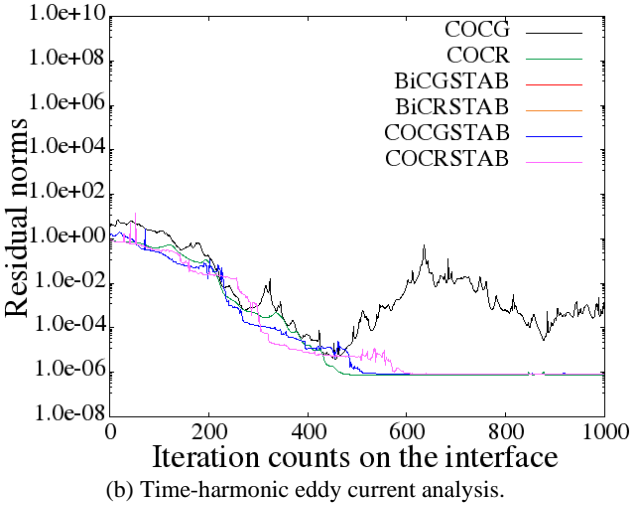
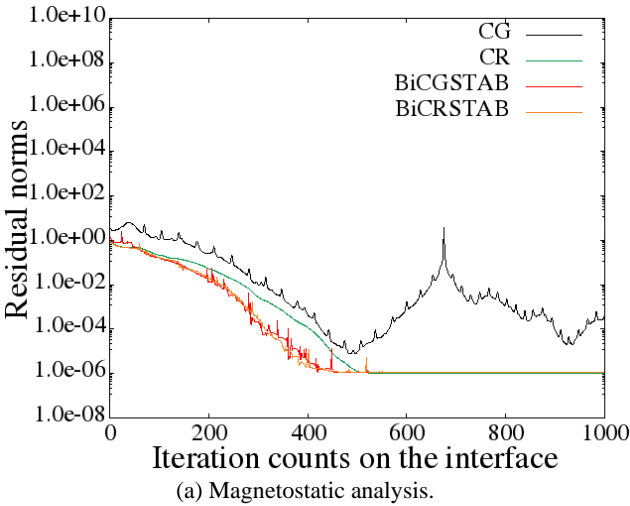
4. 数値計算例

数値計算例として TEAM20 モデル[22]の静磁場解析(Magnetostatic), 無限長ソレノイドコイル[23]の $A-\phi$ 法での時間調和渦電流解析(TH_Eddy), TEAM29 モデル[24]の高周波電磁波解析(HF_EM)をそれぞれの反復法で解く. それぞれの有限要素方程式の特徴を表 2 に示す. モデルはいずれも四面体に分割され, それぞれの要素数は 857,468, 843,594, 838,803, 自由度はいずれも約 100 万自由度である. 解析には計算機(Intel Core i9-10900X [3.70GHz / 10Core], Intel X299 chipset, 256 GB メモリ[DDR4-2666 32 GB 8 枚]) 1 台を用い, 内部で MPI による並列処理を行う. 解析には 8 コア用いることとし, それぞれのメッシュは 8 parts, 各 part 内は 1,000 subdomains に分割する. 静磁場解析は, CG 法, CR 法, BiCGSTAB 法, BiCRSTAB 法に基づく階層型領域分割法で解く. 時間調和渦電流解析, 高周波電磁波解析は COCG 法, COCR 法, BiCGSTAB 法, BiCRSTAB 法, COCGSTAB 法, COCRSTAB 法に基づく階層型領域分割法で解く. 前処理はいずれも簡易対角スケーリング前処理[25]である. 収束判定値はそれぞれ静磁場解析 $1.0\text{e-}05$, 時間調和渦電流解析 $1.0\text{e-}03$, 高周波電磁波解析 $1.0\text{e-}07$ とする. 部分領域の有限要素解析には, 静磁場解析では ICC 前処理(加速係数 1.2)付き CG 法(収束判定値 $1.0\text{e-}09$), 時間調和渦電流解析では ICC 前処理(加速係数 1.2)付き COCG 法(収束判定値 $1.0\text{e-}09$), 高周波電磁波解析では直接法(LDL 分解)をそれぞれ用いる.

表 2. 有限要素方程式の特徴.

	Matrix	Singular	DOFs on
Magnetostatic	Symmetric Real	Yes	Edges
TH_Eddy	Symmetric Complex	Yes	Edges Apexes
HF_EM	Symmetric Complex	No	Edges

DOFs: Degrees of freedom



収束履歴, 収束までの反復回数と計算時間をそれぞれ 図 6, 表 3 に示す. 収束履歴には, 比較のため CG 法, CR 法, COCG 法, COCR 法の履歴も描画している. また収束の特徴を確認するため, 収束後の履歴も描画している. 静磁場解析では CG 法, CR 法よりも積型反復法の収束までの反復回数が減っているが, 計算時間は短くななかった. 時間調和渦電流解析では BiCGSTAB 法, COCGSTAB 法の反復回数が COCG 法, COCR 法より少

なくなったが、計算時間は短くなっていない。一方、高周波電磁波解析では COCG 法, COCR 法よりも積型反復法が早く収束し、計算時間も短くなった。収束までの計算時間は COCG 法と比較して概ね 9 分の 1, COCR 法と比較して概ね 2 分の 1 であった。また残差ノルムは有効数字 7 桁で出力させている。BiCGSTAB 法と COCGSTAB 法, BiCRSTAB 法と COCRSTAB 法は、時間調和渦電流解析では 1,000 反復まで履歴がよく一致しているが、高周波電磁波解析では途中まで履歴がよく一致し反復が進むと次第にずれていくことが見て取れる。

表 3. 収束までの反復回数と計算時間.

(a) Magnetostatic analysis.		
	# of iterations	Time [s]
CG	481	53.5
CR	447	50.1
BiCGSTAB	361	80.4
BiCRSTAB	365	81.1

(b) Time-harmonic eddy current analysis.		
	# of iterations	Time [s]
COCG	266	78.7
COCR	261	77.3
BiCGSTAB	241	142
BiCRSTAB	285	168
COCGSTAB	241	142
COCRSTAB	285	168

(c) High-frequency electromagnetic analysis.		
	# of iterations	Time [s]
COCG	190	25.9
COCR	43	6.46
BiCGSTAB	8	2.84
BiCRSTAB	8	2.97
COCGSTAB	8	2.85
COCRSTAB	8	2.96

5. おわりに

安定化系積型反復法に基づく階層型領域分割法の効果を検証した。静磁場解析、時間調和渦電流解析では反復回数が減るケースがあっても計算時間の短縮まではできなかったが、高周波電磁波解析では COCG 法, COCR 法よりも反復回数、計算時間とも削減できた。

今後は GPBiCG 法のような一般化系積型反復法などの階層型領域分割法への適用に取り組む。

謝辞

本研究の一部はJSPS 科研費 23K24861, 22K19779, 24K14980の助成を受けて実施された。ここに記し、感謝の意を示す。

参考文献

[1] R. S. Varga: Factorization and normalized iterative methods, Boundary Problems in Differential Equations (R. E. Langer, ed.), pp.121-142, University of Wisconsin Press, Madison, 1960.

[2] M. R. Hestenes and E. Stiefel: Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol.49, No.6, pp.409-436, 1952.

[3] H. A. Vorst and J. B. M. Melissen: A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax=b$ and where A is symmetric complex, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.26, Issue 2, pp.706-708, 1990.

[4] S. C. Eisenstat, H. C. Elman and M. H. Schultz: Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol.20, Issue 2, pp.345-357, 1983.

[5] T. Sogabe and S.L. Zhang: A COCR method for solving complex symmetric linear systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.199, No.2, pp.297-303, 2007.

[6] M. Ogino, A. Takei, H. Notsu, S. Sugimoto and S. Yoshimura: Finite element analysis of high frequency electromagnetic fields using a domain decomposition method based on the COCR method, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol.61, pp.173-181, 2013.

[7] R. Fletcher: Conjugate gradient methods for indefinite systems, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol.506, pp.73-89, Springer-Verlag, 1976.

[8] T. Sogabe, M. Sugihara and S.L. Zhang: An extension of the conjugate residual method to nonsymmetric linear systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.226, Issue 1, pp.103-113, 2009.

[9] 曾我部知広, 張紹良: Bi-CR法の積型反復法について, 数理解析研究所講究録, 1362巻, pp.22-30, 2004.

[10] 曾我部知広, 藤野清次, 張紹良: COCG法の積型反復法について, 数理解析研究所講究録, 1320巻, pp.201-211, 2003.

[11] 阿部邦美, 曾我部知広, 藤野清次, 張紹良: 非対称行列用共役残差法に基づく積型反復解法, 情報処理学会論文誌 SIG, Vol.48, No.8, pp.11-21, 2007.

[12] 渡辺浩太, 五十嵐一: 電磁界解析のための前処理付き並列クリロフ部分空間法, 計算数理工学論文集, Vol.7, No.2, pp.239-242, 2008.

[13] H.A. van der Vorst: Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol.13, Issue 2, pp.631-644, 1992.

[14] R. Glowinski, Q.V. Dinh and J. Periaux: Domain decomposition methods for nonlinear problems in fluid dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.40, Issue 1, pp.27-109, 1983.

[15] A. Quarteroni and A. Valli: Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Clarendon

- Press, Oxford, 1999.
- [16] A. Toselli and O. Widlund: Domain Decomposition Methods: Algorithms and Theory (Springer Series in Computational Mechanics), Springer, 2004.
- [17] R. Shioya and G. Yagawa: Iterative domain decomposition FEM with preconditioning technique for large scale, problem, *ECM'99 Progress in Experimental and Computational Mechanics in Engineering and Material Behaviour*, pp.255-260, 1999.
- [18] S. Yoshimura, R. Shioya, H. Noguchi and T. Miyamura: Advanced general-purpose computational mechanics system for large-scale analysis and design, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.149, Issue 1, pp.279-296, 2002.
- [19] A.M.M. Mukaddes, M. Ogino, M. H. Kanayama and R. Shioya: A scalable balancing domain decomposition based preconditioner for large scale heat transfer problems, *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, Vol.49, No.2, pp.533-540, 2006.
- [20] S. Sugimoto, A. Takei and M. Ogino: Finite element analysis with tens of billions of degrees of freedom in a high-frequency electromagnetic field, *Mechanical Engineering Letters*, Vol.3, 2017.
- [21] S. Sugimoto, A. Takei and M. Ogino: High-Frequency Electromagnetic Field Analysis with 130 Billion of Degrees of Freedom, *The 38th JSST Annual Conference, International Conference on Simulation Technology*, pp.290-295, 2019.
- [22] 回転機電磁界解析ソフトウェアの適用技術調査専門委員会: 回転機電磁界解析ソフトウェアの適用技術, 電気学会技術報告, No.486, 1994.
- [23] 金山寛: 計算電磁気学 岩波講座 現代工学の基礎 <空間系 IV>, 岩波書店, 2000.
- [24] Y. Kanai: Description of TEAM Workshop Problem 29: Whole body cavity resonator, *TEAM Workshop in Tucson*, 1998.
- [25] H. Kanayama and S. Sugimoto: Effectiveness of A-phi Method in a parallel computing with an iterative domain decomposition method, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.42, No.4, pp.539-542, 2006.