

# Stokes 問題の有限要素/スペクトル混合近似に現れる inf-sup 定数について

On the inf-sup constant in a finite element / spectral mixed approximation  
of Stokes problems

内海晋弥<sup>1)</sup>  
Shinya Uchiumi

<sup>1)</sup>博 (理) 北海道大学 電子科学研究所 特任助教 (〒 060-0812 北海道札幌市北区北 12 条西 7 丁目,  
E-mail: shinya.uchiumi@es.hokudai.ac.jp)

Recently we have proposed a finite element / spectral mixed approximation of the Stokes problem. The proposed method is accurate for the problem with small viscosities. The resultant linear system can be efficiently solved by iterative solvers. Here we review the finite element / spectral mixed approximation and discuss the inf-sup stability, which is important for well-posedness of the discretized problem.

**Key Words** : Stokes problem, finite element method, spectral method,  $p$ -FEM, inf-sup condition, small viscosity

## 1. はじめに

### (1) Stokes 問題の Galerkin 近似と inf-sup 安定性

流体の運動を記述する Navier–Stokes 方程式の解の数値計算において、非線形性の扱いや移流項の適切な近似法等の多くの議論があるが、ここでは Stokes 問題に焦点を当て、未知関数である流速と圧力の近似法に注目する。問題を Galerkin 近似して解を求める場合、流速と圧力を近似する空間を独立に選ぶことはできず、これらの対が inf-sup 条件を満たすことが要求される [3,9]。これは、流速近似空間の自由度を圧力のそれよりも「十分大きく」する必要性を意味している。inf-sup 定数の大きさは近似解の精度だけではなく、離散化後の連立一次方程式の係数行列の条件数にも影響する [7]。

Galerkin 近似の一つである有限要素法は様々な領域に適用可能であるという幾何学的柔軟性が特長の一つである。流速に三角形 2 次要素、圧力に三角形 1 次要素を用いる近似空間の対 (P2/P1 要素) は inf-sup 条件を満たすものとしてよく知られている [3,9]。

一方、長方形領域においては、スペクトル法が小さい自由度で高精度な計算ができる手法として知られている。論文 [2] においては、流速に双  $N$  次、圧力に双  $[λN]$  次多項式の対の  $N$  について一様な inf-sup 安定性が示されている。ここで、 $0 < λ < 1$  は定数であり  $[·]$  は整数部分を表す。  $λ = 1/2$  のときの数値結果は [1] でみられ、さらに、流速双  $N$  次、圧力双  $N - 1$  次多項式の対は inf-sup 条件を満たしていないことも観察できる。スペクトル法においては双  $k$  次多項式の使用が一般的ではあるが、[13] では流速に双  $N$  次、圧力に (単なる)  $N - 1$  次多項式を用いる対が提案され、[2] では  $N$  について一様な inf-sup 安定性が示されている。多角形上で高次多項式を用いる方法としては、最近、virtual element method が提案、解析されている [5]。

### (2) 小さい粘性係数をもつ問題に現れる不安定性

高 Reynolds 数 Navier–Stokes 問題においては、複数の要因から計算に不安定性が現れる。その一つは移流項の卓越であるが、それに対しては、流れの上流方向の情報に重きをおいた計算手法が有効であることが知られている [12]。一方、移流項の問題とは別に、圧力の近似誤差が流速の不安定性となって現れることにも注意されたい。総説 [8,10] において、そのような問題に対して、P2/P1 有限要素によって良好に近似解を計算できない例が報告されている。総説 [10] では、通常の有限要素近似においては厳密に満たされない非圧縮性の近似度が重要な論点となっている。非圧縮性の近似度を高める一つの方法は、grad-div 安定化項の付加である。一方で、[4,6,14] においては圧力の近似度に注目することにより、粘性係数依存性の改善が行われてきた。しかしながら、いずれの方法においても、安定化パラメータの選択によっては、離散化後の連立一次方程式が反復法で解きづらくなる問題点がある。

### (3) 有限要素/スペクトル混合近似と本報告の目的

有限要素法がもつ幾何学的柔軟性と前述の圧力の高精度近似を両立させる目的で、流速を有限要素近似、圧力をスペクトル近似する対が提案されている [15]。本報告においては、流体のモデル問題として Stokes 問題を考え、有限要素/スペクトル混合近似をレビューし、いくつかの数値結果を紹介する。さらに、この組の inf-sup 条件に現れる定数の大きさについて、理論と数値計算結果の両面から考察する。

## 2. Stokes 問題とその Galerkin 近似

流速と圧力の組  $(u, p) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$  を未知関数とする Stokes 問題

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f, \quad x \in \Omega, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1b)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1c)$$

を考える. ここで,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  は多角形領域,  $\partial\Omega$  はその境界,  $\nu$  は粘性係数を表す正の定数,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  は与えられた外力を表す.

連続問題においては  $V \times Q := H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$  が基盤となる, 流速と圧力に対応する関数空間である. ここで,  $H_0^1(\Omega) := \{\psi \in H^1(\Omega); \psi = 0, x \in \partial\Omega\}$ ,  $L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$  である.

$V_G \subset V$ ,  $Q_G \subset Q$  をそれぞれ有限次元部分空間とする. 問題 (1) の Galerkin 近似問題は, 次を満たす  $(u_G, p_G) \in V_G \times Q_G$  を求める問題である.

$$a(u_G, v_G) + b(v_G, p_G) = (f, v_G) \quad \forall v_G \in V_G, \quad (2a)$$

$$b(u_G, q_G) = 0 \quad \forall q_G \in Q_G. \quad (2b)$$

ここで,  $(\cdot, \cdot)$  は  $L^2(\Omega)$  内積  $(\phi, \psi) := \int_{\Omega} \phi \psi \, dx$  であり,

$$a(u, v) := \nu(\nabla u, \nabla v), \quad b(v, q) := -(\nabla \cdot v, q).$$

以下では,  $L^2$  ノルムの記号  $\|\psi\|_{L^2(\Omega)} := (\psi, \psi)^{1/2}$  も用いる.

問題 (2) が適切であるためには, inf-sup 条件

$$\inf_{q_G \in Q_G \setminus \{0\}} \sup_{v_G \in V_G \setminus \{0\}} \frac{b(v_G, q_G)}{\|\nabla v_G\|_{L^2(\Omega)} \|q_G\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta (> 0) \quad (3)$$

の成立が要求される. さらに, 良好な数値解や理論結果を得るためには,  $\beta$  が離散化パラメータに依存しないことも要求される.

もとの問題 (1) の解  $(u, p)$  と Galerkin 問題 (2) の解  $(u_G, p_G)$  の間には次の誤差評価が成り立つ [9].

**補題.**  $V_{G0} := \{w_G \in V_G; b(w_G, q_G) = 0, \forall q_G \in Q_G\}$  とするとき,

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_G)\|_{L^2(\Omega)} &\leq 2 \inf_{w_G \in V_{G0}} \|\nabla(u - w_G)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \nu^{-1} \inf_{q_G \in Q_G} \|p - q_G\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\inf_{w_G \in V_{G0}} \|\nabla(u - w_G)\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + \beta^{-1}) \inf_{v_G \in V_G} \|\nabla(u - v_G)\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \|p - p_G\|_{L^2(\Omega)} &\leq \nu \beta^{-1} \|\nabla(u - u_G)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (1 + \beta^{-1}) \inf_{q_G \in Q_G} \|p - q_G\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6)$$

式 (4) の右辺第 2 項に  $\nu^{-1}$  が現れていることに注意する.

## 3. 有限次元部分空間の例と有限要素/スペクトル混合近似

### (1) 有限次元部分空間の例

集合  $\omega \subset \mathbf{R}^2$  に対し,  $\mathbf{P}_k(\omega)$  を  $\omega$  上の (単なる)  $k$  次多項式の集合,  $\mathbf{Q}_k(\omega)$  を双  $k$  次多項式の集合とする.

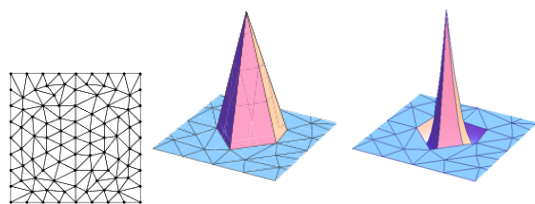


図-1 P1 と P2 有限要素空間の基底関数

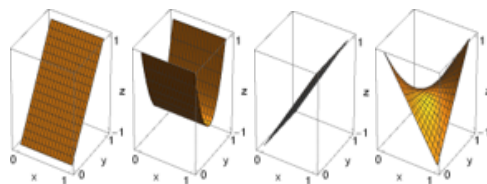


図-2 スペクトル空間の基底関数

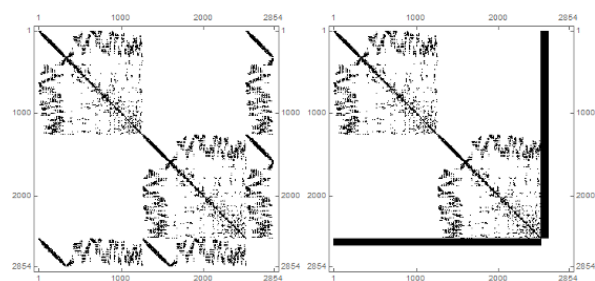


図-3 剛性行列の非零パターン. P2/P1 要素 (左), 有限要素/スペクトル混合近似 (右).

$\{\mathcal{T}_h\}_{h \downarrow 0}$  を正則な三角形分割列とする.  $X_h^{(k)}$  を  $\mathcal{T}_h$  上の  $P_k$  有限要素空間とする (図-1). すなわち,

$$X_h^{(k)} := \{\psi_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}, \text{連続}; \psi_{h|K} \in \mathbf{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

正整数の組  $(k, l)$  に対し,  $(V_h^{(k)}, Q_h^{(l)})$  を  $P_k/P_l$  有限要素空間とする. すなわち,  $V_h^{(k)} := (X_h^{(k)})^2 \cap V$ ,  $Q_h^{(l)} := X_h^{(l)} \cap Q$ . P2/P1 要素は inf-sup 条件を満たす代表的な要素である [3,9] が, P1/P1 や P2/P2 要素は適切な安定化項を必要とする [8].

正整数  $N$  に対し,  $\mathbf{P}_N := \mathbf{P}_N(\Omega) \cap Q$ ,  $\mathbf{Q}_N := \mathbf{Q}_N(\Omega) \cap Q$  とおく (図-2). ここではこの空間での近似をスペクトル近似と呼ぶ.

### (2) 有限要素/スペクトル混合近似

ここでは, 流速に有限要素近似, 圧力にスペクトル近似した対を用いる. 特に,  $(V_h^{(2)}, \mathbf{P}_N)$  と  $(V_h^{(2)}, \mathbf{Q}_N)$  を用いる.

$(\phi_j)_j$  と  $(\psi_j)_j$  をそれぞれ  $V_G$  と  $Q_G$  の基底関数とする.  $A_{ij} := a(\phi_j, \phi_i)$ ,  $B_{ij} := b(\phi_j, \psi_i)$ ,  $f_i := (f, \phi_i)$  とし,  $\mathbf{u} = (u_j)_j$  と  $\mathbf{p} = (p_j)_j$  をそれぞれ  $u_G = \sum_j u_j \phi_j$  と  $p_G = \sum_j p_j \psi_j$  を満たすベクトルとすれば, 解くべき連立一次方程式は

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．図-3 に P2/P1 要素と有限要素/スペクトル混合近似の左辺の行列の非零パターンを示す．

### (3) 前処理

圧力には境界条件がないため，本手法は  $\Omega$  が長方形でなくても  $\mathbf{P}_N$  と  $\mathbf{Q}_N$  は定義可能である．しかし，その基底の選び方は連立一次方程式の係数行列の条件数に影響する．同種の影響は virtual element method でも報告されている [11]．ここでは， $\mathbf{P}_N$  または  $\mathbf{Q}_N$  の基底を  $(\psi_j)_j$  とし， $M_{ij} := (\psi_j, \psi_i)$  とおいて，

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & M^{-1} \end{pmatrix}$$

という前処理を提案する． $\mathbf{P}_N$  または  $\mathbf{Q}_N$  は自由度が少ないので， $M$  はサイズが小さいことが期待される．

### (4) 有限要素/スペクトル混合近似の inf-sup 安定性

$c_{N1}, c_{N2}$  をそれぞれ次の逆不等式に現れる定数とする．

$$\begin{aligned} \|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_{N1} \|q_N\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q_N \in \mathbf{P}_N \text{ or } \mathbf{Q}_N. \\ \|q_{N-1}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq c_{N2} \|q_{N-1}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q_{N-1} \in \mathbf{P}_{N-1} \text{ or } \mathbf{Q}_{N-1}. \end{aligned}$$

また， $c_0$  は要素  $K$  における P1 要素の補間誤差評価に現れる定数とする．

$$\|\psi - \psi_h\|_{L^2(K)} \leq c_0 h^2 |\psi|_{H^2(K)}$$

まず，弱い意味での inf-sup 条件を述べる．

**補題．**  $V_h \subset V$  を  $P_k$  ( $k \geq 1$ ) 有限要素空間とする． $c_0 h^2 c_{N1}^2 \leq \frac{1}{2}$ ,  $|\partial\Omega|^{1/2} h^{1/2} c_{N2} \leq \frac{1}{4}$  が成り立つとする．ここで  $h$  はメッシュ最大辺長を， $|\partial\Omega|$  は境界の長さを表す．このとき，

$$\sup_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{(v_h, \nabla q_N)}{\|v_h\|} \geq \frac{1}{8} \|\nabla q_N\| \quad \forall q_N \in \mathbf{P}_N \text{ or } \mathbf{Q}_N.$$

ここで， $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ．

Verfürth の技巧 [3] により，通常の inf-sup 安定性も成り立つ．

**命題．** 補題と同じ仮定の下， $h, N$  に依存しない定数  $c$  が存在して

$$\sup_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{(\nabla \cdot v_h, q_N)}{\|\nabla v_h\|} \geq c \|q_N\| \quad \forall q_N \in \mathbf{P}_N \text{ or } \mathbf{Q}_N.$$

## 4. 数値結果

### (1) テスト問題における精度と連立一次方程式の求解効率

P2/P1 要素と P2/P2 安定化法と，有限要素/スペクトル混合近似の結果を精度と連立一次方程式の求解効率の観点から比較する．P2/P2 要素に関しては， $\delta > 0$  を安定化パラメータとして，次の安定化項を用いる (cf [8])．

$$\delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^4 (\nabla^2 p_h, \nabla^2 q_h)_K.$$

ここで， $h_K^2$  は要素  $K$  の最大辺長， $(\cdot, \cdot)_K$  は  $K$  における  $L^2$  内積である．

表-1 凡例

| 凡例  | P1                       | P2-k  | SpN             |
|-----|--------------------------|---|-----------------|
| 近似対 | $(V_h^{(2)}, Q_h^{(1)})$ | $(V_h^{(2)}, Q_h^{(2)})$<br>+安定化パラメータ $\delta^{-k}$ | $V_h^{(2)}/Q_N$ |
| 備考  | P2/P1 有限要素               | P2/P2 有限要素<br>+安定化                                  | 混合近似            |

問題 (1) において  $\Omega = (0, 1)^2$ ,  $\nu = 1, 10^{-2}, 10^{-4}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin c\pi x_2 \end{pmatrix}$  とする．ここで， $c = 1, 2, 4$  とする．流速の厳密解は 0 である．

全ての近似対において，流速メッシュは図-6 のメッシュ 16 を用い，P2 有限要素を用いる．混合近似において， $\mathbf{Q}_N$  の基底は Legendre 多項式の直積とする．

表 1 は図で使われている記号の凡例である．図 4 は流速の  $H_0^1$  誤差を示している．P2/P1 要素による誤差は， $\nu = 1$  のとき  $10^{-3}$  以下であり，良好に解けているが， $\nu = 10^{-4}$  のときの誤差は 1 以上である．P2/P2 安定化法による誤差は， $\nu = 1$  のときは P2/P1 要素によるそれと大きな違いはないが， $\nu = 10^{-4}$  のときは誤差が小さくなっている．混合近似における圧力多項式の次数が小さいときには，P2/P2 安定化法よりも誤差が大きくなることもあるが，次数を大きくするとそれらよりも小さくなっている．混合近似において， $c = 4$  のときは  $c = 1$  のときよりも誤差が大きくなっている．

連立一次方程式は初期ベクトル 0, 前処理無しで最小残差法 (minimal residual method, MINRES) [7] を使って解いた．図-5 は  $c = 2$  の問題における MINRES の収束履歴を示している．P2/P2 要素よりも，混合近似の収束が速いことが観察される．

### (2) Inf-sup 安定性

本節では  $\Omega = (0, 1)^2$  とする．有限要素/スペクトル混合近似の inf-sup 定数  $\beta$  (3) を数値計算する．

第 3. 節の (2), (3) の記号を  $V_G = V_h^{(2)}$ ,  $Q_G = \mathbf{P}_N$  または  $\mathbf{Q}_N$  として用いる．また， $\nu = 1$  とする．Inf-sup 定数 (3) は

$$\beta^2 = \min_{\mathbf{q}} \frac{\mathbf{q}^T B A^{-1} B^T \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T M \mathbf{q}}$$

で特徴付けられ，右辺は一般化固有値問題の最小固有値として計算できる [7]．

メッシュ 8 とメッシュ 16 (図-6) を用い，流速は P2 有限要素空間を用いる．図-7 はそれぞれのメッシュを用いて計算された，inf-sup 定数を示している．いずれの場合においても圧力の多項式の次数  $N$  を大きくすると  $\beta$  が小さくなっている．これは，計算が不安定になりうることを示している．圧力に単なる  $N$  次多項式  $\mathbf{P}_N$  を使うほうが，双  $N$  次多項式  $\mathbf{Q}_N$  を使うより安定的であることも観察できる．また，細かい流速メッシュ 16 のほうがより安定的である．これは，命題の結果と整合している．

問題 (1) において  $\nu = 1$  とし，

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \pi x_1 \sin 2\pi x_2 \\ -\sin 2\pi x_1 \sin^2 \pi x_2 \\ \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \end{pmatrix}$$

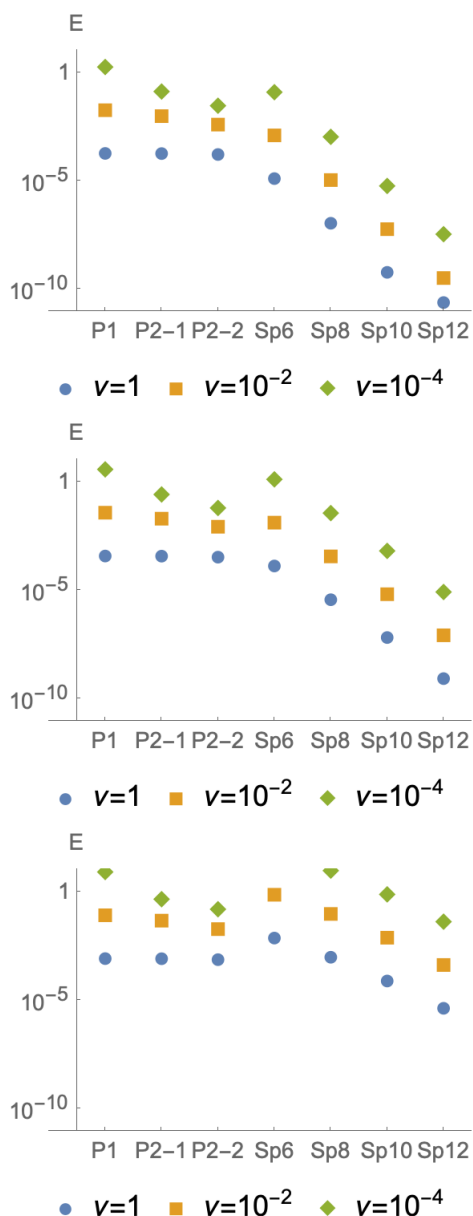


図-4 流速の  $H_0^1$  誤差. 上から順に  $c = 1, 2, 4$ .

となるように  $f$  を設定する. 図 8 と 9 は圧力解の立体図を表している. いずれも多項式の次数  $N$  を大きくしていくと, 不安定になることが観察される. 特にその不安定性は境界付近で顕著である.  $P_N$  は  $Q_N$  よりも安定であることも観察される. 流速メッシュが細かい方がより安定であることは, 命題と整合している.

## 5. おわりに

流体のモデル問題である Stokes 問題を考え, 有限要素/スペクトル近似をレビューし, inf-sup 安定性を議論した. 数学的には, ある十分条件の元での inf-sup 安定性を示した. 圧力に双  $N$  次多項式を用いるよりも単なる  $N$  次多項式を用いる方が安定であることが数値的に分かった. しかし, 数学的な評価において, これらの違いを明らかにするためには, より精密な不等式評価をする必要があると思われる.

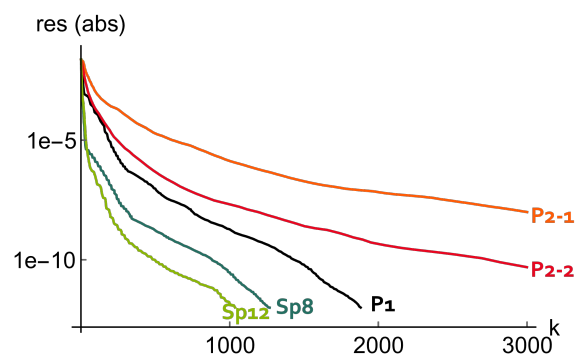


図-5 MINRES の収束履歴

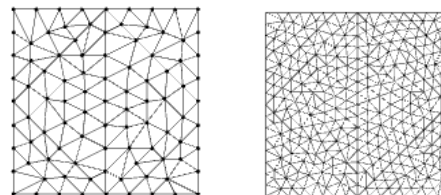


図-6 流速に用いるメッシュ8 (左) とメッシュ16 (右)

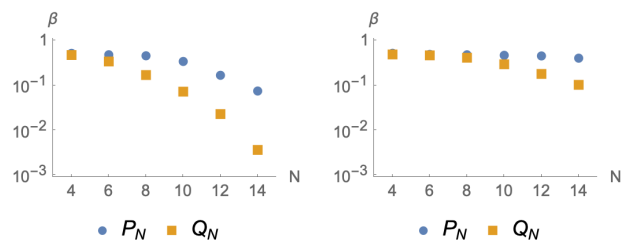


図-7 メッシュ8 (左) とメッシュ16 (右) を用いたときの数値計算により求めた inf-sup 定数  $\beta$ .

外力に大きな波数をもつ問題の数値例において, 混合近似の精度が落ちることが観察された. 複雑な現象をとらえるためには, 領域をいくつかの小領域に分けてからこの方法を適用するのが有効であると考えられる. その方面の拡張と, Navier-Stokes 問題への適用が今後の課題である.

**謝辞:** 本研究は, 科学研究費 (若手研究, 課題番号 21K13838) の助成を受けている.

## 参考文献

- [1] C. Bernardi, M. Costabel, M. Dauge, and V. Girault. Continuity properties of the inf-sup constant for the divergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 48, No. 2, pp. 1250–1271, 2016.
- [2] C. Bernardi and Y. Maday. Uniform inf-sup conditions for the spectral discretization of the Stokes problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 9, No. 3, pp. 395–414, 1999.
- [3] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer, 2013.
- [4] G. Chen and M. Feng. Analysis of solving Galerkin finite element methods with symmetric pressure

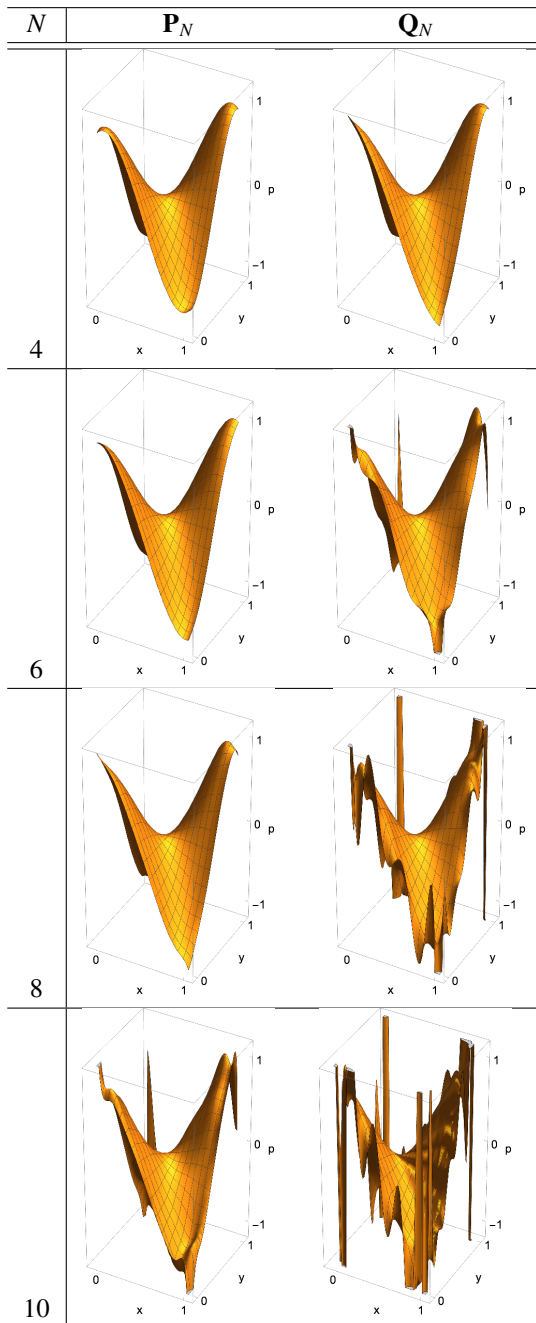


図-8 圧力解の立体図。流速メッシュ8.

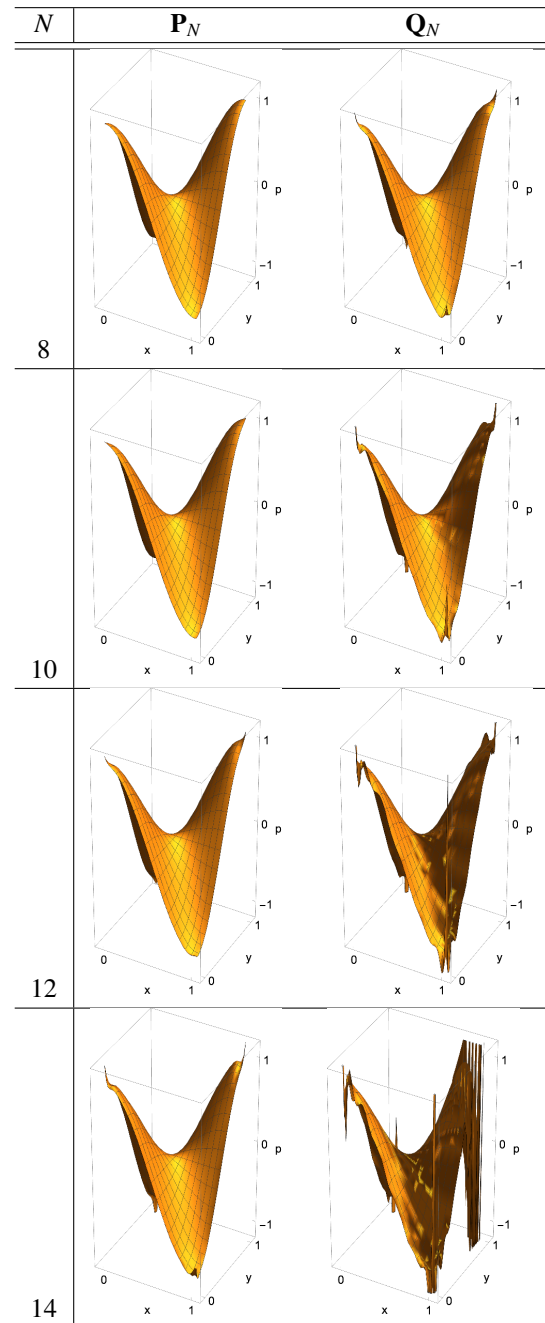


図-9 圧力解の立体図。流速メッシュ16.

- stabilization for the unsteady Navier-Stokes equations using conforming equal order interpolation. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 9, No. 2, pp. 362–377, 2017.
- [5] L. B. da Veiga, C. Lovadina, and G. Vacca. Divergence free virtual elements for the Stokes problem on polygonal meshes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 51, No. 2, pp. 509–535, 2017.
- [6] J. de Frutos, B. García-Archilla, V. John, and J. Novo. Error analysis of non inf-sup stable discretizations of the time-dependent Navier–Stokes equations with local projection stabilization. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 39, No. 4, pp. 1747–1786, 2019.

- [7] H. Elman, D. Silvester, and A. Wathen. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers*. Oxford, 2014.
- [8] B. García-Archilla, V. John, and J. Novo. On the convergence order of the finite element error in the kinetic energy for high Reynolds number incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 385, p. 114032, 2021.
- [9] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer, 1986.
- [10] V. John, A. Linke, C. Merdon, M. Neilan, and L.G. Rebholz. On the divergence constraint in mixed finite element methods for incompressible flows. *SIAM Review*, Vol. 59, No. 3, pp. 492–544, 2017.
- [11] L. Mascotto. Ill-conditioning in the virtual element

- method: Stabilizations and bases. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 34, No. 4, pp. 1258–1281, 2018.
- [12] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*. Springer, 2008.
- [13] R. Stenberg and M. Suri. Mixed  $hp$  finite element methods for problems in elasticity and Stokes flow. *Numerische Mathematik*, Vol. 72, No. 3, pp. 367–389, 1996.
- [14] S. Uchiumi. A viscosity-independent error estimate of a pressure-stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Oseen problem. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 80, No. 2, pp. 834–858, 2019.
- [15] 内海晋弥. Stokes 方程式の解の有限要素/スペクトル混合近似. 計算工学講演会論文集, 第 27 巻, 2022.