

IGA重合パッチ法 (S-IGA) による三次元表面亀裂の解析

Three-dimensional Surface Crack Analyses using the S-Version Isogeometric Analysis (S-IGA)

砂岡 優輔¹⁾, 土山 雄飛²⁾, 黒澤 太加志³⁾, 乙黒 雄斗⁴⁾, 岡田 裕⁵⁾
Yusuke Sunaoka, Yuhi Tsuchiyama, Takashi Kurosawa, Hiroshi Okada and Yuto Otaguro

- 1) 修(工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)
- 2) 修(工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)
- 3) 学士(工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)
- 4) 博(工) 東京理科大学 創域理工学部 助教 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)
- 5) Ph.D. 東京理科大学 創域理工学部 教授 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

In this paper, a study on three-dimensional crack analysis using the S-Version Isogeometric Analysis (S-IGA). The formulation of S-IGA and associated numerical techniques are briefly mentioned. The results of embedded crack analyses demonstrate that S-IGA is a highly accurate analytical methodology for linear fracture mechanics problems, especially when the crack front has a steep curvature.

Key Words : IGA (Isogeometric Analysis), Linear Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor

1. はじめに

本報告では、筆者らが研究開発を進めてきたIGA重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis, S-IGA) の三次元亀裂問題への適用とその精度に関する議論を表す。

IGA重合パッチ法はIsogeometric Analysis (IGA)による解析モデル構築の簡単化を目的とし、筆者らのグループにより提案されてきた[1, 2]。IGAはCAD形状表現で多用される、B-Spline関数やNURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)関数を有限要素法近似の基底関数として用いるものである。Hughesら[3]によって提案され、高精度な解析ができることで知られている。

一方、破壊力学解析では、亀裂を局所的フィーチャーとし、構造解析モデルに後から挿入する場合がある。IGA解析モデルで使用されるB-Spline/NURBSボリュームは、三次元問題では六面体で構成される。そのため、一般に六面体有限要素だけを用了有限要素法解析モデル生成が困難であると同様に、B-Spline/NURBSボリュームだけで亀裂を表現することは容易でない。そこで、X-FEMと同様に拡充関数の導入により亀裂を表現するX-IGA[4]や局所的なリファインのためのT-Splineを用いる方法[5]が提案されてきた。

一方、筆者らは、IGAによる破壊力学解析高精度化の観点から、亀裂の応力特異性を表現できる特異パッチ法[6]や三次元J積分のための領域積分法[7]の提案をしてきた。さらに、亀裂などの局所フィーチャー挿入のため、ローカルIGA解析モデルを生成してグローバルIGA解析モデルに重ね合わせる重合パッチ法 (S-IGA) が筆者の研究グループで提案され[1, 2]、破壊力学解析[8, 9]へと発展してきた。しかしながら、現在まで、重合パッチ法による三次元亀裂の解析例は発表されていない。実用的な破壊力学解

析を実施するためには三次元解析が必須である。本報では、三次元線形破壊力学解析のためのS-IGA解析手法と解析結果、応力拡大係数計算精度について報告する。

2. IGA重合パッチ法の亀裂問題への適用

(1) IGAで使用するB-Spline/NURBS 基底関数

IGAの基底関数として用いるB-SplineとNURBS関数の特徴についてだけ述べる。自然座標系 ξ ($0 \leq \xi \leq \xi_{N-1}$) に対して、ノットベクトル $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}\}$ を定義する。 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}$ は非減少実数列である。本稿の議論では、 $\xi_0 = 0$ とする。

0次のB-Spline関数 $N_{l,0}(\xi)$ を次式のように書くことができる。

$$N_{l,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_l \leq \xi < \xi_{l+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

これを元に、 p 次のB-Spline関数 $N_{l,p}(\xi)$ を $(p-1)$ 次のもの $N_{l,p-1}(\xi)$ から次のように表すことができる。

$$N_{l,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_l}{\xi_{l+p} - \xi_l} N_{l,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{l+p+1} - \xi}{\xi_{l+p+1} - \xi_{l+1}} N_{l+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

例として、 $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$ の場合、二次のB-Spline基底関数を図1に示す。このとき、ノットベクトルの値で仕切られた区間、 $0 < \xi < 1, 1 < \xi < 2, 2 < \xi < 3$ をIGAの要素とよび、剛性行列計算のための数値積分を行う単位区間になる。なお、二次以上のB-Spline関数を使用すれば、有限要素法の場合と異なり、基底関数の微係数も要素境界で連続になる。三次の関数では、二階微分まで連続である。

NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) 関数 $R_{l,p}(\xi)$ は、B-Spline 関数を元に重み ω_l ($l = 0, 1, 2, \dots, N-p-2$) を用い、次式で与えられる。

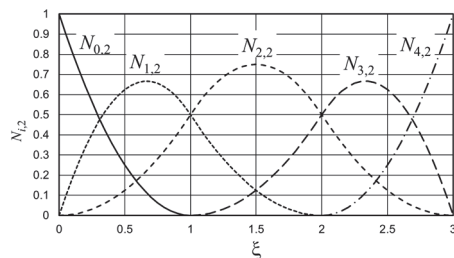


図-1 B-Spline 基底関数の一例 (2次, ノットベクトル $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$)

(2) IGA 重合パッチ法による亀裂解析

Okadaら[10]では構造全体を表すグローバル有限要素法解析モデルに亀裂などの局所フィーチャーを表すローカル有限要素法解析モデルを重ね合わせる重合メッシュ法解析の応用が示された。同様の考え方を、IGA解析に適用し、図2に示すような構造全体を表すグローバルIGA解析モデル (領域 Ω^G) と局所フィーチャーを表すローカルIGA解析モデル (領域 Ω^L) を重ね合わせた解析手法を考える。亀裂問題解析の場合、亀裂による自由表面をローカルIGA解析モデルだけで表現することが可能である。グローバル IGA 解析モデルだけの領域 $\Omega^G - \Omega^L$ とローカル IGA 解析モデル領域で変位関数を次式のように表す。

$$u_i(x_k) = \begin{cases} u_i^G(\xi^G, \eta^G) & (x_k(\xi^G, \eta^G) \in \Omega^G - \Omega^L) \\ u_i^G(\xi^G, \eta^G) + u_i^L(\xi^L, \eta^L) & (x_k(\xi^G, \eta^G) = x_k(\xi^L, \eta^L) \in \Omega^L) \end{cases} \quad (3)$$

仮想変位 $\delta u_i(x_k)$ も同様とする。

これらを仮想仕事の原理式で用いる。なお、 Ω , D_{ijkl} , ε_{kl} , T_i は問題領域、Hooke の法則を表す四階テンソル、ひずみ、境界 $\partial\Omega_t$ 上で与えられるトラクションベクトルである。 δ は変分を表す。 $\partial\Omega_t^{L-crack}$ と $T_i^{L-crack}$ は亀裂面と亀裂面上の分布力を表す。なお、亀裂面の変位の不連続はローカル IGA 解析モデルだけで表現する。また、分布力がゼロの場合、亀裂面は自由表面である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \delta u_i T_i d(\partial\Omega_t) \\ &+ \int_{\partial\Omega_t^{L-crack}} \delta u_i T_i^{L-crack} d(\partial\Omega_t^{L-crack}) \end{aligned} \quad (4)$$

IGAで用いるB-SplineやNURBS関数を用いて離散化し、最終的な離散化方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{GG} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^G \\ \mathbf{U}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^G \\ \mathbf{F}^L \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式(5)中、 $[\mathbf{K}^{GG}]$ と $[\mathbf{K}^{LL}]$ はグローバルパッチとローカルパッチに対する剛性行列である。 $\{\mathbf{U}^G\}$ と $\{\mathbf{U}^L\}$ はグローバルIGA解析モデルとローカルIGA解析モデルのコン

トリールポイントで定義される変位パラメータ、 $\{\mathbf{F}^G\}$ と $\{\mathbf{F}^L\}$ は外力ベクトルである。亀裂面荷重は $\{\mathbf{F}^L\}$ だけで表現される。 $[\mathbf{K}^{GL}] (= [\mathbf{K}^{LG}]^T)$ はグローバルとローカルパッチの結合剛性行列である。それぞれのひずみ-変位パラメータ関係マトリクスを $[\mathbf{B}^G]$ と $[\mathbf{B}^L]$ とすれば、 $[\mathbf{K}^{LG}]$ は次式で与えられる。

$$[\mathbf{K}^{LG}] = \int_{\Omega^L} [\mathbf{B}^L]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^G] d\Omega^L \quad (6)$$

剛性行列生成に数値積分はグローバルIGA解析モデルやローカルIGA解析モデルのIGA要素を用いてガウス数値積分法を用いる。本報ではグローバルとローカルIGA解析モデルを二次基底関数で表現した。この場合、 $[\mathbf{K}^{GG}]$ と $[\mathbf{K}^{LL}]$ は 4×4 ガウス数値積分を用いた。 $[\mathbf{K}^{LG}]$ はローカルIGA解析モデルのIGA要素を用いて $10 \times 10 \times 10$ ガウス数値積分を試行し、もし全ての積分点が1つのグローバルIGA解析モデルの要素内にある場合は 4×4 ガウス数値積分に変更する。

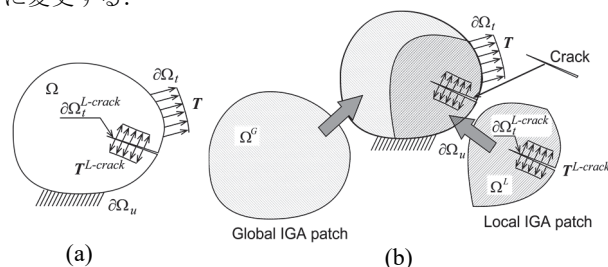


図-2 境界値問題と亀裂問題に対する S-IGA の解析モデル重ね合せの概念図 (a) 境界値問題, (b) 重ね合わせの概念図)

3. 相互積分法による応力拡大係数計算

領域積分法計算法によるJ積分計算法 (Tabazaら[7]) を相互積分法に拡張し、応力拡大係数計算計算を行った。相互積分法では、釣合状態にある2つの弾性問題の解(1)と(2)を仮定する。弾性問題(1)を実場とよび、S-IGA解析結果、弾性問題(2)はモードI, II又はIII亀裂変形を仮定し、 $K_I^{(2)} = 1$, $K_{II}^{(2)} = K_{III}^{(2)} = 0$ のようにすることで、実場の応力拡大係数 $K_I^{(1)}$ を抽出することができる。 $K_{II}^{(1)}$ や $K_{III}^{(1)}$ も同様である。積分領域を V , 仮想亀裂進展面積を δA , 材料のヤング率とポアソン比を E と ν とし、相互積分法を次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} & \frac{2}{E'} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) + \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{G} \\ &= -\frac{1}{\delta A} \left[\int_V \left(W^{(1,2)} \delta_{1i} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\left(E' = \frac{E}{1-\nu^2}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}, W^{(1,2)} = D_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{kl}^{(2)} \right)$$

積分領域 V は図3に示すように亀裂前縁に接するローカルIGAパッチ内で設定する薄いスライス状の体積である。仮想亀裂進展は、応力拡大係数の計算点を頂点とした三角形である。相互積分法計算では、ローカルIGA要素を用いて $4 \times 4 \times 4$ ガウス数値積分を行った。

crack front

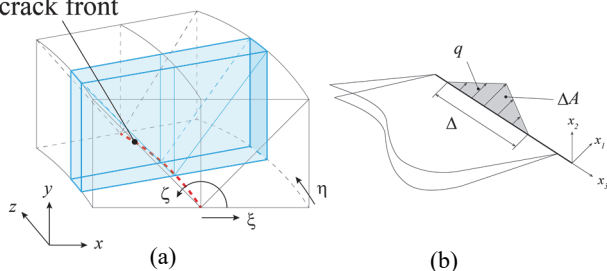


図-3 スライス状の積分領域概念図と仮想亀裂進展面積 (ΔA) [(a) スライス状積分領域, (b) 仮想亀裂進展面積]

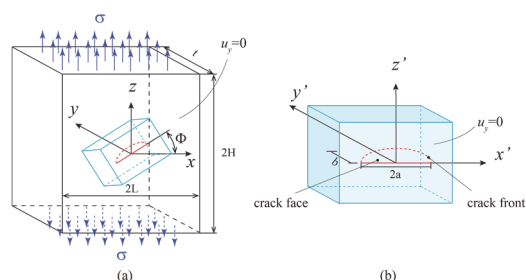


図-4 遠方で一様引張荷重を受ける弾性ブロック中の傾斜埋込楕円亀裂問題[(a) 弾性ブロック, 埋込亀裂のためのローカル IGA 解析モデルの重ね合わせ, (b) ローカル IGA 解析モデルの形状と楕円亀裂]

4. 埋込亀裂問題解析

理論解と比較する目的のもと、図4に示すような、遠方で一様分布荷重を受ける弾性体ブロック中の傾斜楕円埋込亀裂の問題を解析した。亀裂の傾斜角 Φ は $\pi/4$ である。なお、対称性から対称境界条件の下で1/2領域の解析を実施した。また、亀裂に対して弾性ブロック寸法が十分大きくなるよう、弾性体ブロックの幅 L と亀裂長さ a の比(a/L)と亀裂深さ b と厚さ t の比(b/t)を0.05に、高さ H を幅 L の0.8倍に設定した。図5に亀裂のアスペクトレシオ b/a が1のときのIGAパッチと要素分割を表す。赤線は亀裂前縁、青と緑は通常のパッチ境界の稜線と亀裂の応力特異性を表現できる特異パッチ[6]境界の稜線、黒線はIGA要素境界を表す。なお、グローバルとローカルIGA解析モデル両方で2次の基底関数を用いた。図6に亀裂前縁のモードI, II, III応力係数分布を表す。なお、すべての応力拡大係数を、遠方で一様分布荷重を受ける無限弾性体中に存在する円盤状亀裂のモードI応力拡大係数で正規化して表した。なお、 $b/a = 0.1$ の楕円亀裂の解析結果は、正規化のために円盤状亀裂半径を a とした。図中の赤実線は無限弾性体中の亀裂の理論解を表す。

図6より、アスペクト比が1の場合では、S-IGAの解と理論解がグラフ上で完全に一致している。アスペクト比

が0.1の場合、亀裂角 β が10度未満の部位ではS-IGAの解析結果と理論解に若干の差異が見られる。これは、亀裂前縁の曲率が急峻になる部位である。領域積分法によるJ積分解析で同様の問題があったが、有限要素法解析結果よりも高精度であった (Tabazaら[7])。

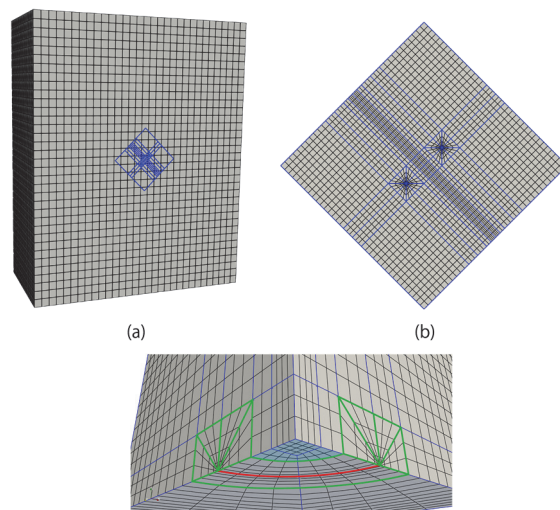


図-5 赤線を亀裂前縁曲線、青線を通常のパッチ境界、緑線を特異パッチの境界として描いた、グローバル IGA 解析モデルとローカル IGA 解析モデル[(a) グローバル IGA 解析モデル, (b) ローカル IGA 解析モデルの正面図, (c) ローカル IGA 解析モデルの1/4 切断図]

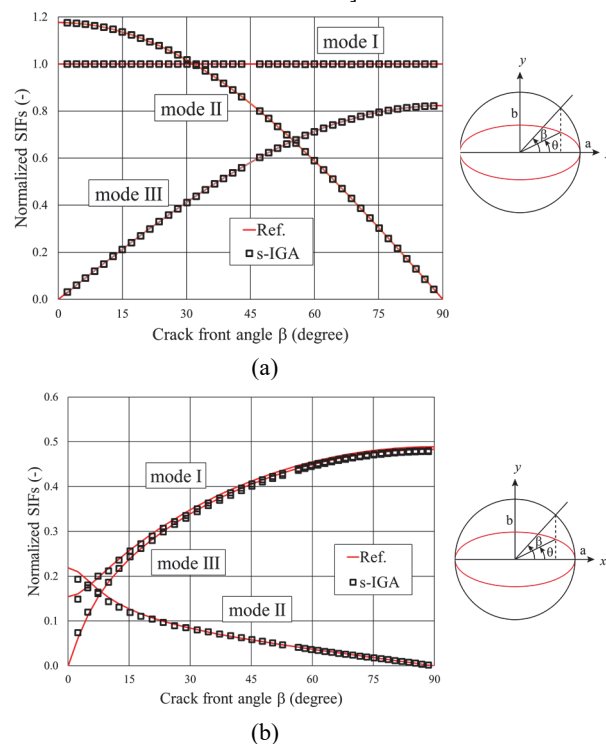


図-6 亀裂のアスペクト比が1と0.1のときの亀裂前縁応力拡大係数の分布[(a) アスペクト比1, (b) アスペクト比0.1]

5. まとめ

本報では、IGA重合パッチ法 (S-IGA) による三次元亀裂解析の概要とその結果を示した。S-IGAにより、IGAによる三次元亀裂解析モデルの構築を簡単化することができる。また、特異パッチ法[6]や領域積分法[7]を用いて、混合モード応力拡大係数を精度良く解析できる。さらに、IGAの離散化により亀裂前縁の曲率が急峻な場合でも精度よく応力拡大係数を計算することが可能であることが示された。

今後、三次元表面亀裂解析を実施する予定である。

謝辞: 本研究の一部はJSPS科研費22K03879の助成の下で実施されてきた。著者一同謹んで謝辞を述べる。

参考文献

- [1] 岡田裕, 中原大智, 渡邊梨乃, TABAZA OMAR: アイソジオメトリック解析による線形破壊力学解析(特異パッチと重合パッチ法の提案と解析精度に関する検討), 日本機械学会 34 回計算力学講演会 (CMD2021), 102, 2021.
- [2] 土山雄飛, 砂岡優輔, 乙黒雄斗, 岡田裕: 重合パッチ法(S-version Isogeometric Analysis, S-IGA)の基底関数次数最適化に関する研究, 計算工学講演会論文集, Vol. 28, D-03-03, 2023.
- [3] Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A., Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 194, No. 39-41, pp. 4135-4195, 2005.
- [4] Benson, D. J., Bazilevs, Y., De Luycker, E., Hsu, M. C., Scott, M., Hughes, T. J. R., Belytschko, T.: A generalized finite element formulation for arbitrary basis functions: From isogeometric analysis to XFEM, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 83, No. 6, pp. 765-785, 2010.
- [5] Scott, M. A., Li, X., Sederberg, T. W., Hughes, T. J. R.: Local refinement of analysis-suitable T-splines, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 213-216, pp. 206-222, 2012.
- [6] Okada, H., Nakahara, D., Nagashima, A., Watanabe, R., Sunaoka, Y., Yusa, Y., Ootoguro, Y.: Singular patch method for linear elastic fracture mechanics analysis using isogeometric analysis, Mechanical Engineering Journal, Vol. 9, No. 6, 2022.
- [7] Tabaza, O., Okada, H., Nakahara, D.: An IGA based domain integral method for the evaluation of the J-integral using the singular patch method, Mechanical Engineering Journal, Vol. 9, No. 6, 2022.
- [8] 黒澤太加志, 砂岡優輔, 土山雄飛, 乙黒雄斗, 岡田裕: S-IGA (S-version Isogeometric Analysis) を用いた線形破壊力学解析の高精度化に関する研究 (ローカルとグローバルパッチのサイズ比と要素細分化の影響), 計算工学講演会論文集, Vol. 28, F-05-02, 2023.
- [9] 砂岡優輔, 土山雄飛, 黒澤太加志, 乙黒雄斗, 岡田裕: IGA 重合パッチ法(S-version Isogeometric Analysis, S-IGA)による二次元線形破壊力学解析に関する研究 (ローカルパッチ領域の大きさが応力拡大係数計算精度に与える影響), 日本機械学会 36 回計算力学講演会 (CMD2023) 講演論文集, No.23-24, 2023.
- [10] Okada, H., Endoh, S., Kikuchi, M.: On fracture analysis using an element overlay technique, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 72, pp. 773-789, 2005.