

粒子法のマルチモーメント化あるいはマルチモーメント法のラグランジュ化の試み

Constructing a multi-moment particle method or a Lagrangian multi-moment method

川田佳史¹⁾

Yoshifumi Kawada

¹⁾海洋研究開発機構・海底資源センター（〒236-0061 神奈川県横須賀市夏島町 2-15, E-mail: kawada@jamstec.go.jp）

We briefly provide an overview of the finite-difference and particle methods, and as a natural consequence, introduce the multi-moment particle method combined with the least-squares method. To summarise, the finite-difference method and the particle method are now resemble with each other. The finite-difference method is one of the simplest numerical methods to solve partial differential equations, but it is basically limited to use rectangular numerical grids. The method is later evolved into the multi-moment method to increase accuracy. It is also combined with the least-squares method to be free from the numerical grid. A class of particle methods, on the other hand, was developed to manipulate surfaces and avoid dependence on the numerical grid. Although early methods of this category have poor accuracy, this issue has been resolved by combining them with the least-squares method. In this manuscript, as a first attempt, we test the behaviours of the multi-moment particle method. First, we show that the multi-moment particle methods requires less neighbouring particles than usual particle methods do. Second, we verify that the method can represent the Laplacian using a model for a transient temperature field.

Key Words : finite-difference methods, particle methods, multi-moment methods

1. はじめに

地球科学では相変化を伴う複雑な流体の系の数値計算を行うことが多い。たとえば地球形成期を扱う場合、鉄と石の混ざりものからなる隕石の高速での集積によってできた液体から、密度差によって鉄の中心核とその外側の岩石(マグマ)のマントルに分離する過程がある[1]。多成分のマントルの部分が部分溶融を経て冷却・固結する過程もある[2]。地球が固まった後も、マントルの最上部が部分的に溶融して地殻が形成する過程[3]や、火山の下でマグマが形成・固まる過程[4]などは現在でも起こっている。このように多くの場合に生じる複雑な流れの式となるべく簡単かつ高精度に解けることが地球科学の研究には欠かせない。このときに鍵となるのは、数値拡散・振動の抑制と、不連続の取り扱いである。もちろんこれらは工学上の応用でも重要であろう。

数値拡散や数値振動は一方を抑えるともう一方が問題になることが多い、両者を手名付けるのが数値計算法の発展であったといつても過言ではない。通常の差分法で高精度化を図るには多くの点を用いた差分格子を用いる必要がありやや煩雑である。この点、CIP 法をはじめとしたマルチモーメント法は、元の物理量とその空間微分を従属変数(場の変数)として取ることで、高精度化を比較的簡単に実現できる[5]。他方、差分格子の形状の融通の効かなさを緩和するために、Taylor 展開と最小二乗法を用いることで高精度化を図る方法が編み出されている[6]。また、マルチモーメント法に最小二乗法を適用することにより不規則格子に対応させた方法も提案されている[7]。

第二の不連続面(地球科学でいうと鉄と石のように物性が大きく異なるような場所や地球の表面)は数値計算で扱うのは難しく、これを簡単に扱える方法も望まれる。この点で有利なのは SPH 法をはじめとした粒子法である[8]。粒子法では刻一刻と変わりゆく不連続面を追いかけることが可能である。他方、粒子法は精度が二の次になっているという問題がある。研究の初期に簡単に複雑な問題を解けることは有用であるが、より詳細な過程を調べる際には何とも心もとない。この点、工学の側からは、粒子法にやはり Taylor 展開と最小二乗法を用いることで高精度化を図る方法が考案されている[9,10]。また、最小二乗を用いた粒子法についてのまとめは本講演の菖蒲迫ほか[11]にまとめられている。

表-1 数値計算法の分類の一例

	A	B	C
a	差分法	最小二乗差分法	最小二乗 SPH 法
b	IDO 法(マルチモーメント差分法)	MADO 法(最小二乗 IDO 法)	IDO-SPH 法(マルチモーメント最小二乗 SPH 法)

さて、ここまでに挙げてきた数値計算方法をひとつの観点からまとめたものが表 1 である。縦糸(表の縦方向)はマルチモーメント法によって高精度化を図る試みである。一方、横糸(表の横方向)は通常の差分法に最小二乗化および Lagrange 化を図ることで格子のしが

らみから自由になる試みである。ここで、マルチモーメントかつ粒子法という方法はまだ存在しないようである。この方法は、高精度であり、かつ格子のしがらみからの自由度が高いと考えられる。本講演ではこの方法について吟味を行うこととする。

2. 格子法と粒子法

粒子法と格子法の決定的な違いは、格子法の時間微分項が物質微分で書かれるのに対し、粒子法の時間微分項は文字通りの時間微分である。他方、粒子法では粒子の位置を動かすことが必要となる。たとえばある量 f に関する 1 次元の移流拡散方程式を例に取ると、格子法では

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1)$$

を解くことになる。ここで x は位置、 u は速度、 t は時間、 D は拡散係数である。一方粒子法では、

$$\frac{df}{dt} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (3)$$

を解く。ここで d/dt は時間のみに関する微分を意味する。

3. いろいろな数値計算法

まず、表 1. に示した数値計算方法のそれぞれを簡単に振り返る。

(1) 有限差分法

有限差分法は規則的な計算領域を規則的な格子で分割することが多い。たとえば 2 次元なら長方形領域を対象とすることになる。1 次元の場合、着目点とその両隣の点を考える。両隣の点を着目点の周りで Taylor 展開し、その式を足し引きすることで着目点における 1 階および 2 階の微分係数が求まる。両隣の点の Taylor 展開は

$$f_{i\pm 1} = f_i \pm \Delta x f_{x,i} + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx,i} \pm \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx,i} + \dots \quad (4)$$

で与えられる(下付き添字の x は x に関する微分を意味する)。この 2 式から 1 階微分または 2 階微分のいずれかを消去するともう一方が残る。すなわち

$$f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (5)$$

$$f_{xx,i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (6)$$

が得られる。1 階微分、2 階微分とともに空間刻みに対して 2 次精度である。

差分法は高精度化することもできる。着目点の 2 つ隣、3 つ隣、と対象とする粒子を増やすことで、低階微分を高精度に計算することや、高階微分係数を求ることもできる。例えば、着目点の 2 つ隣まで用いることで 2 階微分を 4 次精度で計算することができる。なお、通常の差分法は矩形領域に対して行われることが多いが、不等間隔格子を適用することで、ある程度の複雑な形状に対応させることは可能である。

(2) 最小二乗差分法

最小二乗差分法は、差分法の枠組みで不規則な計算領域を対象とする方法である。着目点からの距離に応じて周囲の点と関連させ、周りの粒子を着目点の周りで Taylor 展開する [6]。展開は求めたい次数に応じて適当に打ち切る。ここまで矩形領域の有限差分法と対して違いはないが、打ち切った Taylor 展開に関する係数の数よりも周囲の点の数が多い場合、着目点における微分係数は一意に求まらない。そこで、最小二乗法を用いてもっともらしい微分係数の値を得ることになる。以下、最小二乗して求める関数が着目点を必ず通る場合について式を展開する(これを diffuse approximation と呼ぶことがある)。着目点を特別いしない場合など多様な変種がある。

まず着目点の周りの点 j それぞれについて Taylor 展開を行い、ある次数まで打ち切ったときの残差を与える。

$$R_j = -f_j + f_i + f_{x,i} \Delta x_{ji} + f_{y,i} \Delta y_{ji} + \frac{1}{2} \Delta x_{ji}^2 f_{xx,i} + f_{xy,i} \Delta x_{ji} \Delta y_{ji} + \frac{1}{2} \Delta y_{ji}^2 f_{yy,i} + \dots \quad (7)$$

最小二乗法差分法では、着目点をその周囲の粒子を、互いの距離に応じた重み w_j を考慮した上で足し合わせたものを最小化のための目的関数に取る。

$$J = \frac{1}{2} \sum_j w_j R_j^2 \rightarrow \min \quad (8)$$

ここでは簡単のため、着目点での物理量 f_i を通る曲面を求ることにする。具体的には

$$\frac{\partial J}{\partial f_{x,i}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial f_{y,i}} = 0, \quad (9)$$

などを計算する。その結果は行列形式で以下のようにまとめられる。

$$A \vec{d} = \vec{b} \quad (10)$$

$$A = \sum_j w_j \vec{p}_j \cdot \vec{p}_j^T \quad (11)$$

$$\vec{b} = \sum_j w_j \vec{p}_j (f_j - f_i) \quad (12)$$

$$\vec{p}_j^T = \begin{pmatrix} x_j & y_j & \frac{1}{2}x_j^2 & x_j y_j & \frac{1}{2}y_j^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\vec{d}_i^T = \begin{pmatrix} f_{x,i} & f_{y,i} & f_{xx,i} & f_{xy,i} & f_{yy,i} \end{pmatrix} \quad (14)$$

この方法では時間とともに動かない表面を扱うことは容易にできるが、動く自由表面を扱うことは難しい。

(3) マルチモーメント差分法(とくに IDO 法)

高精度な解を得るために、差分法では着目点から遠い位置の情報を用いていくのだが、そのかわりに微分係数自体を従属変数(場の量)に取ることも考えられる [5]。さらには、微分係数として 1 階より高い係数を用いることや、ある種の積分量を用いることもできる。このような方法はマルチモーメント法と呼ばれる [12]。この方法では、元の時間発展式の他に、元の式を空間微

分した式の時間発展も解く。例えば、1次元の移流拡散方程式は、速度と拡散係数が一定の場合、元の式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -u \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (15)$$

に加えて、これを空間微分した

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} = -u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + D \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (16)$$

も解くことになる。従属変数(場の変数)は、元の物理量 f の他に、これを空間微分した量 f_x が加わる。以下、差分法に基づいたマルチモーメント法である IDO 法 [13] について述べる。式の右辺の量を f と f_x を用いていかに得るかが問題となる。

着目点の両隣の点での f と f_x を着目点の周りで Taylor 展開する。

$$f_{i\pm 1} = f_i \pm \Delta x f_{x,i} + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx,i} \pm \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx,i} + \dots \quad (17)$$

$$f_{x,i\pm 1} = f_{x,i} \pm \Delta x f_{xx,i} + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xxx,i} \pm \dots \quad (18)$$

これら 4 式をまとめると、例えば

$$f_{xx,i} = 2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{f_{x,i+1} - f_{x,i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x^4), \quad (19)$$

$$f_{xxx,i} = \frac{15}{2} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x^3} - \frac{3}{2} \frac{f_{x,i+1} + 8f_{x,i} + f_{x,i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^4), \quad (20)$$

が得られる [13]。

差分法に直接的にマルチモーメント法を適用したのが IDO 法であるといつてできる。1 次元の場合、元の物理量とその空間 1 階微分を従属変数に取る。これに伴い、解く式は元の微分方程式とこれを空間微分した式である。従属変数の数と式の数は同じである。この方法では、着目点とその両隣の点を用いることで、2 階微分と 3 階微分を 4 次精度で、4 階微分と 5 階微分を 2 次精度で得ることができる。このために 6 個の情報を用いている。IDO 法は、差分法と同様に、基本的には規則的な格子を用いることになる。不等間隔格子に拡張することも可能だが、微分係数は複雑なものとなる [14]。

なお、1 次元の IDO 法を 2 次元に拡張する場合、1 階微分に加えて 2 階微分 f_{xy} も従属変数に取る必要がある [13]。その上で、 f_x と f_{xy} からは f_{xyy} や f_{xyyy} が計算される。直接 2 次元の Taylor 展開を求める方法も提案されている [15]。

(4) マルチモーメント最小二乗差分法

元々の IDO 法は規則的な格子を用いることが想定されていたが、これを最小二乗法を用いることによって不規則格子に適用する方法が提案されている [7]。

IDO 法と同じく、元の変数の Taylor 展開の他に、元の変数の空間微分に対する Taylor 展開も計算する。それぞれの残差は以下のようになる。

$$R_j = -f_j + f_i + f_{x,i} \Delta x_{ji} + f_{y,i} \Delta y_{ji} + \frac{\Delta x_{ji}^2}{2} f_{xx,i} + f_{xy,i} \Delta x_{ji} \Delta y_{ji} + \frac{\Delta y_{ji}^2}{2} f_{yy,i} + \dots \quad (21)$$

$$R_{x,j} = -f_{x,j} + f_{x,i} + f_{xx,i} \Delta x_{ji} + f_{xy,i} \Delta y_{ji} + \dots \quad (22)$$

$$R_{y,j} = -f_{y,j} + f_{y,i} + f_{xy,i} \Delta x_{ji} + f_{yy,i} \Delta y_{ji} + \dots \quad (23)$$

最小二乗法では以下の目的関数を最小化する。先程と同じく、0 階微分および 1 階微分は既知であるとする。なお、この方法は一般化最小二乗法と呼ばれる [16]。

$$J = \frac{1}{2} \sum_j w_j R_j^2 + \frac{1}{2} \sum_j w_j R_{x,j}^2 + \frac{1}{2} \sum_j w_j R_{y,j}^2 \\ \rightarrow \min \quad (24)$$

なお、重みの設定は各項で任意であるが、ここでは共通の重みを用いるものとした。 J を最小化することは、たとえば

$$\frac{\partial J}{\partial f_{xx,i}} = 0, \frac{\partial J}{\partial f_{xy,i}} = 0, \frac{\partial J}{\partial f_{yy,i}} = 0 \quad (25)$$

などを計算することに相当する。その結果は行列形式で以下のようにまとめられる(左辺の \vec{d} のみが未知数である)。

$$A \vec{d} = -B \vec{b} + \vec{c} \quad (26)$$

ここで

$$A = \sum_j w_j \vec{p}_j \cdot \vec{p}_j^T + \sum_j w_j \vec{p}_{x,j} \cdot \vec{p}_{x,j}^T + \sum_j w_j \vec{p}_{y,j} \cdot \vec{p}_{y,j}^T \quad (27)$$

$$B = \sum_j w_j \vec{p}_j \cdot \vec{q}_j^T + \sum_j w_j \vec{p}_{x,j} \cdot \vec{q}_{x,j}^T + \sum_j w_j \vec{p}_{y,j} \cdot \vec{q}_{x,j}^T \quad (28)$$

$$\vec{p}_j^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_j^2 & x_j y_j & \frac{1}{2} y_j^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\vec{q}_j^T = \begin{pmatrix} 1 & x_j & y_j \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\vec{d}^T = \begin{pmatrix} f_{xx,i} & f_{xy,i} & f_{yy,i} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\vec{b}^T = \begin{pmatrix} f_i & f_{x,i} & f_{y,i} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\vec{c} = \sum_j w_j \vec{p}_j \cdot (1 \ 0 \ 0) \vec{b}_j \\ + \sum_j w_j \vec{p}_{x,j} \cdot (0 \ 1 \ 0) \vec{b}_j + \sum_j w_j \vec{p}_{y,j} \cdot (0 \ 0 \ 1) \vec{b}_j \quad (33)$$

この連立一次方程式を解けば微分係数が求まる。

4. いろいろな数値計算法その 2

(1) 素朴な SPH 法

自由表面などを容易に扱う方法に粒子法がある。たとえば惑星形成の問題を扱うために SPH 法と呼ばれる方法が開発された [17]。この問題では、大きく変形する自由表面などの不連続の取り扱いが重要である。この問題は差分法系の手法ではなかなか難しい。反面、SPH 法を工学的な問題に応用しようとすると、SPH 法の精度が悪いことが重大な欠点となる。たとえば、精度評価を行うと 0 次とかマイナス 1 次といった結果が得られる [11]。

SPH 法では、着目点の物理量を自分自身を含む周囲の粒子の足し合わせで表現する。

$$f_i \approx \sum_j \Delta V_j f_j W_{ij} \quad (34)$$

ここで ΔV_i は体積要素、 W_{ij} は重みで距離の関数である。微分係数(2 階微分)の場合は単独の微分係数ではなく Laplacian の形で与えられるが、導出は直観的でないので成書[8]を参照されたい)は以下のように与えられる。

$$\vec{\nabla}_i f_i \approx \sum_j \Delta V_j f_j \vec{\nabla}_i W_{ij} \quad (35)$$

$$\nabla_i^2 f_i \approx 2 \sum_j \Delta V_j (f_j - f_i) \frac{\vec{x}_{ji} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij}}{r_{ij}^2} \quad (36)$$

(2) 最小二乗 SPH 法

SPH の精度の悪さをこれを乗り越える努力が様々になされてきており(たとえば[10])、その一端は本講演の菖蒲迫ほか[?]にもまとめられている。最終的な処方箋は、着目点の周りに分布した粒子に対して Taylor 展開を適用し、これらに最小二乗法を用いることで高精度の微分係数を求めるというものである。この方法を差分法の立場から見ると、最小二乗差分法の格子点を動かすと考えることもできる。この立場では、最小二乗差分法の Lagrange 化ができる。最小二乗 SPH 法の定式化は最小二乗差分法とほぼ同じであることから、ここでは繰り返さない。粒子を動かすところが決定的に異なる。

(3) マルチモーメント最小二乗 SPH 法

差分法がマルチモーメント法による高精度化を成し遂げたのと同様に、SPH 法もマルチモーメント法による高精度化が可能であると考えられる。手法としては、マルチモーメント最小二乗差分法[7]の定式化そのままに粒子を動かせば良い。

5. マルチモーメント最小二乗法の利点・欠点

ここでは粒子を動かすことはせず、最小二乗差分法とマルチモーメント最小二乗差分法の範囲での違いを考える。この違いは、最小二乗 SPH 法とマルチモーメント SPH 法の違いと共通である。なお、この節の内容の一部は先行研究の村山ほか[7]も行っている。

マルチモーメント法の利点は最小二乗法を構成するために必要な粒子数が少なくなることである。規則的な格子を例に取り、4 次精度を実現するために必要な粒子の個数を考えてみる。通常の方法では着目点の両隣および 2 つ隣までの粒子が必要になる。2 次元では 13 点の粒子が必要となる。一方マルチモーメント法では、両隣の粒子だけで良い。2 次元なら 5 点の粒子で十分である。すなわち、粒子の数は 1/3 程度に減る。

マルチモーメント法の欠点は、解く式の数が増えることである。1 階微分までを従属変数にする場合、2 次元なら変数 1 つあたり式の数は 3 倍に増える。必要な粒子の数が少なくて済むことは利点ではあるのだが、粒

子が特別な配置(一直線上など)を取る危険性が高いという欠点になる可能性がある。

以上の点を踏まえ、数値実験を行ってみる。正方形領域に粒子を均一に配置し、ランダムな誤差を与える。与えられた位置に対して f を配置する。

$$f^{ex}(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y \quad (37)$$

Taylor 展開の次数は 5 次とした。この場合、たとえば 2 階微分は 4 次精度となることが期待される。

以上の条件の元で各粒子に対して最小二乗法によって空間微分項を計算する。とくに空間 2 階部分 $f_{xx,lsq}$ を計算し、以下で定義する誤差を計算する。

$$\text{err} = \sqrt{\frac{\sum_i \{f_{xx,i}^{lsq} - f_{xx}^{ex}(x_i)\}^2}{\sum_i \{f_{xx}^{ex}(x_i)\}^2}} \quad (38)$$

まずある影響半径($h = 1.3$)のもとで粒子数を変えた計算(5^2 から 320^2 まで)を行った(図 1a)。入力として値のみを用いた場合(通常の最小二乗法)、値とその空間 1 階微分(最小二乗 IDO 法)とともに空間 4 次精度が得られた。誤差の値は、ここで用いた影響半径においては通常の最小二乗法の方がやや小さい傾向にあるが、両者ともほぼ同じ値であった。

次に、粒子数一定(40^2)のもとで影響半径を変えた計算を行った(図 1b)。それによると、通常の最小二乗法に比べ、最小二乗 IDO 法の方がより小さな影響半径まで計算が行えることがわかる。また、(影響半径を選べば)最小二乗 IDO 法の方がより小さな誤差を得ることができる可能性があることが示唆される。

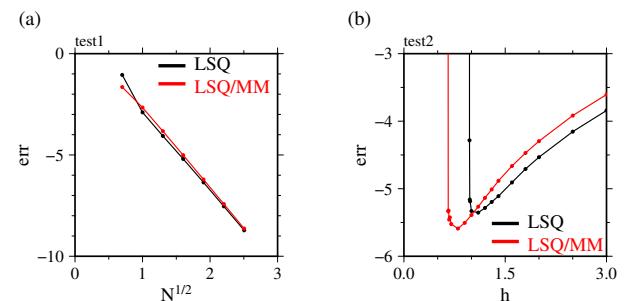


図-1 誤差の (a) 粒子サイズ依存性および (b) 影響半径依存性。
黒は通常の最小二乗法、赤は勾配をデータに含めた最小二乗法。

6. マルチモーメント最小二乗粒子法の実装

ここでは与えられた速度場・境界条件の元でのスカラーア場の計算を行う。具体的には、正方形の箱($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$)の中に熱対流を模した発散 0 の速度場(時計回りの回転)

$$\begin{cases} u \propto -\sin \pi x \cos \pi z \\ w \propto +\cos \pi x \sin \pi z \end{cases} \quad (39)$$

を与える、その元での温度場の時間発展を解く。解くべき時間発展方程式は

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (40)$$

であり、粒子法の場合は移流項を解かないかわりに粒子の移動

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \quad (41)$$

を解く。境界条件として以下の場合を考える。

$$\begin{cases} T = T_{\text{bot}} & (z = 0) \\ T = T_{\text{top}} & (z = L_y) \\ \partial T / \partial x = 0 & (x = 0, 1) \end{cases} \quad (42)$$

初期条件は縦方向に直線的であるとする。

$$T = T_{\text{top}} \left(T_{\text{bot}} - T_{\text{top}} \right) \left(1 - \frac{y}{L_y} \right) \quad (43)$$

以上の式をマルチモーメント SPH 法で解く場合、元の拡散方程式に加えて元の式を空間成分の各方向に微分する式も解く。

$$\frac{dT_x}{dt} = \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} T_x + \frac{\partial w}{\partial x} T_z \right) \quad (44)$$

$$\frac{dT_y}{dt} = \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} T_x + \frac{\partial w}{\partial z} T_z \right) \quad (45)$$

ここで右辺第 2 項は速度場が一様でないために生じる余分な項である。従属変数 T_x および T_y に対する境界条件は問題の対称性を考慮して与える。

まず、与えられた問題を通常の SPH 法を用いて解いた(図 2)。図は時間発展途上のスナップショットである。温度場もっともらしいものが得られているが、Laplacian ($\nabla^2 T$) は大きくばらつくことがわかる。標準的な Laplacian は精度が低いこと [8,11] を反映していると考えられる。一方で、このような Laplacian を用いても問題が実用的には解ける点は興味深い。

次に同じ問題を最小二乗 IDO-SPH 法を用いて解いた(図 3)。ここで得られた温度場は通常の方法で得られたものとほぼ同じである。しかしここでは温度の Laplacian も滑らかに得られていることが注目に値する。これは、高精度の計算を行う上では欠かせない性質であると考えられる。

7. 議論・結論

本論文では、まず差分法と粒子法それぞれの発展の過程をたどった。差分法は Taylor 展開に基づく方法である。基本的には規則的な格子を用いる。たとえば 1 次元格子において着目点とその両隣の計 3 点を考える。最小二乗差分法は差分法を不規則な点に適用できるようにした方法である。格子というよりは、着目する点からの距離に応じて繋がった点の群と考えた方がよい。最小二乗 SPH 法は最小二乗法差分法とほとんど同じ方法だが、外的あるいは運動方程式により与えられる速度場にしたがって点が動く所が差分系の方法とは決定的に異なる。

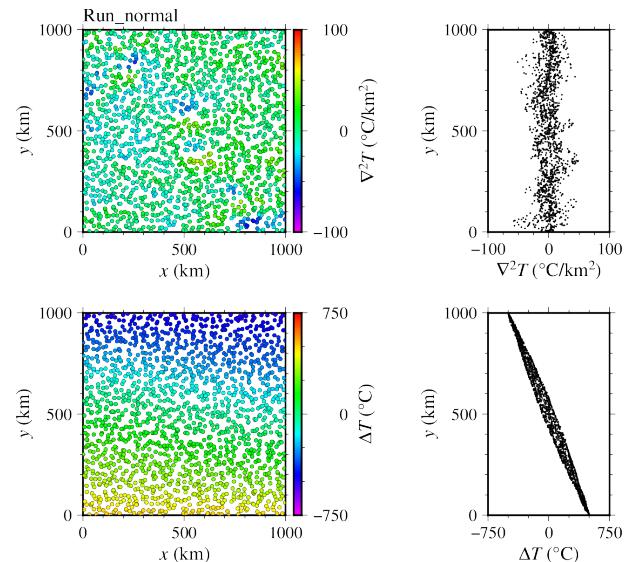


図-2 通常の SPH 法によるキネマティック計算。(上段) 温度 Laplacian の深さ方向への投影、(下段) 温度とその深さ方向への投影。

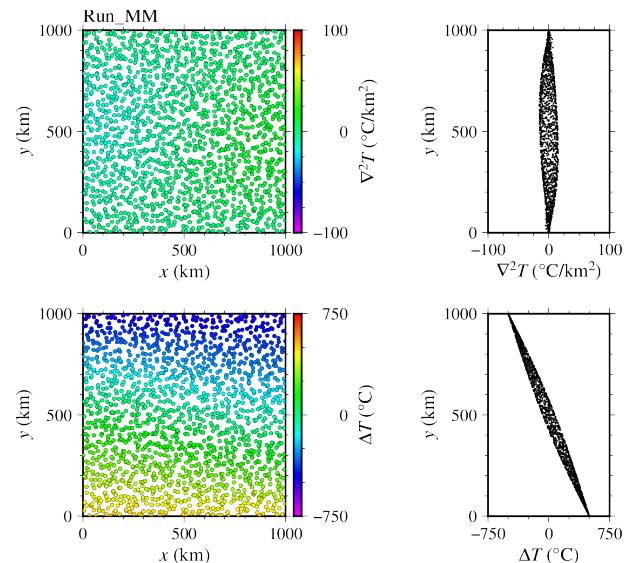


図-3 最小二乗 IDO-SPH 法によるキネマティック計算。(上段) 温度 Laplacian の深さ方向への投影、(下段) 温度とその深さ方向への投影。

謝辞： 本講演は科学研究費 22K03765 の支援を受けた。

参考文献

- [1] Stevenson, D. J.: Models of the Earth's core, *Science*, vol.214(4521), pp.611-619, 1981
- [2] Abe, Y: Thermal and chemical evolution of the terrestrial magma ocean, *Phys. Earth Planet. Int.*, vol.100(1-4), pp.27-39, 1997.
- [3] McKenzie, D. P.: The generation and compaction of partially molten rock, *J. Petrol.*, vol.25(3), pp.713-765, 1984.

- [4] Marsh, B. D.: Magma chambers, *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, vol.17(1), pp.439-472, 1989.
- [5] 矢部孝, 内海隆行, 尾形陽一: CIP 法 –原子から宇宙までを解くマルチスケール解法–, 森北出版, 2003.
- [6] Liszka, T., Orkisz, J: The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics, *Comput. Struct.*, vol.11(1-2), pp83-95, 1980.
- [7] 村山真理, 野口裕久, 張智謙: メッシュフリー法近似による高階微分の算出と精度について, 計算力学講演会講演論文集, vol.21, pp201-202, 2008.
- [8] 浅井光輝: 明解 粒子法 SPH, MPS, DEM の理論と実践, 丸善出版, 2022.
- [9] Tamai, T., Koshizuka, S.: Least squares moving particle semi-implicit method: An arbitrary high order accurate meshfree Lagrangian approach for incompressible flow with free surfaces, *Computat. Particle Mech.*, vol.1, pp.277-305, 2014.
- [10] Asai, M., Fujioka, S., Saeki, Y., Morikawa, D. S., Tsuji, K.: A class of second-derivatives in the Smoothed Particle Hydrodynamics with 2nd-order accuracy and its application to incompressible flow simulations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol.415, no.116203, 2023.
- [11] 菖蒲迫健介ほか: 最小二乗法を用いた SPH 法の高精度化について, 計算工学講演会論文集, Vol.29, 2024.
- [12] 肖鋒, 伊井仁志, 小野寺直幸: 計算流体力学–CIP マルチモーメント法による手法–, コロナ社, 2009.
- [13] Aoki, T.: Interpolated differential operator (IDO) scheme for solving partial differential equations, *Comput. Phys. Comm.*, vol.102(1-3), pp132-146, 1997.
- [14] Imai, Y., Aoki, T.: A higher-order implicit IDO scheme and its CFD application to local mesh refinement method, *Comput. Mech.*, vol.38, pp.211-221, 2006.
- [15] 秋元智博, 登坂宣好: 高次補間を用いた非圧縮性粘性流れ解析, 日本計算工学会論文集, 20010011, 2001.
- [16] Atluri, S. N., Cho, J. Y., Kim, H. G.: Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov–Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations, *Computat. Mech.*, vol.24(5), pp.334-347, 1999.
- [17] Monaghan, J. J.: Smoothed particle hydrodynamics, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol.30, pp.543-574, 1992.