

密度補正機能付き粒子再配列法による自由表面流れ解析

Particle Shifting with Density Invariant Correction for Free Surface Flow Simulation

白神嘉也¹⁾ 藤岡秀二郎²⁾ 辻勲平³⁾ 浅井光輝⁴⁾

Yoshiya Shirakami, Shujiro Fujioka, Kumpei Tsuji and Mitsuteru Asai

¹⁾九州大学大学院 工学府土木工学専攻 (〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744, E-mail: y-shirakami@doc.kyushu-u.ac.jp)

²⁾九州大学大学院 工学府土木工学専攻 (〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744, E-mail: s-fujioka@doc.kyushu-u.ac.jp)

³⁾東北大学 大学院工学研究科 助教 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail: kumpei.tsuji.el@tohoku.ac.jp)

⁴⁾九州大学大学院 工学研究院社会基盤部門 准教授 (〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

The particle method is prone to accuracy degradation and numerical instability due to disturbance of particle distribution. The utilization of the Particle Shifting Technique, which directly corrects the particle distribution to an ideal position, proves to be an effective solution to these issues. However, the existing Particle Shifting Technique tends to expand the volume in the long term. Therefore, we propose a new Particle Shifting Technique that can simultaneously improve particle homogeneous distribution and volume conservation. For this purpose, it is also important to use the proposed method in combination with other stabilization techniques, and our policy is to sort out the roles of various stabilization techniques and eliminate unnecessary terms. Finally, the numerical stability and accuracy improvement of the proposed method are demonstrated by Rotating square patch fluid simulations and Dam break simulations.

Key Words : SPH(2), Particle Shifting, Density invariant, Volume conservation, Stabilized ISPH

1. 緒言

Lagrange 記述に基づく SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法 [1,2] は、分裂や合体といった大変形の表現を得意とし、津波や洪水、土砂災害などの解析に適する。一方で、連続体の変形に合わせて粒子を移動させるため、粒子分布の乱れは避けられず、これに起因する精度低下、計算不安定性が問題となる。この精度低下の問題に対し、著者らは粒子分布が乱れた場合でも高精度な演算を可能にする SPH(2) [3,4] を提案した。ただし、本来の目的であった粒子分布の乱れに万能なモデルとはなっておらず、例えば安定化 ISPH 法 [5]、あるいは粒子再配列法 (Particle Shifting Technique (以降、PST と略記)) など、粒子分布を均等にするための安定化手法の併用は避けられない。

PST として広く採用される Optimized Particle Shifting (以降、OPS と略記 [6]) は Fick の拡散法則に従って濃度分布の均等化を図る手法であり、必ずしも密度および体積の保存性を保証するものではない。

一方で、体積保存に有効な手法として上述の安定化 ISPH 法がある。これは、ISPH (Incompressible SPH) 法の枠組みで求解する圧力 Poisson 方程式において、密度が一定となるように人工的な安定化項を追加する手法である。

著者らの研究グループでは、提案した SPH(2) に OPS と安定化 ISPH 法を併用することによって長期的に安定した自由表面流れ解析を実現してきたが、安定化 ISPH 法の人工項によって圧力分布に擾乱が起りやすいといった問題があった。

そこで本研究では、圧力 Poisson 方程式に人工的な安定化項を加えず、粒子分布の理想的な均等配置と長期的

な体積保存性の両者を満足できる PST を提案する。提案手法の有用性・精度は、PST の優劣を議論するためにしばしば採用される Rotating square patch 解析において各手法との比較を行い、さらに Dam break 解析において大きな形状変化を伴う動的な問題により検証を行った。

2. 非圧縮性流体用の SPH 法の定式化

(1) 流体の支配方程式

非圧縮性流れを記述する Navier-Stokes 方程式および連続の式は、次のように表される。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{u} は速度、 t は時間、 ρ は密度、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 \mathbf{f} は物体力である。

(2) SPH(2) (高精度微分モデル)

本研究では、計算に必要な微分作用素には SPH(2) [3, 4] を用いた。SPH(2) は、Taylor 展開の 2 次項までを用いて 1 階微分および 2 階微分モデルが導出されており、粒子分布が均等な場合は空間 2 次精度、粒子分布が乱れた場合だとしても空間 1 次精度を満たすモデルである。ただし、高精度微分モデルに位置づけられる SPH(2) は、精度低下の根源となる粒子分布の乱れ自体を解消する手法ではないため、粒子分布の均等化を図る PST を併用することが必須となる。

(3) ISPH 法

ISPH 法とは、非圧縮性流体を対象とした SPH 法による解法の 1 つであり、速度は陽的に、圧力は陰的に求める半陰解法の射影法を用いる。ISPH 法では、次の時間ステップでの速度 \mathbf{u}^{n+1} を現在の速度にのみ依存する予測子 \mathbf{u}^* と次の時間ステップでの圧力 p^{n+1} によって修正する修正子 $\Delta \mathbf{u}^*$ に分離する。予測子 \mathbf{u}^* および修正子 $\Delta \mathbf{u}^*$ はそれぞれ以下のように表される。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u}^* \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t (\nu \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{f}) \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{u}^* = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (5)$$

式 (5) と式 (2) によって得られる以下の圧力 Poisson 方程式を解くことによって次の時間ステップの圧力 p^{n+1} を求める。ここで $\langle \cdot \rangle_i$ は、SPH(2) による粒子 i での離散近似値を示している。

$$\langle \nabla^2 p^{n+1} \rangle_i = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^* \rangle_i \quad (6)$$

最後に式 (3) によって次の時間ステップでの速度 \mathbf{u}^{n+1} が求まるため、次式を用いて位置の更新を行う。

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \mathbf{u}^{n+1} \Delta t \quad (7)$$

(4) 安定化 ISPH 法と安定化項の役割

ISPH 法による非圧縮性流体解析では、経時的に数値密度の誤差が増大し、体積の保全性能や圧力計算の安定性を低下させる。この解決策として、以下の安定化 ISPH 法が提案された。この手法は、式 (8) に示す圧縮性流体の連続の式を用いて導出され、式 (6) のソース項に密度安定化項を付与した以下の圧力 Poisson 方程式を解く。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (8)$$

$$\langle \nabla^2 p^{n+1} \rangle_i = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^* \rangle_i + \alpha_\epsilon \frac{\rho - \langle \rho^n \rangle_i}{\Delta t^2} \quad (9)$$

ここで α_ϵ は安定化パラメータと呼ばれ、1 よりも十分小さな正の値を取る ($0 < \alpha_\epsilon \ll 1$)。右辺の第 2 項で与える安定化項は人工的な項であり、安定化項を大きくするほど体積の保存性はよくなるが、密度誤差を低減するような疑似的な圧力を生むため、圧力分布に擾乱が生じる。一方で、この安定化項を小さくするほど滑らかな圧力分布を与えるが、長時間での全体の体積保存性は悪化する。

3. 密度補正機能付き粒子再配列法

粒子法で使用されることが多い OPS は、大変形を伴う解析では体積を膨張させる傾向がある [7,8,9]。そこで、PST に本来期待される粒子分布の均等化に加えて、体積保存性能にも優れた PST を提案する。本研究では、Morikawa ら [10] の Density-based PS (以下、DPS と略記) を基礎に、改良した手法を提案する。提案手法では、粒子位置の修正量 $\delta \mathbf{r}_i$ を次のように 3 つの成分に分解して与える。

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_i^{\text{dis}} + \delta \mathbf{r}_i^{\text{vol}} + \delta \mathbf{r}_i^{\text{suf}} \quad (10)$$

ただし、過剰なシフトを避けるために、 $|\delta \mathbf{r}_i|$ の上限値を $0.1h$ とした。ここで $h = 1.2d_0$ (d_0 : 初期粒子間隔) で与え、本研究では $2h$ を SPH 法の影響半径として設定する。

(1) 粒子分散項 $\delta \mathbf{r}_i^{\text{dis}}$ (Particle distribution term)

乱れた粒子分布を Fick の拡散法則に従って分散させる量を $\delta \mathbf{r}_i^{\text{dis}}$ とする。ここでは、PS [11] を自由表面流れに適応できるように改良した OPS [6] を採用した。

$$\delta \mathbf{r}_i^{\text{ops}} = \begin{cases} \delta \mathbf{r}_i^{\text{ps}} & (i \in \Omega_{\text{in}}) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \delta \mathbf{r}_i^{\text{ps}} & (i \in \Omega_{\text{free}} \text{ or } \Omega_{\text{vic}}) \end{cases} \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{r}_i^{\text{ps}} = -C_{\text{dis}} h^2 \nabla C_i \quad (12)$$

$$\nabla C_i := \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \left[1 + R_p \left\{ \frac{w_{ij}}{w(d_0/2h)} \right\}^{n_p} \right] \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (13)$$

式 (11) は、PS から OPS への改良を示しており、界面よりも外側に粒子がシフトされることを防いでいる。 \mathbf{I} は恒等テンソル、 \mathbf{n}_i は自由表面に対する外向き法線ベクトルであり、(3) 項にて述べる手法にて求めた。また、同式における粒子の分類図を図-1 に示す。 Ω_{free} は、自由表面粒子による領域、 Ω_{vic} は自由表面の近傍粒子による領域、 Ω_{in} は内部粒子による領域である。式 (12) におけるシフト係数 $C_{\text{dis}} (\leq 0.5)$ は $C_{\text{dis}} = 0.2$ とした。また、式 (13) 中の R_p, n_p は、Monaghan[12] が導入した人工斥力を与えるパラメータであり、推奨値である $R_p = 0.2, n_p = 4$ とした。

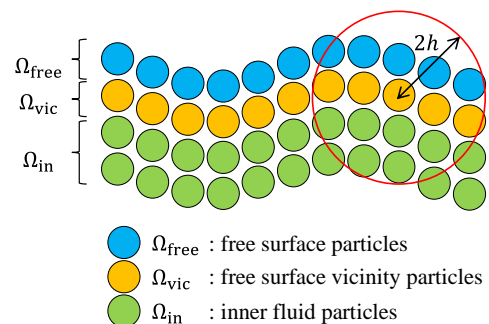


図-1 粒子の分類図

ここで、Morikawa らの PST では、この粒子分散項 $\delta \mathbf{r}_i^{\text{dis}}$ を次式にて与えている。

$$\delta \mathbf{r}_i^{\text{dis}} = \sum_{j \in \mathbb{S}_i^*} V_j w_{ij} \mathbf{e}_{ij} \quad (14)$$

$$\mathbf{e}_{ij} := \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \quad (15)$$

$$\mathbb{S}_i^* := \{j = 1, 2, \dots, N \mid |\mathbf{r}_{ij}| < 1.1 \sqrt{D} d_0 \text{ and } j \neq i\} \quad (16)$$

ここで \mathbf{e}_{ij} は単位相対位置ベクトル、 D は次元数、 \mathbb{S}_i^* は、着目粒子 i から $1.1 \sqrt{D} d_0$ 以内の距離にある粒子の集合である。Morikawa らは、SPH 法の影響半径よりも小さな影響半径を使うことで、図-1 ような区分分けをせずに自由表面付近まで安定した粒子再配列を実現した。しかしながら、著者らが実施した数値実験において、粒子

均等化の目的としては上記の OPS の方が優れていたことから、密度補正のための体積保存項のみに Morikawa らのモデルを採用し、粒子分散項には OPS を選択することにした。

(2) 体積保存項 δr_i^{vol} (Volume conservation term)

Fick の拡散法則による OPS は、粒子の濃度分布を均等にするものであり、全体の体積までを制御するものではない。このため、長期的な解析では体積膨張することが多いため、Morikawa らは周辺粒子との数値密度によって斥力・引力を与える体積保存項を導入した。本提案手法でも、この体積保存項は Morikawa らのモデルを踏襲して以下のように δr_i^{vol} として与える。

$$\delta r_i^{\text{vol}} = C_{\text{vol}} h \sum_{j \in \mathbb{S}_i^*} \left(\frac{\langle \rho \rangle_i}{\rho} - 1 + \frac{\langle \rho \rangle_j}{\rho} - 1 \right) \mathbf{e}_{ij} \quad (17)$$

$$(i \in \Omega_{\text{in}})$$

$$\langle \rho \rangle_i := \sum_{j \in \mathbb{S}_i} m_j w_{ij} \quad (18)$$

式 (17) における C_{vol} は体積保存項におけるシフト係数であり $C_{\text{vol}} = 0.1$ とし、 δr_i^{vol} は内部粒子に限定している。

(3) 表面平滑化項 δr_i^{suf} (Surface fitting term)

前述の $\mathbf{r}_i^{\text{dis}}$, $\mathbf{r}_i^{\text{vol}}$ のみでは、自由表面の形状が乱れやすく計算不安定に陥ることがあるため、Wang ら [7] の手法を改良した Surface fitting [13,14] による表面平滑化項 $\mathbf{r}_i^{\text{suf}}$ を併用した。

Surface fitting は、2次元条件下においては点群から直線を構築するアルゴリズムであり、自由表面粒子 i が持つ外向きの法線ベクトル \mathbf{n}_i と影響半径内の自由表面を近似する直線への距離 s_i を求めることができる。既往の手法と異なる点は、以下に示す曲率 κ_i [15] と Surface fitting で求めた自由表面までの距離 s_i を用いることで、段差形状となる自由表面を識別する改良を施した点である。

$$\delta \mathbf{r}_i^{\text{suf}} = C_{\text{suf}} h s_i \mathbf{n}_i \quad (19)$$

$$(i \in \Omega_{\text{free}} \text{ and } 0 < |\kappa_i| < 0.2 \text{ and } 0.15 < |s_i| < 0.6)$$

$$\kappa_i = 0.34 \sum_{j \in \mathbb{S}_{i,\text{free}}} V_j (\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_i) \cdot \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (20)$$

$$\mathbb{S}_{i,\text{free}} := \{j = 1, 2, \dots, N \mid |\mathbf{r}_{ij}| < 2h \text{ and } j \in \Omega_{\text{free}}\} \quad (21)$$

式 (19) において、シフト係数 C_{suf} は $C_{\text{suf}} = 1.0 \times 10^{-4}$ とし、 s_i は正值では着目粒子 i は界面よりも外側に位置しており、負値では流体側に位置する。また、式 (21) の $\mathbb{S}_{i,\text{free}}$ は着目粒子 i の影響半径内にある自由表面粒子の集合である。

距離 s_i と曲率 κ の2段階の判定を行うことで、図-2(c) に示すような段差形状を自動判定し、より滑らかな自由表面の表現を試みた。曲率 κ_i による閾値によって図-2(a), (b) で示される波の先端のように鋭角に尖った箇所に対しては過度な平滑化を避けている。加えて、距離 s_i を使った閾値を設けることで、上限値により鋭角に尖った形状を除外し、下限値により自由表面から

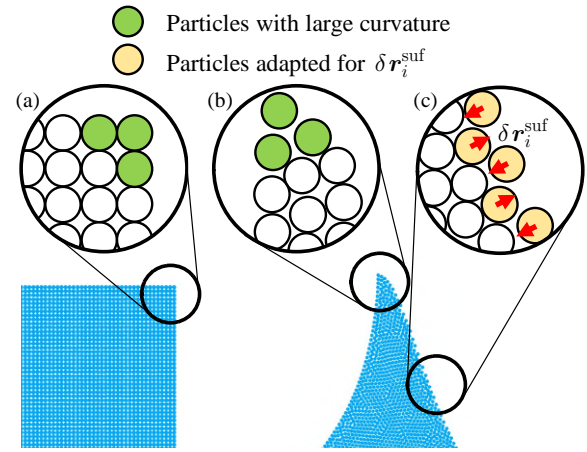


図-2 Surface fitting PS の概念図

遠い粒子を優先的にシフトさせるような改良を施した。

4. 粒子再配列以外の安定化技術

自由表面付近では、影響半径内の粒子数が必然的に減少するため、正確な数値密度を与えることが難しい。そのため、粒子同士の重なりや凝集が起こりやすく、それに起因して粒子が爆発的に加速して計算不安定に陥ることがある。この問題に対して、本研究では粒子間に対して初期粒子間隔分の距離 d_0 を保つための人工斥力を導入する ADS (Advective Dynamic Stabilization) [16] を自由表面とその近傍粒子に適用した。

また、ADS では人工斥力を与えることになるため、可能な限り ADS を作用させる状況を回避したい。そこで、自由表面近傍については、XSPH 法 [17] を適用した。これにより周辺の流速場が平滑化されて近傍粒子とより同期的に運動するようになり、数値安定性を期待することができる。

5. 流体解析による検証

本章では、2つの自由表面流れ解析を通し、提案する密度補正機能付き PST の精度・妥当性検証を実施する。Rotating square patch 解析により粒子再配列機能の精度検証を行った後、次に示す Dam break 解析によって提案手法による体積保存性に着目した検証を行った。

(1) Rotating square patch 解析

本解析は粒子法におけるベンチマークテストの1つであり [18,19]、正方形の非粘性流体に対して、無重力状態で剛体回転による初期流速を与える。本研究では、流体の1辺の長さ L を 100 cm、剛体回転の初期角速度 ω を 1.0 rad/s とした。解析パラメータとして時間増分 Δt を 1.0×10^{-4} s、初期粒子間隔 d_0 を 1.0 cm、密度 ρ を 1.0 g/cm³、動粘性係数 ν を 0 cm²/s とした。また、安定化 ISPH 法を用いる場合は $\alpha_\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ とした。

提案手法と従来手法の解析結果について、圧力分布を図-3、数値密度分布を図-4 に示す。

PST としては粒子分散項 (OPS) のみを用い、これに安定化 ISPH 法を加えた従来法において、図-4(a) に示

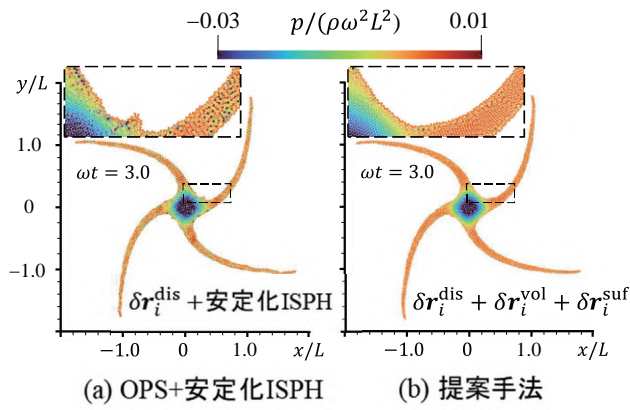


図-3 PSTにおける圧力分布の比較

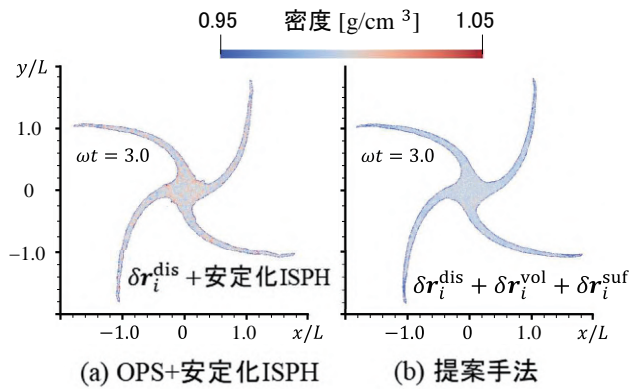


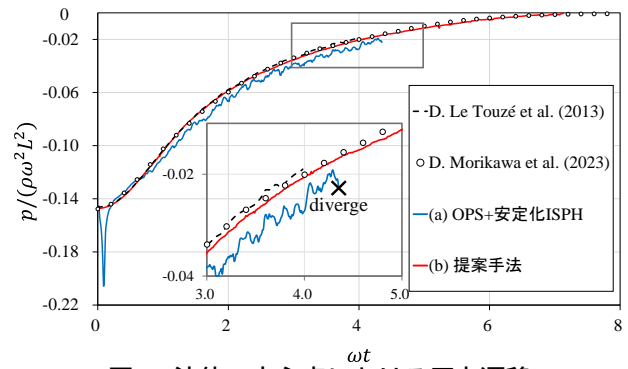
図-4 PSTにおける密度分布の比較

す数値密度は、 1.0 g/cm^3 に保たれているが、図-3(a)に示す圧力分布では安定化項の影響による圧力の擾乱が見られる。次に、図-3(b)に示す密度補正項と表面平滑化項を加えた提案手法の結果では、滑らかな自由表面の形状と乱れの少ない圧力分布を実現できている。粒子分布の均等化も十分に行えており、図-4(b)に示すように数値密度はほぼ 1.0 g/cm^3 に保たれている。さらに、図-5には、流体の中心点 $((x, y) = (0, 0))$ における圧力を手法ごとに計測し、その他の参照解と比較した。粒子分散項 (OPS) + 安定化項 (a) の結果は、中心点の圧力も振動していることが確認でき、 $\omega t = 4.3 \text{ rad}$ において計算が破綻した。一方で人工的な安定化項を排除し、代わりに体積保存項、表面平滑化項を加えた提案手法 (b) では、精度検証が十分に行われた既往の結果とほぼ一致する結果を得た。

以上の結果から、提案手法である密度補正機能付き PST は、体積保存性と圧力などの計算精度の両面に優れた手法であることを示すことができた。

(2) Dam break 解析

続いて、自由表面が大きく変形する Dam Break 解析によって提案手法の妥当性を確認した。解析モデルは $80 \times 50 \text{ cm}$ の水柱と $200 \times 300 \text{ cm}$ の水槽からなる。解析パラメータとして時間増分 Δt を $1.0 \times 10^{-4} \text{ s}$ 、初期粒子間隔 d_0 を 1.0 cm 、密度 ρ を 1.0 g/cm^3 、動粘性係数 ν を $9.8 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ とした。提案手法である密度補正機能付き PST と粒子分散項のみ (OPS) との比較を行



い、数値密度の誤差を次式にて評価した。

$$\text{Density error [\%]} = \frac{\rho - \langle \rho \rangle_i}{\rho} \times 100 \quad (22)$$

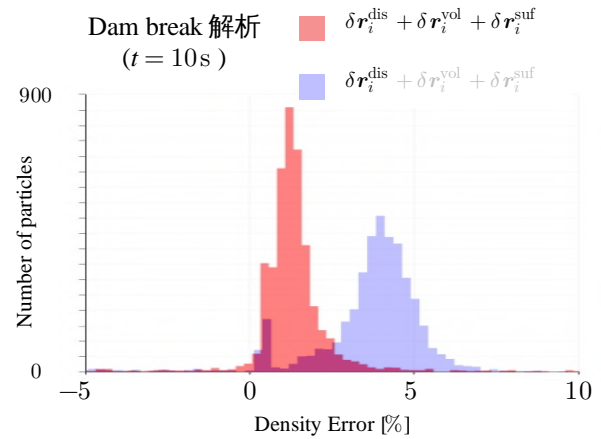


図-6 密度誤差のヒストグラム

数値密度の分布を図-7に、圧力分布を図-8に示す。図-7の上部に示される粒子分散項のみの結果では、経時的に体積が膨張し、数値密度が小さくなっている。一方で、図-7の下部に示す提案手法では長時間の解析においても数値密度は 1.0 g/cm^3 付近に保たれ体積保存性に優れている。より定量的な比較のため、図-6に密度誤差のヒストグラムを示す。誤差の最頻値は、提案手法では 1.18% 、粒子分散項のみでは 3.97% となり、提案手法によって密度誤差が減少し、体積保存性に優れていた手法であることを定量的に示した。図-8には、提案手法を用いた圧力分布の時間変化を示しているが、長時間の解析においても計算不安定に陥る事なく、滑らかな圧力分布を与えている。

6. 結 言

本論文では、可能な限り人工的な安定化操作を排除した粒子法の実現のために PST の改良を試みた。

OPS は、長期的な解析において体積膨張を招くため、粒子分布の均等化と密度補正の両者を行う DPS が提案された。しかし、粒子分布の均等化の観点では、DPS は OPS に劣る性能であったため、前者の目的のためには OPS、後者の目的のために DPS の体積保存項のみを組み合わせた PST を提案した。提案手法の有用性を確

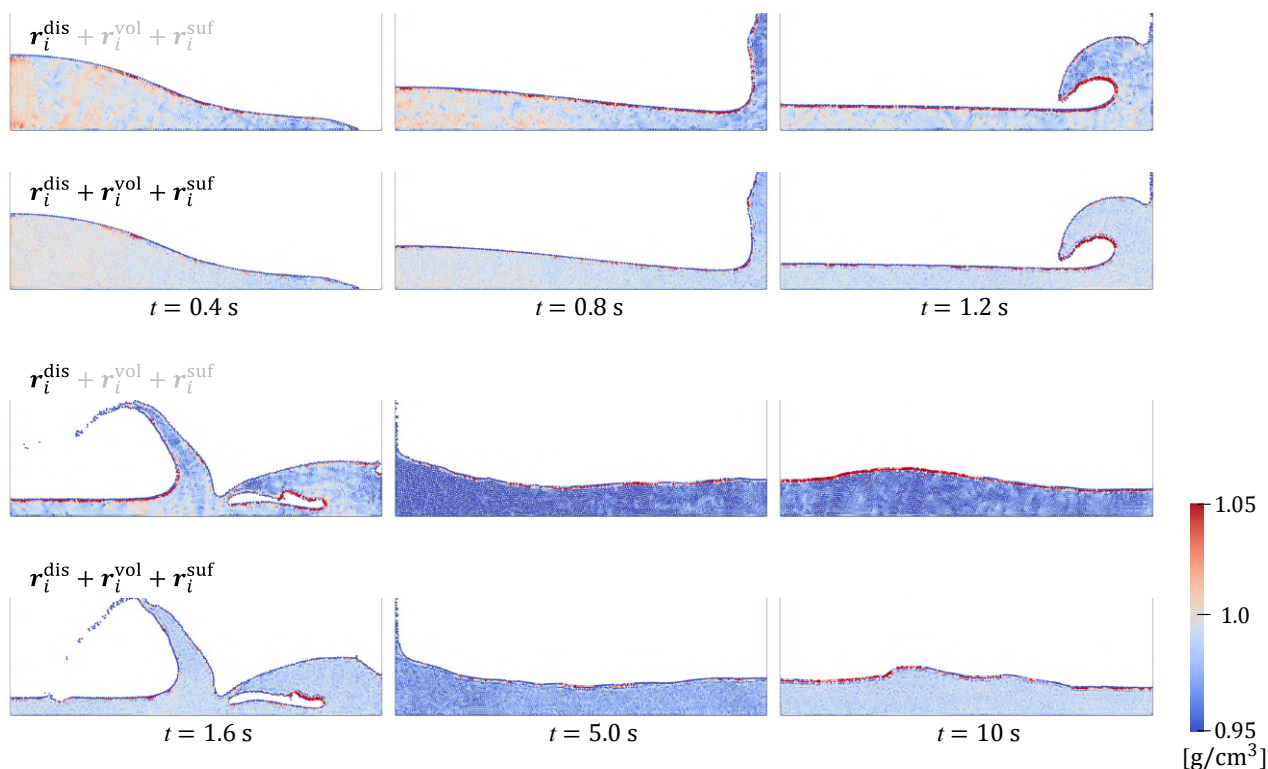


図-7 OPS および提案手法による数値密度の比較

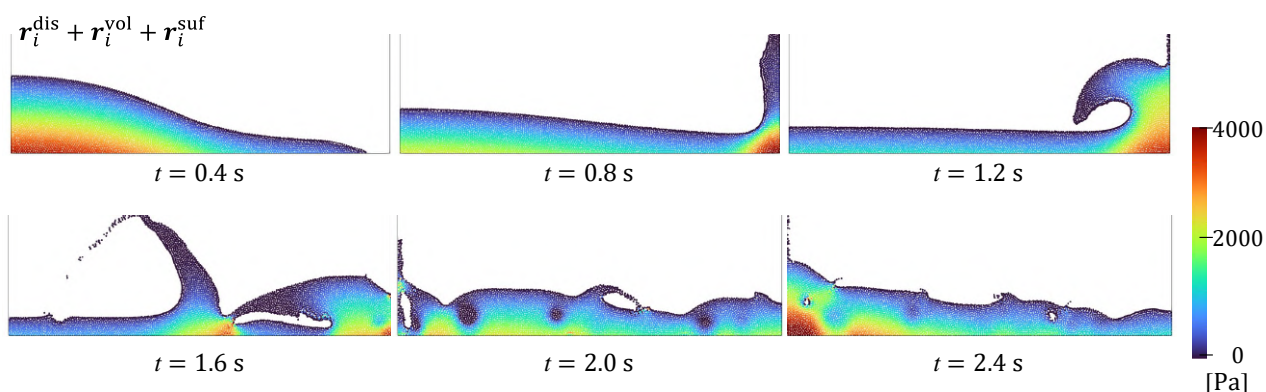


図-8 提案手法による圧力分布

認するために Rotating square patch 解析により、圧力分布と体積保存性の精度の両立を示した。また提案手法は、大きな自由表面の形状変化がある Dam break 解析においても、体積保存性に優れることを明らかにした。今後は、多孔質流れや混相流など、粒子分布が必ずしも均等とまらない状況での PST へと発展させる計画である。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP23KK0182, JP23H01662, 22H03601 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Lucy, L. B.: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The Astronomical Journal*, Vol.82, pp.1013–1024, 1977.
- [2] Gingold, R. A. and Monaghan, J. J.: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-

spherical stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Vol.181, No.3, pp.375–389, 1977.

- [3] 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝: 高精度 SPH 法 ～空間 2 次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～, *土木学会論文集*, Vol.79, No.15, pp.22–15019, 2023.
- [4] Asai, M., Fujioka, S., Saeki, Y., Morikawa, D. S., and Tsuji, K.: A class of second-derivatives in the smoothed particle hydrodynamics with 2nd-order accuracy and its application to incompressible flow simulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.415, pp.116203, 2023.
- [5] Asai, M., Aly, A. M., Sonoda, Y., Sakai, Y., et al.: A stabilized incompressible sph method by relaxing the density invariance condition, *J. Appl. Math.*, Vol.2012, 2012.
- [6] Khayyer, A., Gotoh, H., and Shimizu, Y.: Comparative study on accuracy and conservation properties of

- two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in isph context, *J.Comput.Phys.*, Vol.332, pp.236–256, 2017.
- [7] Wang, Z., Matsumoto, T., Duan, G., and Matsunaga, T.: Compact moving particle semi-implicit method for incompressible free-surface flow, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.414, pp.116168, 2023.
 - [8] Khayyer, A., Shimizu, Y., Gotoh, T., and Gotoh, H.: Enhanced resolution of the continuity equation in explicit weakly compressible sph simulations of incompressible free - surface fluid flows, *Appl. Math. Modell.*, Vol.116, pp.84–121, 2023.
 - [9] Gao, T. and Fu, L.: A new particle shifting technique for sph methods based on voronoi diagram and volume compensation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.404, pp.115788, 2023.
 - [10] Morikawa, D. S., Tsuji, K., and Asai, M.: Corrected ale-isph with novel neumann boundary condition and density-based particle shifting technique, *J.Comput.Phys.: X*, Vol.17, pp.100125, 2023.
 - [11] Lind, S. J., Xu, R., Stansby, P. K., and Rogers, B. D.: Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves, *J.Comput.Phys.*, Vol.231, No.4, pp.1499–1523, 2012.
 - [12] Monaghan, J. J.: SPH without a tensile instability, *J. Comput. Phys.*, Vol.159, No.2, pp.290–311, 2000.
 - [13] Weiss, V., Andor, L., Renner, G., and Várady, T.: Advanced surface fitting techniques, *Comput. Aided Geom. Des.*, Vol.19, No.1, pp.19–42, 2002.
 - [14] Matsunaga, T. and Koshizuka, S.: Stabilized lsmps method for complex free-surface flow simulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.389, pp.114416, 2022.
 - [15] Morikawa, D. S. and Asai, M.: Surface tension simulations with corrected ale-isph and density-based shifting technique, *Comput. Part. Mech.*, pp. 1–12, 2023.
 - [16] Tsuruta, N., Khayyer, A., and Gotoh, H.: Development of advective dynamic stabilization scheme for isph simulations of free-surface fluid flows, *Computers & Fluids*, Vol.266, pp.106048, 2023.
 - [17] Monaghan, J. J.: Smoothed particle hydrodynamics, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Vol.30, No.1, pp.543–574, 1992.
 - [18] Colagrossi, A.: A meshless lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation, *These, Universita di Roma*, 2005.
 - [19] Le Touzé, D., Colagrossi, A., Colicchio, G., and Greco, M.: A critical investigation of smoothed particle hydrodynamics applied to problems with free-surfaces, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.73, No.7, pp.660–691, 2013.