

多点拘束法と重合メッシュ法の併用による 不整合メッシュ結合面の精度向上

Improving accuracy in joint surfaces of non-conforming mesh
by combining multi-point constraint method and s-version finite element method

山東篤¹⁾, 今井翔太²⁾, 石原尚²⁾

Atsushi Sando, Shota Imai and Nao Ishihara

1) 博(工) 和歌山工業高等専門学校 (〒644-0023 和歌山県御坊市名田町野島77, E-mail: sandou@wakayama-nct.ac.jp)

2) 和歌山工業高等専門学校 専攻科 (〒644-0023 和歌山県御坊市名田町野島77)

This study aims to improve analysis accuracy by superimposing a local mesh on a multi-point constraint model with low analysis accuracy. The governing equations of the proposed method were constructed by substituting the components of the multi-point constraint method into the terms related to the global mesh of the s-version finite element method. As a result of numerical experiments, the analytical accuracy of the analytical model in which the bonding surface of the mesh representing the hard material was set as the slave was significantly improved.

Key Words : S-version FEM, Multi-point constraint method, Nonconforming mesh

1. はじめに

複数の構造要素を一体化させた整合メッシュの生成には多大な労力を要する。モルタル有限要素法[1]に代表される多点拘束法は不整合メッシュをそのまま用いて構造解析することができる。具体的には構造要素毎に独立してメッシュ生成し、多点拘束条件を付与することでメッシュの面と面を接着して不整合メッシュを構成する。その際、2つの結合面にはマスター、スレーブの条件を設定する必要があるが、その設定によって同じメッシュであっても構造解析の結果が変わる特徴がある。簡易モデルを用いたパラメトリックスタディにより結合するメッシュの条件毎に解析精度が良好なマスター／スレーブの設定方針は示されているものの[2]、計算者にとっては計算上の内部設定にかかわらず同等の解析結果が得られる方が利便性の点からも望ましい。本研究では、多点拘束法単独で解析精度が低下する条件に対して多点拘束法と重合メッシュ法を併用した際の解析精度の確認と解析精度が改善するモデリングの把握を目指す。

2. 提案手法

(1) 多点拘束法

整合性を考慮しない2つのメッシュを結合するにあたり、マスター結合面およびスレーブ結合面の境界に課される多点拘束条件式は式(1)のような係数行列 \mathbf{C} で表される[3]。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_0 = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_A^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}_B(\mathbf{x}) d\Gamma$$

$\mathbf{N}_A(\mathbf{x})$ と $\mathbf{N}_B(\mathbf{x})$ は、式(2),(3)に示すように、それぞれスレーブ側の形状関数を格納した行ベクトルと、スレーブ側の形状関数 N_S^i と負符号のマスター側の形状関数 N_M^i を格納した行ベクトルである。

$$\mathbf{N}_A(\mathbf{x}) = [N_S^1(\mathbf{x}) \dots N_S^n(\mathbf{x})] \quad (2)$$

$$\mathbf{N}_B(\mathbf{x}) = [N_S^1(\mathbf{x}) \dots N_S^n(\mathbf{x}) \ -N_M^1(\mathbf{x}) \dots -N_M^n(\mathbf{x})] \quad (3)$$

多点拘束問題の基礎方程式は、2つのメッシュの剛性マトリックス \mathbf{K} とラグランジュ未定乗数 λ を含む式(4)のようになる。 \mathbf{u} , \mathbf{f} はマスターおよびスレーブの節点変位ベクトルおよび荷重ベクトルである。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

(2) 重合メッシュ法

重合メッシュ法は、解析モデル全体を表すグローバルモデルとその内部に貼り付けたローカルモデルを定義し、貼り付けた領域内の変位場を両モデルの変位の和で表す。これにより、貼り付けた領域内のズーミングによる解析精度の改善を図ることができる。重合メッシュ法の基礎方程式は式(5)のようになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^G \\ \mathbf{u}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{K}^G, \mathbf{K}^L$ は離散化されたグローバルメッシュとローカルメッシュの剛性マトリックス、 \mathbf{K}^{GL} は両メッシュの相互作用を表す連成項、 \mathbf{u} , \mathbf{f} はそれぞれ節点変位ベクトルおよび荷重ベクトルであり、各記号の上付き文字 G がグローバル、 L がローカルを表している。

(3) 多点拘束法と重合メッシュ法の併用

本研究では多点拘束法を適用した不整合メッシュを重合メッシュ法におけるグローバルメッシュに設定し、その内部にローカルメッシュを重ね合わせる。この場合、式(6)のように式(4)の行列とベクトルをそれぞれ(5)式の \mathbf{K}^G , \mathbf{u}^G , \mathbf{f}^G へ代入することになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^L & \mathbf{0} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \\ \mathbf{u}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (6)$$

この方程式を解いて得られる多点拘束メッシュの節点変位 \mathbf{u} を重合メッシュ法におけるグローバルメッシュの節点変位とみなし、位置を考慮してローカルメッシュの節点変位 \mathbf{u}^L と重ね合わせれば物理的な節点変位となる。

3. 計算例

(1) 解析モデルと調査内容

図1のような上下で物性値の異なる寸法2400 mm × 1200 mmの平面ひずみ長方形モデルに底面の固定と上面にY方向一様分布荷重60kNの境界条件を与えた解析モデルを設定する。本解析モデルは図2のように上側コンクリート部分と下側地盤部分を別々にメッシュ生成し多点拘束法で結合した不整合メッシュを構造解析すると、結合面の最大主応力分布が乱れる特徴がある。

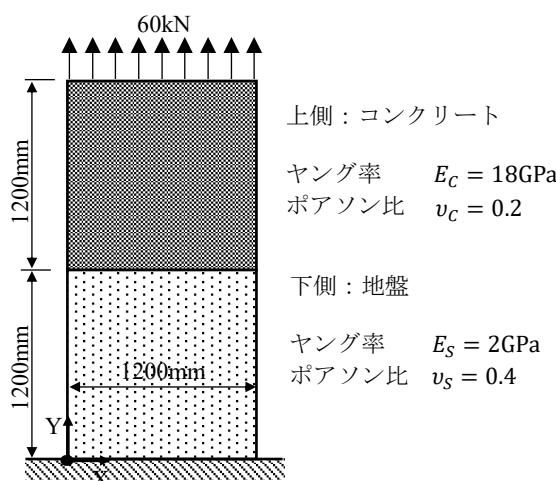


図1 物性値の異なる2次元平面ひずみモデル

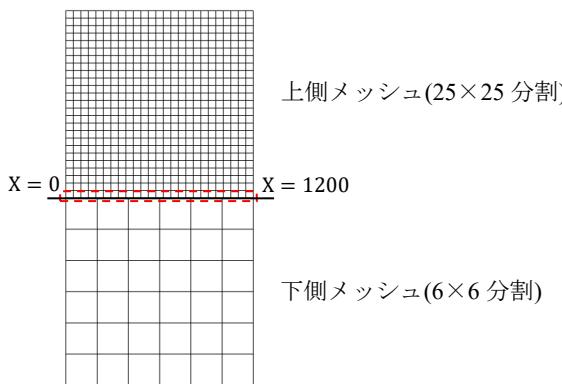


図2 中央部に結合面を持つ不整合メッシュ

以上を踏まえて提案手法により本解析モデルの高精度化を図る。図2の多点拘束された不整合メッシュをグローバルメッシュとして、メッシュ結合面を含むように図3に示すローカルメッシュを重ね合わせることで、3種類のメッシュで1つの解析モデルを構築する。

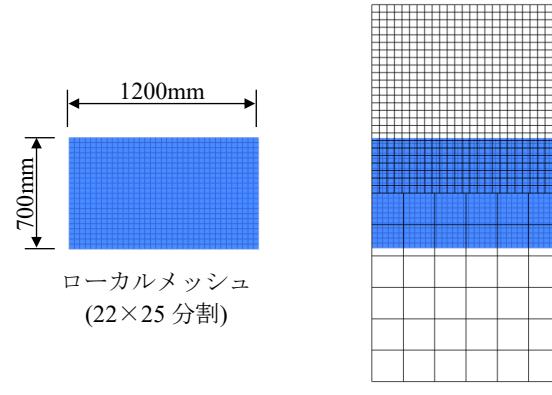


図3 提案手法のモデリング

(2) FEM参照解と多点拘束法単独の結果の比較

図2の不整合メッシュにおいて、微細な上側メッシュ結合面をスレーブに設定した解析結果 (MPC-U) と粗な下側メッシュ結合面をスレーブに設定した解析結果 (MPC-L) をFEM参照解と比較する。FEM参照解は長方形モデル全体を上側メッシュと同サイズで50×25分割した解析結果 (FEM-25) と、上半分を図2の上側メッシュと同じ25×25分割して下半分を6×25分割した整合メッシュによる解析結果 (FEM-6) の2つとする。比較対象は図2の上側メッシュ結合面のY方向節点変位分布および上側メッシュ結合面に接した要素の最大主応力とする。

図4は上側メッシュ結合面の節点位置Xに対するY方向節点変位分布を示している。変位の絶対値は粗メッシュのFEM-6が微細メッシュのFEM-25より小さくなっているが、MPC-UとMPC-Lの変位量はFEM-6よりさらに小さい。次に分布曲線の特徴として、MPC-Uは滑らかでなく下側メッシュの粗い分割の影響を受けて折れ線状の分布であるのに対し、MPC-Lにはその影響がなく滑らかな分布となっている。

図5は上側メッシュ結合面の要素中心位置に対する最大主応力分布を示している。FEM-25とFEM-6はほぼ一致しており、モデル下半分のY方向分割数は最大主応力分布に影響を与えないことが分かる。MPC-UとMPC-Lの最大主応力分布は共に波打ち状の誤差を含んでおり、特に端から6要素内側まではその影響が大きい。FEM参照解との一致度ではMPC-Lの方が近い。

MPC-UとMPC-Lの比較から、相対的にMPC-Lの方がFEM参照解に近い解析結果が得られた。文献[2]では物性値が異なるメッシュ同士の多点拘束では「軟らかい材料の面をスレーブとして選ぶ」のがよいとしており、本解析においてもその傾向が見られた。

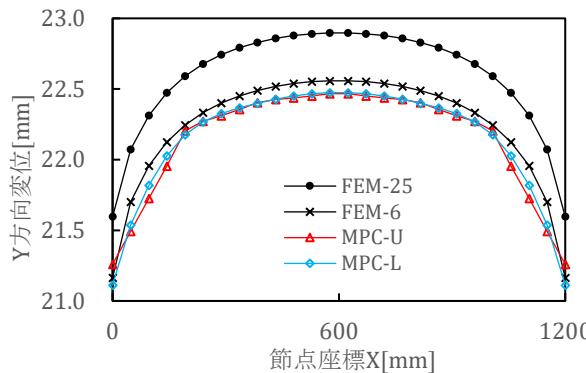


図4 FEM参考解と多点拘束法のY方向変位分布の比較

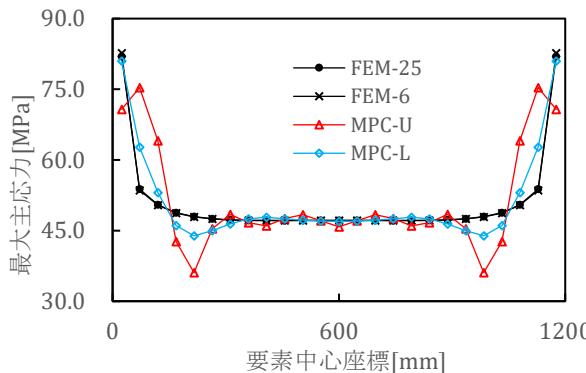


図5 FEM参考解と多点拘束法の最大主応力分布の比較

(3) 提案手法の解析結果

図3の提案手法で構築した不整合メッシュの解析結果をFEM参考解(FEM-25, FEM-6), 多点拘束法の結果(MPC-U, MPC-L)と比較し, ローカルメッシュを重ね合わせたことによる精度向上の効果を検証する。提案手法において, 上側メッシュ結合面をスレーブに設定した解析結果をSMPC-U, 下側メッシュ結合面をスレーブに設定した解析結果をSMPC-Lとする。

図6はFEM-25, FEM-6, SMPC-U, SMPC-Lの上側メッシュ結合面の節点位置Xに対するY方向節点変位分布を示している。SMPC-UとSMPC-Lの変位分布はFEM-25とFEM-6の中間に位置した。SMPC-Uにおいて, MPC-Uで見られた折れ線状の分布は解消され滑らかな分布に改善した。SMPC-Lの変位分布は大域的には参考解と同様の滑らかな曲線であるが, 両端節点の変位だけFEM-25に近いことから, 端部の解析誤差が大きいと考えられる。

図7はFEM-25, FEM-6, SMPC-U, SMPC-Lの上側メッシュ結合面の要素中心位置に対する最大主応力分布を示している。SMPC-Uの分布はFEM参考解とほぼ一致しており, MPC-Uで見られた波打ち状の誤差は消失した。一方, SMPC-Lの分布は端部以外ではMPC-Lと概ね近く, 両端部の応力値は参考解およびMPC-Lよりかなり低めに導出された。

以上の比較から, 提案手法による多点拘束モデルの精度向上が概ね確認できたが, 望ましいとされるスレーブ設定を行った多点拘束モデルの方が精度向上の効果が小さく, 両端部に至っては精度が低下する結果が得られた。

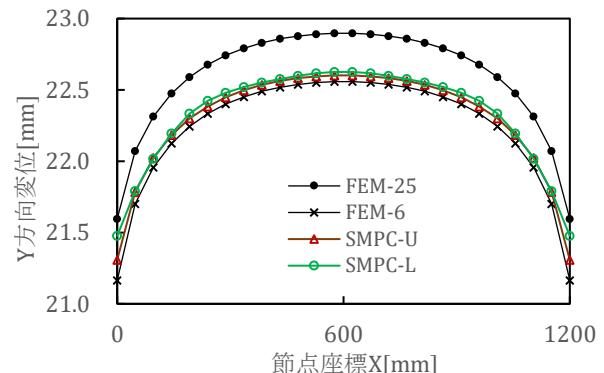


図6 提案手法のY方向変位分布

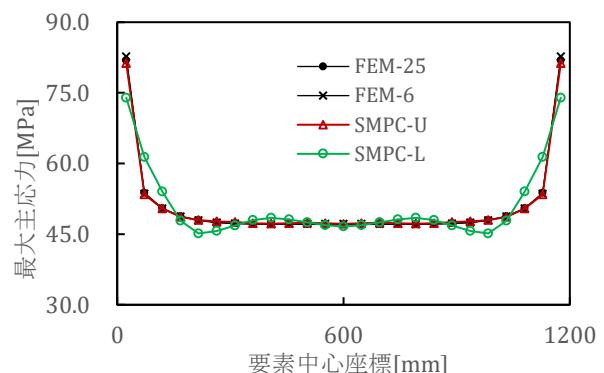


図7 提案手法の最大主応力分布

4. まとめ

本稿では解析精度が低い多点拘束モデルにローカルメッシュを重ね合わせることによる解析精度への影響を調査した。数値実験により得られた知見を以下に示す。

- 硬い材料の結合面をスレーブに選んだ提案手法の解析モデルは節点変位, 最大主応力共に多点拘束法単独での計算より解析精度が大幅に向上し, 特に波打ち状の誤差が目立った最大主応力は提案手法により参考解にほぼ一致した。
- 軟らかい材料の結合面をスレーブに選んだ提案手法の解析モデルは節点変位の絶対値は参考解に近づいたものの応力分布の精度向上はほとんど見られず, 両端の節点変位と最大主応力に至っては提案手法を用いることで誤差が拡大した。

参考文献

- [1] Peter Wriggers; Computational Contact Mechanics, Springer, 2006.
- [2] 坂敏秀, 山東篤, 小磯利博: 面対面の多点拘束を用いた有限要素法の静的問題での精度検証, 鹿島技術研究所年報, 第68号, pp.77-86, 2020.
- [3] 山東篤, 坂敏秀, 高橋容之, 小磯利博, 三角形分割に基づく数値積分を用いた三次元問題における面対面の多点拘束法, 日本計算工学会論文集, 2020巻, pp.20200016, 2020.