

# 粉碎機シミュレーションのための 界面捕捉型の摩耗変形手法

Interface Capturing Wear Model  
for Simulation of Grindng Machines

塩入一希<sup>1)</sup> 大村浩之<sup>2)</sup> 浅井光輝<sup>3)</sup> 三目直登<sup>4)</sup>  
Kazuki Shioiri, Hiroyuki Ohmura, Mitsuteru Asai and Naoto Miysume

<sup>1)</sup>アシザワ・ファインテック株式会社 (〒275-8672 千葉県習志野市茜浜1-4-2, E-mail: k-shioiri@ashizawa.com)

<sup>2)</sup>防災科学技術研究所 (〒305-0006 茨城県つくば市天王台3-1)

<sup>3)</sup>九州大学大学院 工学研究院社会基盤部門 准教授 ((〒819-0395 福岡市西区元岡744)

<sup>4)</sup>筑波大学 システム情報系 助教 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

It is important to consider the equipment wear in grinding machines to maintain quality and control operational costs. In the conventional wear simulation, mesh deformation is applied using wear laws. There is a problem that the mesh is broken when large mesh deformations occur. We propose the wear simulation model which represents shape deformation by the interface capturing method in this study. The proposed model is robust because the model deforms equipment shape without requiring mesh deformation. Moreover, proposed model reduces computational costs by coupling with IB-DEM (Impulse-Based Discrete Element Method) which allows for a larger time step size than conventional DEM. We demonstrate the wear results when significant shape deformations occur due to collision with beads. We verify the proposed model by comparing the numerical results with actual worn parts by applying to the dry bead mill.

**Key Words :** Interface capturing, Shape deformation, Wear, Collision, Discrete Element Method

## 1. はじめに

産業用の粉碎機は装置内部で発生する固体粒子と装置部品の衝突によって摩耗が避けられない機械である。特に衝突頻度を高めるためにビーズを利用したビーズミル[1]は、硬質セラミックなどで作られたビーズと装置部品の衝突による摩耗が著しい。粉碎機は独自の装置形状によって粉碎機能を発揮する装置であるため[2]、摩耗によって形状が変化することで粉碎性能が低下する問題を持つ。また、摩耗粉が製品へ混入することで製品品質を低下させる問題が存在する[3]。粉碎機の摩耗に関しては実験による検討がされているが、長時間の実験が必要なことから検証費用が大きくなる問題を抱えている。一方で、近年では数値計算によって摩耗を評価する研究がされている。粉碎機に適用した摩耗の数値計算の研究では、固体粒子と部品の衝突で生じた負荷を利用して摩耗による部品の形状変化を時間連続的に評価している[4,5,6]。この方法では、おもにシェル要素などの格子を用いて装置壁面を表現し、格子節点を移動することで摩耗による形状変化を表現している。そのため、大きな変形を表現する際に格子が潰れることにより計算が破綻する問題を持つ。

そこで本研究では、粉碎機の摩耗シミュレーションを目的に、装置壁面の形状変化を柔軟に表現することが可能な界面捕捉法型摩耗モデル ICWM (ICWM:Interface Capturing Wear Model) を提案する。本研究では、多相流体解析などに用いられる Level-set 法 [7] を応用することで摩耗に関連する力学と装置の形状変化を結びつ

けるモデルを開発した。界面捕捉型の変形表現を用いることで計算破綻が起こらない頑健な計算が可能となる。具体的には、剛体移動する装置壁面と粒子との距離を陰関数で表現する SDF 壁モデル (SDF:Signed Distance Function)[8] を適用し、粒子と装置壁面との衝突エネルギーから計算領域に配置された SDF の値を増減することで摩耗による装置壁面の形状変化を再現する。このとき、摩耗は時間的な変化が極めて遅い現象であり、実際の摩耗現象を良く再現する摩耗変形量と計算による変形量を同期させると計算対象時間が膨大になり現実的ではない。そこで頑健な変形表現を用いる利点を活かし、計算の中で取り扱う摩耗変形量は力学的な特性を担保したまま許容される大きな変形を課す。これによって、計算対象となる摩耗現象の時間を短縮し、計算コストを低減する。また、SDF から装置壁面を構成する部品の体積へ容易に変換できることから、摩耗による体積の経時変化を定量的に算出することができ、粒子の衝突エネルギーなどを用いて粉碎性能の時間変化を定量的に予測することができる。

以下では提案する ICWM の数理と数値計算法について記し、検証のために実施した粉碎機の摩耗シミュレーションについて説明する。

## 2. ICWM:界面捕捉型摩耗モデル

### (1) 陰関数を用いた剛体壁面境界の表現

粉碎機の装置壁面を表現するモデルとして、SDF 壁モデル [8] を適用した。

領域  $\Omega$  に対して、物体の内外の境界を  $\partial\Omega$ 、物体内部領域を  $\Omega_-$ 、物体外部領域を  $\Omega_+$  とする。時刻  $t$  のとき、領域内の任意の位置  $x$  における符号付距離関数(SDF:Signed Distance Function) $\phi(t, x)$  は

$$\begin{cases} \phi(t, x) > 0 & x \in \Omega_+ \\ \phi(t, x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ \phi(t, x) < 0 & x \in \Omega_- \end{cases} \quad (1)$$

とする。SDF は十分滑らかで次の Eikonal 方程式

$$|\nabla\phi(t, x)| = 1 \quad (2)$$

を満たす関数である。一辺が  $h$  の長さの立方体で構成された構造格子を領域内へ生成し、格子の節点に SDF を配置する。格子内の任意の位置における壁からの最短距離は、周囲の節点が持つ SDF から線形補間することによって求める。求めた SDF を用いて粒子との衝突を検知し、摩耗計算に必要な衝突の物理量を求める。

## (2) 隠関数を用いた境界変形の表現

壁境界は SDF がゼロの等値面であり

$$\phi(t, x) = 0 \quad (3)$$

と表す。境界面の変形は、この式を時間微分することで得られ

$$\frac{\partial\phi(t, x)}{\partial t} + \nabla\phi(t, x) \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (4)$$

のように Hamilton-Jacobi 方程式となる。境界面が法線方向に移動する際の速さを表す速度関数  $\xi_n$  を用いると、この式は

$$\frac{\partial\phi(t, x)}{\partial t} + \xi_n |\nabla\phi(t, x)| = 0 \quad (5)$$

と書き換える。速度関数  $\xi_n$  を粒子と壁面の衝突における物理量と関連付けることで、摩耗による壁面の変形を計算することができる。

## (3) 摩耗則による摩耗変化量の同定

境界が変形する際の時間当たりの変形量、つまり速度関数  $\xi_n$  と摩耗現象を関連付ける検討をおこなう。

一般に摩耗とは固体表面の機械的相互作用により材料が徐々に除去される現象であり、非常に複雑な現象であるためその物理的メカニズムはまだ完全に理解されていない。一方で、様々な実験やその考察からさまざまな法則化が研究してきた [9]。多くの摩耗則では、壁に衝突する粒子の衝突エネルギーに比例して微小な体積が除去されると考えられている。本研究ではビーズミルの摩耗解析の既往研究 [4,5,6] で検討された Finnie 則 [10] を適用した。

Finnie 則では、壁に衝突する粒子の衝突角度に依存して摩耗量が変動する。粒子が壁面に衝突する際の衝突角度  $\theta$  は図-1 のように表され、粒子  $i$  と壁境界  $\partial\Omega$  の相対速度  $v_{i-\partial\Omega}$  と壁面からの法線方向ベクトル  $n_\phi$  を用いて

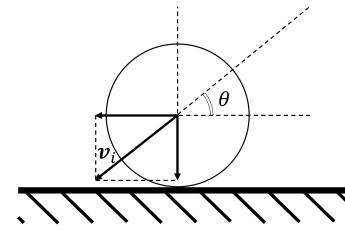


図-1 衝突角度の模式図

$$\theta = \arcsin\left(\frac{|v_{i-\partial\Omega} \cdot n_\phi|}{|v_{i-\partial\Omega}|}\right) \quad (6)$$

と定義できる。節点  $k$  において、時間増分  $\Delta t$  間で衝突が検出された粒子  $i$  からの作用によって除去される Finnie 則の摩耗体積  $\Delta V_k$  は

$$\Delta V_k = \begin{cases} \beta \frac{m_i}{2} |v_{i-\partial\Omega}|^2 (\sin(2\theta) - 3 \sin^2(\theta)) & \tan(\theta) \leq \frac{1}{3} \\ \beta \frac{m_i}{2} |v_{i-\partial\Omega}|^2 \left(\frac{\cos^2(\theta)}{3}\right) & \tan(\theta) > \frac{1}{3} \end{cases} \quad (7)$$

となる [10]。ここで、 $m_i$  は粒子  $i$  の質量であり、 $\beta$  は摩耗定数である。Finnie の研究では、摩耗定数  $\beta$  は衝突する粒子や壁面を構成する板の材料物性に基づいて定まる定数であるが、本研究では衝突が摩耗に影響する程度を調整するパラメータとして用いた。

式 (7) に示す摩耗体積を式 (5) に示した速度関数に関連付ける。ICWM では、壁面に粉碎媒体が衝突した際に適用した摩耗則に従って摩耗体積  $\Delta V$  に比例して各節点の SDF を増減させることで、装置内の部品が摩耗によって変形する様子を表現する。摩耗体積  $\Delta V$  を速度関数として用いることで、式 (5) は

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta V |\nabla\phi| = 0 \quad (8)$$

となる。これが、ICWM の支配方程式である。ICWM では摩耗体積  $\Delta V$  に他の摩耗則を適用することで容易に摩耗現象との関連付けを変更可能である。

## (4) ICWM における差分法を用いた摩耗変形の計算

本研究では式 (8) を解くために、SDF が節点に配置されたコロケート型格子を差分法に基づいて離散化した。式 (8) の第一項には一次の前進差分を、第二項には Allaire らの風上差分 [11] を適用した。それぞれの節点  $k$  に対する離散化された方程式は

$$\phi_k^{t+\Delta t} = \phi_k^t - \Delta t [\max(\Delta V_k, 0) \nabla_k^+ + \min(\Delta V_k, 0) \nabla_k^-] \quad (9)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \nabla_k^+ &= [\max(D^{-x}\phi_k^t, 0)^2 + \min(D^{+x}\phi_k^t, 0)^2 \\ &\quad + \max(D^{-y}\phi_k^t, 0)^2 + \min(D^{+y}\phi_k^t, 0)^2 \\ &\quad + \max(D^{-z}\phi_k^t, 0)^2 + \min(D^{+z}\phi_k^t, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\nabla_k^- = [\max(D^{+x}\phi_k^t, 0)^2 + \min(D^{-x}\phi_k^t, 0)^2 + \max(D^{+y}\phi_k^t, 0)^2 + \min(D^{-y}\phi_k^t, 0)^2 + \max(D^{+z}\phi_k^t, 0)^2 + \min(D^{-z}\phi_k^t, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

であり、 $D^\pm$  は各軸方向での前進差分および後退差分を表す微分演算子である。

SDF を更新する際には、時間増分  $\Delta t$ 、格子幅  $h$ 、摩耗体積  $\Delta V$  が以下の CFL 条件

$$\frac{\Delta t |\Delta V|}{h} < 1 \quad (12)$$

を満たす必要がある。この条件を満たす範囲で摩耗定数  $\beta$  を選ぶことで任意に摩耗の進行度合いを調整可能である。

式(9)に基づいて境界形状を変化させる際、局所的な変形によって境界形状の再現精度が低下する問題がある。ICWM はメッシュの直接変形と異なり界面捕捉型の変形手法であるため、どのような境界変形になっても計算が停止することはない。しかしながら、非物理的な変形が起こった際には衝突が発生しない物体内部に穴が形成されるような状況が生じ得る。この問題に対して、拡張成長速度場(EVF:Extension Velocity Field)を用いることで再現精度低下を軽減することが可能である[12]。拡張成長速度場の導入手順を模式的に図-2 に示す。境界上の節点  $l$  を位置  $p_l$  で表すものとする。図-2 の左図では、境界上の格子節点  $l$  にはそれぞれ速度関数  $\xi_{n,l}$  がすでに与えられていると仮定する。図中の節点に記された数値が速度関数の値を表している。図-2 の右図では、任意の位置  $x_k$  における節点  $k$  の速度関数  $\xi_{n,k}$  に対して、最近傍の境界上の節点  $l$  と同じ速度関数  $\xi_{n,l}$  の値を用いることで拡張成長速度場を導入しており、以下の式のように表され、拡張成長速度場を適用した後に式(9)を用いて SDF を更新することで再現精度低下を軽減することができる。

$$\xi_{n,k} := \xi_{n,l} \quad l \in \arg \min(|x_k - p_l|) \quad (13)$$

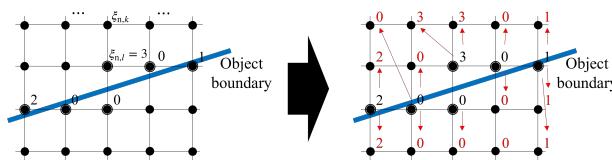


図-2 拡張成長速度場の適用の模式図

拡張成長速度場を用いた場合と用いない場合で SDF 等価面の変化の違いを模式的に図-3 にて示す。拡張成長速度場を用いずに局所的に大きな速度関数が与え続けられた場合、図-3 の右上図のようにゼロ等価面のみで変形が生じ、式(2)で表される SDF の性質から乖離が生じる。さらに変形が進行した場合には非物理的な物体内部の穴の形成など問題が生じ得る。一方で、拡張成長速度場を用いることで図-3 の右下図のように更新後の等価面の間隔が一定となり、式(2)の条件を保つ

効果が得られる。また、拡張成長速度場の導入によってすべての格子節点から最近傍の境界を探索すると計算コストが高くなる傾向にある。そのため拡張成長速度場を導入する際には、計算対象の格子を境界から一定の幅に制限することで、不要な計算を除外して計算コストの増加を軽減する。本研究では、探索範囲の幅を衝突する粒子径の 2 倍とした。

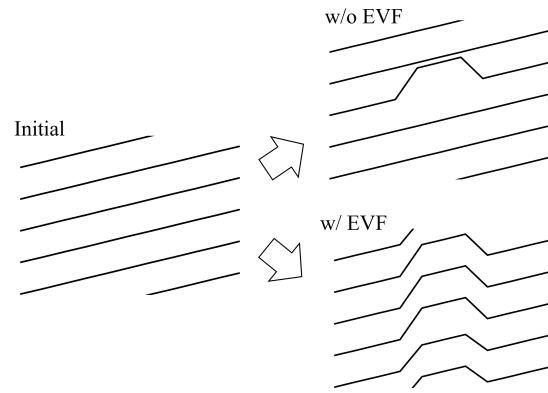


図-3 拡張成長速度場の効果の模式図 w/o EVF:拡張成長速度場の適用なし w/ EVF:拡張成長速度場の適用あり

## (5) ICWM の全体アルゴリズム

ICWM の全体アルゴリズムを図-4 に示す。ICWM は粒子衝突によって発生する摩耗変形を表現するモデルであるため、粒子衝突を解析する手法と摩耗変形表現を連成する計算となる。本研究では粒子衝突の解析を、力積型の衝突表現を適用することで大きな時間増分を利用可能な力積型離散要素法 (IB-DEM:Impulse Based Descrete Element Method)[2] を採用した。時間増分  $\Delta t$  内に発生した粒子と壁面との衝突から摩耗変化量を決定し、衝突解析に用いる IB-DEM と同じ時間増分  $\Delta t$  内で摩耗変形の計算をする。CFL 条件式(12)を満たすように  $\beta$  を大きな値を用いることで、大きな摩耗による変化量の時系列的な傾向を短時間の解析で捉えることができる。IB-DEM と摩耗変形を双方向に連成するため、時間によって離散化されたそれぞれの計算を交互に行う逐次時差解法 [13] を用いた。

まず、IB-DEM による計算の中で衝突検知を実施し、装置壁面との衝突が検知された際に Finnie 則に基づく摩耗体積を式(7)に基づき計算する(①)。計算された摩耗体積は衝突が発生した境界上の格子節点へ記憶される(①)。時間増分  $\Delta t$  内における IB-DEM の粒子衝突をすべて計算された後に、計算対象となる格子に拡張成長速度場を適用する(②)。そして、式(9)に従って計算対象となるそれぞれの格子節点に対して差分法による摩耗変形量の計算を行い(③)、この計算で得られた値に基づきそれぞれの格子節点の SDF を更新する(④)。その際、摩耗変形の計算対象となる格子節点の範囲を再度設定し直す(④)。

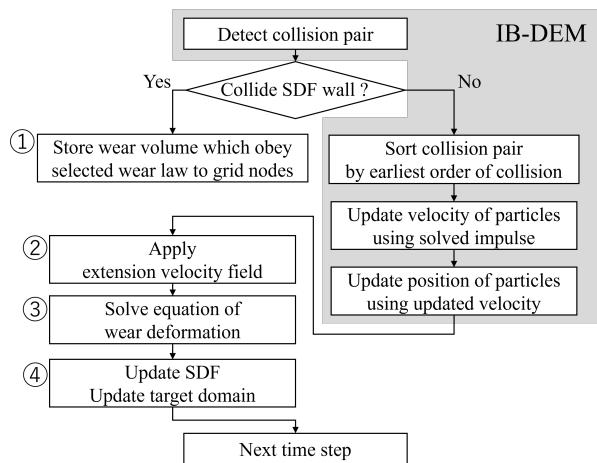


図-4 ICWM アルゴリズムの模式図

### 3. ICWM による計算例

#### (1) ショットブラストの計算

ICWM が大きな変形を表現できることを検証するため、複雑な形状を持つ Stanford bunny に対して射出した粒子を衝突させるショットブラストの解析をおこなった。計算条件を表-1 に示す。

表-1 ショットブラストの計算条件

項目	単位	値
時間増分	[s]	$5.00 \times 10^{-5}$
粒子径	[m]	$2.00 \times 10^{-3}$
粒子密度	[kg/m <sup>3</sup> ]	$6.00 \times 10^3$
反発係数	[–]	0.90
摩擦係数	[–]	0.20
粒子射出量	[–/s]	338,000
粒子初速	[m/s]	10.00
SDF 格子サイズ	[m]	$2.00 \times 10^{-3}$
摩耗定数	[–]	$-2.00 \times 10^4$

図-5(a)に計算領域の概要を示す。計算領域を  $100\text{mm} \times 100\text{mm} \times 140\text{mm}$  とし、鉛直上方向から毎秒 338,000 個の直径 2.0mm 粒子を  $10.0\text{m/s}$  で射出した。粒子の生成時間間隔は一定とし、水平方向にランダムな生成位置を指定することで Stanford bunny に対して均一に衝突が起こるようにした。計算領域の周囲はすべて自由流出条件とし、計算領域から漏れ出した粒子は即座に計算対象から除外した。摩耗定数は  $\beta = -2.0 \times 10^4$  と設定することで単位時間あたりに大きな変形を課した。図-5(b)に射出した粒子が Stanford bunny に衝突する様子を示す。粒子は鉛直下向きに射出され、Stanford bunny の鉛直上向きの表面に対しておおむね均一に衝突している。射出された粒子は速度に基づいたカラーで示されている。初期形状を図-5(c)に、2.5s 後の摩耗形状を図-5(d)に示す。初期形状に対して摩耗形状は大きく異なる形状であることが分かる。計算は途中で破綻することがなく、大きな変形を表現可能であった。

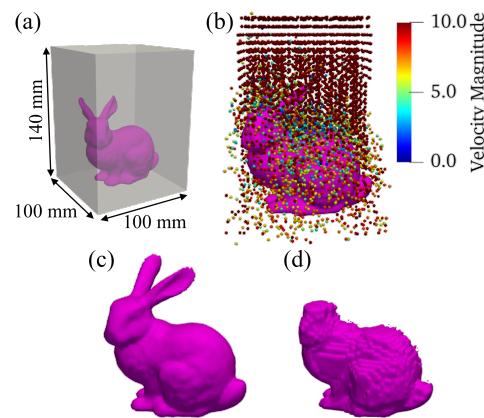


図-5 ショットブラストの計算例 (a) 計算領域の概要 (b) 粒子衝突の可視化例 (c) 摩耗前の物体表面形状 (d) 摩耗後の物体表面形状

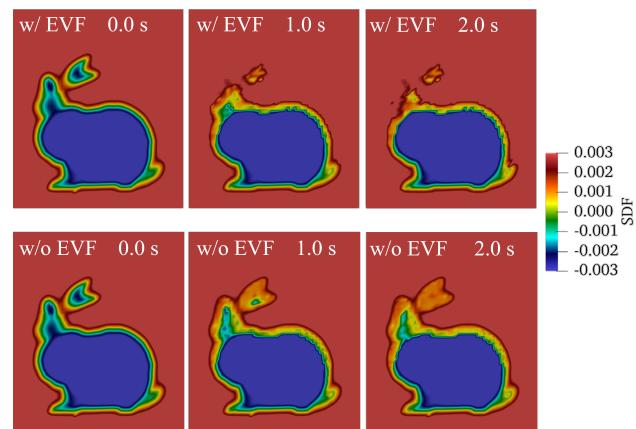


図-6 SDF 断面の経時変化 (上段):拡張成長速度場あり (w/ EVF) (下段):拡張成長速度場なし (w/o EVF)

図-6 に、拡張成長速度場の効果を確認するため、時間における SDF 等価面の変化を示す。図-6 は Stanford bunny 断面の SDF をカラーコンターで表しており、上図は拡張成長速度場を適用した結果、下図は拡張成長速度場を適用しなかった結果を示す。拡張成長速度場を適用している図-6 上図では SDF 等価面の間隔を保つように更新をしているのに対して、拡張成長速度場を適用していない図-6 下図では SDF 等価面の間隔を保持できていない。拡張成長速度場を適用しない場合には、物体内部に穴が形成されるような非物理的な摩耗が生じ得る。

これらの結果から、ICWM は大きな変形が生じた際にも計算が破綻することなく頑健な計算が可能であることが示され、拡張成長速度場の適用によって SDF 等価面間隔を等間隔に保つ効果があると分かる。

#### (2) 乾式ビーズミルの計算

ICWM の妥当性を検証するため、乾式ビーズミル(アシザワ・ファインテック(株)製 SDA)の摩耗シミュレー

ションをおこなった。ビーズミルは粉碎対象物である粉体とビーズと一緒に投入して稼働する装置である。摩耗量と粒子径は正の相関を持つことが知られており[14]、ビーズミルの摩耗はビーズと壁面の衝突が支配的であるとして、本研究では粉碎対象物の粉を除外して計算をおこなった。部品のCADデータを基にSDF変換を行い計算領域内の壁面境界を構成した。装置の動作については、標準的に用いられる運転条件を設定した。計算に用いた乾式ビーズミルの概要を図-7に、計算条件を表-2に示す。

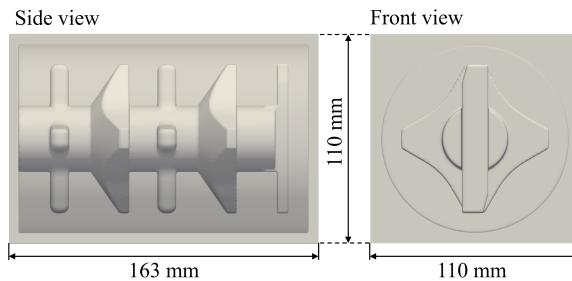


図-7 乾式ビーズミルの概要

項目	単位	値
時間増分	[s]	$2.00 \times 10^{-5}$
粒子径	[m]	$3.00 \times 10^{-3}$
粒子密度	[kg/m <sup>3</sup> ]	$6.00 \times 10^3$
反発係数	[–]	0.90
摩擦係数	[–]	0.20
粒子数	[–]	260,761
格子サイズ	[m]	$2.00 \times 10^{-3}$
摩耗定数	[–]	$-2.00 \times 10^4$

図-7に示すよう、円筒状の外壁に囲まれた空間内でロータが回転する構成になっている。計算開始とともにロータが徐々に回転数を上げ、0.1sの時刻で設定された最高回転速度に達し、その後は一定の速度で回転を続ける。摩耗の進行はロータが定速回転となった0.1sから開始するようにした。このとき、円筒状の外壁部とビーズは摩耗しないものとした。摩耗の進行を加速させるため摩耗定数は $\beta = -2.0 \times 10^4$ とし、5.0sまで計算をおこなった。

実物との比較によって摩耗形状の再現性を確認するため、長時間に渡って繰り返し使用された摩耗部品を三次元スキャナー((株)キーエンス製 VL-500)で計測した。測定した実物の摩耗部品を図-8に示す。

ICWMでは任意の摩耗定数 $\beta$ を用いて摩耗の進行を加速的に表現している。そのため、比較対象の摩耗部品の使用時間に対応するシミュレーション上の時刻を摩耗定数 $\beta$ から同定することは困難である。そこで、計算結果から得られた部品体積の時間変化を調べ、摩耗部品の測定から得られた体積と一致する時刻を使用時間に対応するシミュレーション上の時刻と見なした。この

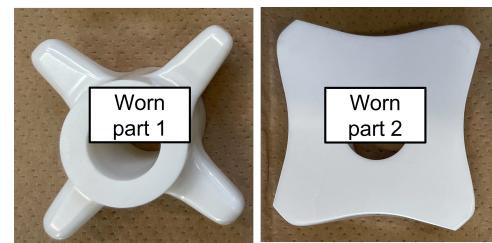


図-8 比較検証に用いた実物の摩耗部品

時刻における計算で得られた摩耗形状と実物摩耗部品の形状を比較し、再現精度を確認した。比較に用いたシミュレーション上の時刻は0.2sであった。再現精度の確認のために計算結果と実物摩耗部品の輪郭を重ねて描画したものを図-9に示す。図-9では0.0sの計算結果(Sim.)の輪郭を緑線で、0.2sの計算結果の輪郭を赤線で、三次元スキャナーの計測で得られた実物摩耗部品(Scan data)の輪郭を青線で表している。図-9の(a)では0.0sの計算結果と0.2sの計算結果を重ねており、摩耗前後の差異を示している。ICWMの計算によって摩耗が表現されて体積が減少していることが分かる。図-9(b)では0.2sの計算結果と実物摩耗部品で輪郭を重ねている。実物摩耗部品の使用時間に対応する計算結果であり、計算結果と実物摩耗部品の輪郭は上図と下図どちらの部品もよく一致している。

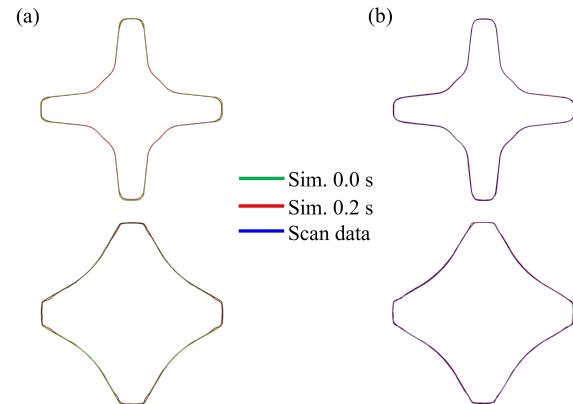


図-9 実物部品の摩耗形状と計算によって得られた摩耗形状の比較 (a) ICWM の初期形状 (Sim. 0.0 s) と ICWM の摩耗後形状 (Sim. 0.2 s) の比較 (b) ICWM の摩耗後形状 (Sim. 0.2 s) と実物の摩耗部品形状 (Scan data) の比較

この結果から、ICWMによる乾式ビーズミルの摩耗シミュレーションでは妥当な精度で実物の摩耗形状をよく再現することが分かる。

#### 4. おわりに

提案するICWMは剛体壁にSDF壁モデルを適用し、SDFを増減することで摩耗による形状変化を表現するモデルである。従来の形状変化方法ではメッシュそのものを変形する方法であるため、格子が潰れることにより計算が破綻する問題があった。それに対してICWM

では、計算の破綻が生じずに大きな形状変化を柔軟に表現可能なモデルとなっている。長時間の摩耗に相当する現象を効率的に解析することを可能にしている。大変形を再現する検証結果から計算破綻の問題が生じないことを確認し、摩耗の影響を受け易い乾式ビーズミル解析の結果から実物の摩耗部品の形状と計算により予測された摩耗形状との比較でよく一致する結果を得られ、妥当な精度で摩耗形状を評価可能であることを示した。

摩耗形状を高精度に予測するためには高解像度のSDF格子が必要であり、提案モデルはCFL条件が課せられているため高解像度の格子を使用すると計算コストが高くなる傾向にある。そのため、高次精度の離散化や陰解法の適用などにより、提案モデルを高精度かつ高速な解法へ発展させることが今後の課題だと考える。

### 参考文献

- [1] T. Ishii, Grinding and dispersion techniques using beadmill, *J. Jpn. Soc. Colour Mater.*, Vol.81 (2008) pp.169-177.
- [2] K. Shioiri, H. Ohmura, M. Asai, N. Mitsume, The evaluation for wet grinding performance of beads mill using impulsebased DEM, *Journal of the Society of Powder Technology, Japan*, Vol. 59 (2022) pp.488-497.
- [3] R. Soda, A. Sato, J. Kano, F. Saito, Development of prediction method of wear rate during wet stirred milling by using DEM, *Journal of the Society of Powder Technology, Japan*, Vol. 51 (2014) pp.436-443.
- [4] P. W. Cleary, Predicting charge motion, power draw, segregation and wear in ball mills using discrete element methods, *Minerals Engineering*, Vol.11 (1998) pp.1061-1080.
- [5] C. T. Jayasundara, R. Y. Yang, A. B. Yu, D. Curry, Prediction of the disc wear in a model IsaMill and its effect on the flow of grinding media, *Minerals Engineering*, Vol.24 (2011) pp.1586-1594.
- [6] D. Boemer, J. P. Ponthot, A generic wear prediction procedure based on the discrete element method for ball mill liners in the cement industry, *Minerals Engineering*, Vol.109 (2017) pp.55-79.
- [7] S. Osher, J. A. Sethian, Fronts propagating with curvaturedependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics*, Vol.79 (1988) pp.12-49.
- [8] Y. Shigeto, M. Sakai, Arbitrary-shaped wall boundary modeling based on signed distance functions for granular flow simulations, *Chemical Engineering Journal*, Vol.231 (2013) pp.464-476.
- [9] H. C. Meng, K. C. Ludema, Wear models and predictive equations: their form and content, *Wear*, Vol.181-183 (1995) pp.443-457.
- [10] I. Finnie, Erosion of surfaces by solid particles, *Wear*, Vol.3 (1960) pp.87-103.
- [11] G. Allaire, F. Jouve, A. M. Toader, Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol.194 (2004) pp.363-393.
- [12] D. Adalsteinsson, J. A. Sethian, The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods, *Journal of Computational Physics*, Vol.148 (1999) pp.2-22.
- [13] C. Farhat, M. Lesoinne, Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.182 (2000) pp.499-515.
- [14] R. S. Lynn, K. K. Wong, H. M. Clark, On the particle size effect in slurry erosion, *Wear*, Vol.149 (1991) pp.55-71.