計算工学講演会論文集 Vol. 29 (2024 年 6 月)　日本計算工学会

# 非圧縮性流れに対するルンゲクッタ陽解法の適用と圧力の収束次数低下

On the temporal accuracy reduction of the pressure in the computation of incompressible flows using Runge-Kutta method

岩津　玲磨 1)
Reima IWATSU

1)博 (工) 東京電機大学（〒 120-8551 東京都足立区千住旭町 5 千住キャンパス, E-mail: iwatsu@cck.dndai.ac.jp)

Reduction of temporal accuracy of the pressure in the computation of incompressible flows using Runge-Kutta method is discussed in the present treatise. The reason why accuracy reduction of the pressure occurs is explained for the Pressure Poisson Equation (PPE) method and the remedy for the accuracy reduction is proposed.

***Key Words :*** *incompressible fluid flows, Runge-Kutta scheme, Pressure Poisson Equation method*

## 1. はじめに

ルンゲ・クッタ (RK) 陽解法を非圧縮性流れの時間積分に適用する場合に，圧力が速度と同じ時間精度を持たず，収束次数の低下する場合があるという問題点が指摘されている [1]．この指摘は，非圧縮性流れにおいて圧力は各瞬間に速度場の分布から一意に定まり，時間変化の影響を受けない．あるいは，非圧縮性流れでは音速が無限大であるから，ある点における圧力変化の影響は瞬時に領域内に任意の点に伝わる．といった非圧縮性流れの性質と相容れないように思える．本研究では，この問題を取り上げて，圧力の収束次数低下が起こり得ること，その理由，また，収束次数低下の防止策について考察する．

特記すべき点は，圧力の収束次数低下は RK 法だけに限らず他の時間積分法においても発生し得る点であろう．

## 2. 基礎方程式

### (1) 基礎方程式

非圧縮性流体の連続の式とナビエ・ストークス (NS) 方程式に対して，以下のように初期条件と境界条件を与える．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_t = -(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u} - \mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\,\boldsymbol{u}. \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}\,|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{b}(t), \quad \boldsymbol{u}\,(t=0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3}$$

ここで，$\partial\Omega$ は領域の境界で，$\partial\Omega$ において非定常の境界条件 $\boldsymbol{b}(t)$ を与える．ディリクレ条件を与えることは，ここでの議論の一般性を損なわない．また，初期条件 $\boldsymbol{u}_0$ は適切な条件 (たとえば [2]) を満たしているものとする．

### (2) 圧力のポアソン方程式

上記の基礎方程式は，よく知られているように，連続の式を用いることによって，以下のような形に書き換えることができる．

$$\boldsymbol{u}_t = -(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u} - \mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\,\boldsymbol{u}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}\,|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{b}(t), \quad \boldsymbol{u}\,(t=0) = \boldsymbol{u}_0, \tag{5}$$

$$\Delta\,p = -\mathrm{div}\,[(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u}] - D_t, \tag{6}$$

$$p_n\,|_{\partial\Omega} = \left[-(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u} + \nu\,\Delta\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}_t\right]\cdot\boldsymbol{n}\,|_{\partial\Omega}. \tag{7}$$

ここで，$D$ は速度の発散，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ を表す．方程式系 (1)-(3) と方程式系 (4)-(7) がどのような関係性をもつのかについては，たとえば [3] に詳しい．式 (6) は圧力のポアソン方程式 (PPE) である．また，通常は，連続の式 (1) を用いることにより，右辺第 2 項は $D_t = 0$ と置かれる．

圧力が楕円型の方程式を満たすことになるため，圧力の境界条件が必要となる．圧力の境界条件として，境界に沿った方向 $\boldsymbol{t}$ の圧力勾配を与えてもよいが，普通は式 (7) のように，境界の法線 $\boldsymbol{n}$ 方向の圧力勾配 $p_n$ を指定することになる．上述のふたつの境界条件は同等とされている [3].

## 3. 数値計算法

### (1) PPE 法

圧力のポアソン方程式を利用した計算法は PPE 法と呼ばれる．しかし，式 (6) のソース項において $D_t = 0$ として，これを時刻 $t^n$ から $t^{n+1} (= t^n + \Delta t)$ への時間進行に適用すると，次ステップ $n+1$ における速度場の発散がゼロになる保証がない [3,4]．このため，PPE を時間積分法と併用して時間を進めていくと，しばらくの間はそれなりに解が求まるが，ある程度時間が進むと流量の保存が成り立たなくなって発散してしまう．計算の破綻をふせぐため，式 (6) のソース項に次ステップにおける連続の式 $D^{n+1} = 0$ を代入して，補正項とする解決策が用いられる．

たとえば，自由表面流れなどを解くためによく用いられる MAC 法 [5] では，運動方程式 (2) をオイラーの陽解法で時間進行させ (下記左側の式)，PPE(6) のソー

ス項に下記右側のような補正項を加える．

$$\boldsymbol{u}_t \fallingdotseq \frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t}, \quad -D_t \fallingdotseq \frac{D^n}{\Delta t}. \tag{8}$$

**(2) RK-CPPE 法**

非圧縮性流れの時間発展にルンゲクッタ (RK) 法と PPE 法の組み合わせを用いる場合の問題点は，圧力をどのように求めるかであろう．運動方程式 (2) の発散をとって圧力のポアソン方程式を導出すれば，物理的なソース項 $-\mathrm{div}\,[(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u}]$ が RK 法の過去段における速度の値を用いて評価されることになる．これは，非圧縮性流れにおいて圧力が速度の瞬間値から決定される性質に反する．この矛盾を解消するには，運動方程式をフラックス形式から局所加速度形式に変換した後に発散をとればよい [6]．このような RK 法の $i-1$ 段から $i$ 段への時間進行は以下のように書かれる (RK-CPPE 法).

$$\Delta p_{i-1} = \mathrm{div}\boldsymbol{F}^-_{i-1} + \frac{D_1}{a_{i\,i-1}\,\Delta t} - \sum_{j=1}^{i-2}\omega_{i\,j}\frac{D_{j+1} - D_1}{\Delta t}, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial p_{i-1}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left.\left(\boldsymbol{F}^-_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1}\omega_{i\,j}\frac{\boldsymbol{b}_{j+1} - \boldsymbol{b}_1}{\Delta t}\right)\cdot\boldsymbol{n}\right|_{\partial\Omega}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_0 + \Delta t\sum_{j=1}^{i-1} a_{i\,j}\left(\boldsymbol{F}^-_j - \mathrm{grad}\,p_j\right), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}_{i-1}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{b}_{i-1}, \quad i = 1,\cdots,s+1. \tag{12}$$

ただし，$\boldsymbol{F}^- = -(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u} + \nu\,\Delta\,\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}(t^n + c_i\Delta t)$. $a_{ij}, b_j$, $c_i = \sum_j a_{ij}$ を RK 法の係数パラメータ，$s$ を RK 法の段数とするとき，$c_{s+1} = 1$, $a_{s+1\,j} = b_j$, $j = 1,\cdots,s$ とおき，$(\omega_{ij}) = (a_{i+1,j})^{-1}$ とすれば，$\boldsymbol{u}_{s+1} = \boldsymbol{u}^{n+1} + O(\Delta t^{\mathrm{p}})$ となる．ここで p は RK 法の時間精度を表す.

## 4. ルンゲクッタ法の時間精度

### (1) 圧力の時間精度

ルンゲクッタ (RK) 法を常微分方程式の解法として用いる場合の時間精度に関しては，教科書 (たとえば [7]) に詳しく述べられている．前節で述べた RK-CPPE 法の場合，係数パラメータ $a_{ij}, b_j, c_i$ を定めたときに，速度の時間精度は，圧力を考慮しなければ，常微分方程式に対する時間精度 p で与えられる.

しかし，運動方程式 (12) は圧力方程式 (9) と連立しているため，速度の時間精度は圧力の時間精度にも依存する．物理的な直観にもとづけば，圧力の時間精度は速度の時間精度と同じであると考えがちであるが，圧力方程式の境界条件 (10) には境界における速度の時間微分項が含まれている (右辺第 2 項)．この項は，もともと圧力のポアソン方程式に対する境界条件 (7 式の右辺第 3 項 $\boldsymbol{b}_t$) に由来しており，非定常な境界条件を課す場合には無視することができない.

すなわち，RK 法を非圧縮流れに適用する場合には，境界における局所加速度項を RK 法の係数パラメータを用いて見積もることになるために，その近似精度によって圧力の精度が制約を受けることになる．ここに述べたことを式で書き表すと，

$$(\boldsymbol{b}_t)_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1}\omega_{i\,j}\frac{\boldsymbol{b}_{j+1} - \boldsymbol{b}_1}{\Delta t} + O(\Delta t^{\mathrm{p}'}) \tag{13}$$

となる．ここで，p′ は差分公式 (13) の近似度である．常微分方程式を近似する係数パラメータに対する位数条件には，上式の精度に対する条件が入らないので，一般には p = p′ が成り立たない.

以上，RK 法を PPE 法と併用した場合の時間精度について議論したことは，非圧縮性流れの基礎方程式をその特殊な一例として包含するような，さらに一般的な微分代数方程式系に対する RK 法の理論で記述されるが，解読は難解である [8].

### (2) 圧力の時間精度低下の防止策

圧力の精度を速度の精度と同じとする方法はふたつ考えられる．ひとつは，$i = s$ において差分公式 (13) の精度が p′ = p となるような条件を追加することである．しかし，この方法によって，常微分方程式に対する位数条件のほかに追加の位数条件もすべて満足する係数パラメータを求めようとすると，係数パラメータはかなり限られてしまう．また，$s \geq 4$ では位数条件をすべて満たす係数パラメータは存在しない [9] などの困難に直面する.

もうひとつの方法は，圧力方程式の境界条件 (10) がポアソン方程式 (9) とコンシステントでないことを許容することにして，境界における局所加速度項 $\boldsymbol{b}_t$ を RK 法の係数パラメータを用いずに差分近似することである [10,11,12]．これによって，p = p′ とすることができるような，適当な係数をもつ差分公式の選択の幅が広がる.

最後に，この節で述べたことは，非定常な境界条件をもつ問題に RK 法を適用する場合にあてはまることであって，定常な境界条件の場合にはあてはまらない．つまり．定常な境界条件の場合には，RK を用いて時間積分すれば，圧力の時間精度は常に速度の時間精度と同じになる.

また，境界における局所加速度 $\boldsymbol{b}_t$ の値が，$\boldsymbol{b}$ の値とともに与えられているような場合には，同様に圧力の時間精度は常に速度の時間精度と同じになる.

さらに，類似の議論によって，ここで議論したことは，RK 法以外の時間積分法，たとえば線形多段法など，に対してもあてはまることが示される.

## 5. おわりに

ルンゲクッタ法を用いることによって，圧力の時間精度が低下する問題は，非定常な境界条件をともなう流れの問題に現われる．このような問題としては，移動境界をともなう流れ ( moving grid を用いて解く場合，固定格子に IB 法を用いる場合，AMR 法などを用いて解く場合)，時間依存の流入流出がある問題が挙げられる.

圧力の精度低下を，RK 法の係数パラメータの位数条件を満足する解をみつける問題として解決を図ると，求解が困難で，場合によって解が存在しないことがある．内部領域の離散化された圧力方程式と，離散化された

境界条件のあいだに成立が望まれる，離散方程式としてのコンシステンシーを緩和することによって，境界条件の時間精度を確保する方法が現実的な解決策ではなかろうか．

## 参考文献

[1] B. Sanderse and B. Koren, Accuracy analysis of explicit Runge–Kutta methods applied to the incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., Vol. 231, pp. 3041-3063, 2012.

[2] Gresho, P. M., Incompressible fluid dynamics: Some fundamental formulation issues, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 23, pp.413-453, 1991.

[3] Gresho, P. M., On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 1: Theory, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 11, pp.587-620, 1990.

[4] Gresho, P. M. and Sani, R. L., Incompressible flow and the finite element method, Volume 1:Advection-diffusion, Volume 2:Isothermal laminar flow, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 2000.

[5] Harlow, F. and Welch, J. E.. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface, Phys. Fluids., vol. 8 , pp.182–189, 1965.

[6] Iwatsu, R., Stable and consistent Runge-Kutta pressure Poisson equation method for the computation of unsteady incompressible flows, Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol. 64, pp.51-59, 2018.

[7] Butcher, J. C., Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, First Edition John Wiley and Sons Ltd., Chichester, First Edition, 2003.

[8] Hairer, E., Lubich, C., and Roche, M., The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods, Lecture Notes in Mathematics 1409, p.63, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

[9] Brasey, V. and Hairer, E., Half-explicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 2, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 30, pp. 538–552, 1993.

[10] 岩津, 低容量ルンゲクッタ法の非圧縮性流体への適用, Application of low-stage explicit Runge-Kutta scheme to the computation of incompressible flows, 第 28 回日本計算工学講演会, OS 流れの計算法 (2), F-13-03, 3pages, 5/31-6/2, 2023.

[11] 岩津, 低マッハ数近似に対する陽的ルンゲクッタ・射影法の適用, Application of explicit Runge-Kutta-projection method to the low-Mach number approximation, 第 36 回計算力学講演会, GS, OG-0006, 3 pages, 10/25-10/27, 2023.

[12] 岩津, 非圧縮・低マッハ数近似流れに対するルンゲクッタ法, Runge-Kutta scheme for incompressible or low-Mach number approximation flows, 第 37 回数値流体力学シンポジウム,12/15-12/17, 2023.