計算工学講演会論文集 Vol.29 (2024年6月) 日本計算工学会

重調和関数方程式の解法／新しい板曲げスキーム，並びに（適合化/アイソレート化）ノード法，Locking-free要素

Numerical scheme for biharmonic equation / A novel scheme for plate bending, and (conforming/isolating node) method, locking-free elements.

今村純也[1)]

Junya Imamura

1) 博(工) *imi* 計算工学研究室（〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2-so-net.ne.jp)

Bending plate problem is the most typical problem of biharmonic equations and divergence problems. This report is part of a research project to apply Helmholtz decomposition (*H-d*) to the finite element method. The equation of *H-d* accompanies Coulomb gauge（$div\boldsymbol{\psi}=0$), *i.e.* general solution for $\boldsymbol{\psi}$ and particulars:($div\boldsymbol{\psi}\neq 0$). Accordingly, bending plate scheme can be repurposed to the solid and flow problems. *H-d* can be represented in formula: $\boldsymbol{u}-\nabla\varphi^{C}=\nabla\varphi^{I}+curl\boldsymbol{\psi}$ represented by compressible and incompressible components. MAC scheme is based on the left side expression.

Key Words : *JSCES Conference, Times, Italic 9pt*

1. はじめに：有限要素法は解釈次第

(1) 課 題

本報は，Helmholtz分解（*H-d*）[1]による有限要素解法研究の一環であり，かつ結論に近い．

板曲げのたわみ w はポテンシャル φ と解釈でき，いわゆる渦なし問題である．

対照的に流れ場では，閉空間の2Dキャビティは流れ関数 ψ で表される渦度の問題で，Ghiaらの解が在る．

いずれも適合要素はC1級（C¹連続）を必要とする点では同じである．

周辺固定の等分布荷重・正方形板は厳密解が知られており，Ghiaらの解も多数の方法で検証されているので，厳密解と見なせる．

著者は板曲げも，2Dキャビティでも，C1級要素法を確立し，厳密解を再現している．

課題は3D化と，Coulombゲージ($div\boldsymbol{\psi}=0, div\boldsymbol{\Psi}=0$)を満たす技法の確立である．

3D化はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ 項の課題であり，Coulombゲージ(非圧縮条件)はスカラーポテンシャル φ 項の課題である．(板曲げは平面保持仮定により，中立面上下の面内変位 (u,v) は，それぞれが±の反対称形で，断面として(弱解として)，Coulombゲージ：$\int_h(u+v)dz=0$ を完全に満たしているが，非圧縮計算の典型問題，と捉える方が正しい！)

(2) 重調和関数方程式の数値計算法

板曲げ式：＜$\mathrm{G}\nabla^2\nabla^2 w-q=0$＞は，＜$\mathrm{G}\nabla^2\nabla^2\varphi-\rho g=0$＞で表され，2Dキャビティ式は＜$\mu curl^2 curl^2\psi-\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}=0$＞で表される．

H-d 研究の結論を先ず記して置く．

数値計算法のポイントのひとつは，φ 要素・ψ 要素いずれも，ゆがみ項を最小化＜$\varphi^{(11)}\Rightarrow 0$＞，＜$\psi^{(11)}\Rightarrow 0$＞する，ことに在る．

いまひとつは，共役変数：$(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ と $(\mathrm{A}-\mathrm{B})$ で表される方程式項の，同時最小化である．

後者は $(\varphi^{(10)}+\varphi^{(01)})\Rightarrow 0$ と $(\varphi^{(10)}-\varphi^{(01)})\Rightarrow 0$，或いは $(\varphi^{(20)}+\varphi^{(02)})\Rightarrow 0$ と $(\varphi^{(20)}-\varphi^{(02)})\Rightarrow 0$ などである．

要するに *x-y* 座標系と, 45° 座標回転した *s-n* 系で方程式を，同時に満たして行くもので，“多方向有限要素法”と呼んでいる．（或いは“Locking-free有限要素法”とも呼んでいる．）

仮想仕事式の物質微分項は数値積分時に，速度 $\boldsymbol{u}$ など，すべての変数に上流点 $(\boldsymbol{x}^{n+1}-\Delta t\boldsymbol{u})$ の値を代入することで，＜$curl^2 curl^2\psi-\rho\boldsymbol{\alpha}=0$＞などで表し得る．

＜$\varphi^{(22)}\Rightarrow 0$＞，＜$\psi^{(22)}\Rightarrow 0$＞を満たせば板曲げと2Dキャビティは，全く同様に解いて行ける．

本報は，上述の結論に到った理論的経緯を述べるものである。

(3) 非圧縮ベクトル場の２つの解法

MAC（Marker And Cell）法の提案（Harlow-Welch）により，流れ場の非圧縮解法は解決された．

開発経緯とは別に*H-d* の視点では，MAC法は φ を 介することに同じであり，φ を重み付きポテンシャル $\Delta t\mathrm{P}$ で表す方法と解釈できる．

したがってMAC法は，共役変数の概念を用いれば容易に説明(誘導)し得る．つまり，多方向有限要素法である．

また，MAC法は様々な変形法が提案され，差分法も有限要素法もある．

$\nabla\varphi$ は，非圧縮成分と圧縮成分に分け得る．

それを $(\nabla\varphi+\nabla\varphi^C)$ で 表し，＜$\{1,1,1\}\cdot\nabla\varphi\equiv\nabla^1\varphi=0$＞と＜$\nabla^1\varphi^C\neq 0$＞で表示する．

前者は一般解を与え，後者は特解を与える．したがって前者の計算は，圧縮/非圧縮に拘わらず必須である．

MAC法は $\nabla\varphi^C$ を 計算する方法である．

つまり，非圧縮変位・速度のベクトル場を＜ $\boldsymbol{u}-\nabla\varphi^C=\nabla\varphi+curl\boldsymbol{\psi}$ ＞で表せば，左辺法である．

流れ場の $\psi-\omega$ 法は右辺法の典型例である．（左辺法をネガティブスキーム，右辺法をポジティブスキームとも呼ぶ．）

C1級 ψ 要素法の確立により，その3D化を検討してきた．

本報では，右辺の一般解の解法で培ってきた技法を転用し，左辺法のスキームをまとめる．

2.　*H-d* 解法の課題はまだいろいろある

（1）混合変分原理

有限要素法の系は，部分積分して構成する．

仮想仕事式の調和関数形応力項は，ポテンシャル表示し，部分積分すれば重調和関数表示される．

その重調和関数形の仮想仕事式を，累次部分積分した式は，いずれも等価である．(ただし，要素間境界の等価集中力（ECF：Equivalently Concentrated Force）の内力仕事量を忘れずに入れる．)

一方，有限要素法はひずみエネルギー最小の原理に基づいて開発された経緯が在り，部分積分の要素間境界項がゼロの要素（つまり，要素内積分項のみの要素）を適合要素と呼び，適合要素のみを用いる変位法が発達した．

ひずみエネルギー（パワー）最小の“原理”とは，多くの人が認める経験則であり，適合要素はその経験則の項のみを表す（ことが可能な）要素である．

つまり，ひずみエネルギー法 ≡ 適合要素法 ≡ 変位法，である．

したがって，非適合要素は 変位法・ひずみエネルギー法の埒外（枠外）に在る．

ところが，板曲げの計算例では非適合要素（の方）がひずみエネルギー法でも，望ましい解を与える例が数多く報告され，鷲津により混合変分原理（Hu-Washizu principle [2][3] ）が提唱されるに至っている．

（2）離散混合変分法

一般には，変位法は変位を，応力法は応力を，それぞれ変数とする方法と説明される．

視点を，目的とする 要素間仕事量の授受に向ければ，変位法は応力差（ECF）を，応力法は変位差（$\varDelta\boldsymbol{u}$）を，それぞれ最小化する方法であり，この解釈は大切である．

それにより，エネルギー最小の原理にこだわらない有限要素解法が採れる．

つまり，重調和関数表示の仕事量の，累次部分積分法であり，結果として重調和式が表れる．

既報で，内力項 $\nabla^2\mathbf{F}$ と外力 $\boldsymbol{q}$ の仕事量平衡式の 残差 $\mathbf{R}$ の分散（variance）: $\int_\Omega \mathbf{R}^2\,d\Omega\equiv\int_\Omega(\boldsymbol{u}\cdot(\nabla^2\mathbf{F}-\boldsymbol{q}))^2 d\Omega$ を最小化（変分）することで，混合変分式＜変位法変分式＋応力法変分式＞を導いた．

残差分散最小化 ≡ パワー最小化，であり，極値の存在は明らかで，かつ，＜変位法変分式＋応力法変分式＞により，連立方程式は実対称の係数行列で表せ，解の存在も保証される．

近時，混合変分原理は＜上界/下界＞の概念，或いは＜アイソレート要素法＞の概念で説明される．

板曲げの重調和式と，ポテンシャル表示の重調和式の式形は同じであり，初めに述べたように，たわみ w はポテンシャル φ と解釈することもできる．

Coulombゲージを代数的に満たす板曲げは，中立面は変形ゼロで，非適合要素であっても変わらない．

したがって非適合要素の境界間でも，Coulombゲージは満たされている，と解釈することもできる．

平面保持仮定の代表は1D桁曲げであり，2D板曲げでは $div\boldsymbol{\theta}\Rightarrow 0$ を 要求し，典型的なCoulombゲージ問題である．

非適合境界の法線方向 面内応力は，弱形式ではゼロであるが，それらはモーメントのECFとして働く．

本報では，上述の解釈と考察により検討した *H-d* 解法を提示する．

先ず，非適合要素が望ましい解を与えた板曲げで，適合性を応力法で理論付ける“離散混合変分法”を提示する．

次いで，連続式（一般解）：＜$\nabla^1\varphi=0,\nabla^2\varphi=0$＞の解法を，速度の増分（修正量）$\varDelta\boldsymbol{u}$ でoffset（相殺）して行くMAC法系統の解法：＜ $\varDelta\boldsymbol{u}+\nabla\varphi^C\Rightarrow\boldsymbol{0}$ ＞を提示する．

（3）板曲げの離散混合変分法

非適合板曲げで，望ましい解を得た例は，准C1級（准C^1連続）要素である．（たわみ w は連続で，傾角は頂点ノード上でのみ連続．）

辺中点近傍で，傾角が不連続な准C1級要素に 傾角要素を加えて，辺中点でのみ 離散的に連続とする方法は，離散Kirchhoff（DKT，DKR）板要素として知られている．

本報では，追加する傾角要素の中点ノードを，隣接要素間で共有せず，アイソレート化して傾角差 $\varDelta\theta_n z=\varDelta u_n$ を，応力法で最小化して行く概念（つまり，仕事量差 $\varDelta(u_n\mathrm{F}_n)$ を最小化して行く方法）の“和要素法”を提示する．

かつ，スタッガード配置の和要素法を提案する．

（4）新しいCoulombゲージ解法

調和式は，$\nabla\nabla\varphi$ に含まれるゆがみ項を無視している．

重調和式 $\nabla^2\nabla^2\varphi$ も，$\varphi^{(22)}$ 項を無視する．（はじめに述べたように，$\varphi^{(11)},(\varphi^{(11)})^{(11)}$ を数値的に最小化する．）

ゆがみ項は座標回転系には表れる．その処理は重要で

あり，対策無しでは数値 Locking として表れる．

そこで，後述の離散Helmholtz分解に基づくLocking-free法を提示する．

Solidな固体・流体では，前述のように，Coulombゲージを満たす必要があり，MAC法はポテンシャル P,φ を介する．

本報では，ポテンシャル Φ,Θ を介する新しい方法を提示する．

3. ベクトル場のポテンシャル表示

(1) Helmholtz分解

ポテンシャル表示法は，自然座標系で計算するので，数値計算上，いろいろなメリットが在る．

大きなメリットは，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に代え，スカラーの自然座標 Φ で表して計算して行ける点である．

Helmholtzの定理は，Coulombゲージを制約条件として，任意のベクトル場 $\mathbf{V}$ をポテンシャルで分解表示できる，とする．

変位ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ は ＜ $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + curl\boldsymbol{\psi}\ (div\boldsymbol{\psi} = 0)$ ＞で，Lateral（縦）成分とTransverse（横）成分に分解する．

ポテンシャル記号は導関数のレベル順に，

縦成分は $(\cdots, \varphi, \Phi, \Theta, \cdots)$ で，

横成分は $(\cdots, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Pi}, \cdots)$ で，表して行くとする．

Φ が流跡関数であり，Θ は湧き出し/吸い込み（source / sink）のポテンシャルで，圧力 P のレベル（導関数の階数が同じ）のポテンシャルである．

圧力は法線応力平均と定義されており，μ を動粘性係数として＜ $\nabla\mathrm{P} = \frac{1}{3}\mu\nabla\Theta$ ＞の関係に在る．

(2) 離散Helmholtz分解

H-d は，Coulombゲージが代数的に満たされる前提の表示法である．つまり，Coulombゲージが代数的に満たされれば，座標回転表示して計算しても，同じ解を得る．

離散計算では，Coulombゲージを数値的に満たすので，複数座標系で計算して行く．

その表示法・計算法を，離散Helmholtz分解（*dHd*）法と呼んで提唱している．

dHd は，式(1)で分解表示する．

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} \nabla_{imi}\varphi \\ \nabla_{nai}\varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} curl\psi \\ shr\psi \end{Bmatrix}\ (\nabla^1\varphi \Rightarrow 0, \nabla\varphi = \nabla_{diag}\boldsymbol{\psi}) \qquad (1)$$

3Dは鏡面像で計算して行くので，ベクトルポテンシャルも，それぞれの鏡面では，流れ関数表示となる．

$\nabla_{imi}\varphi$ は2Dの $\nabla\varphi$ であり，$\nabla_{nai}\varphi$ は $\equiv \{\varphi^{(10)}, -\varphi^{(01)}\}$ である．$\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi}$ は，$\nabla\boldsymbol{\psi}$ の対角成分を表す．

dHd 法は多方向有限要素法であり，多方向に座標回転しても式が変わらないためには，有限要素は完全 *n* 次関数で表す必要がある．

ポテンシャル φ のコンターマップは，*dHd* 式(1)により，せん断による横ズレは含まれている．ψ のベクトル図・コンターは，描き方により，せん断と回転(渦)分を表せる．

(3) 有限要素関数の遷移行列表示

連続するのはひずみでなく，応力であり，連続体理論は遷移行列・状態ベクトル で組立てるべきである，と著者は主張している．

混相問題や固体・流体連成問題では，ひずみは不連続で，変位と応力が連続である．それが一般形であり，単相問題でも同様に，遷移行列表示とする．

遷移行列要素は，力のみを表す圧力要素以外はいずれも，係数ベクトルを“状態（state）vector（独：Zustandvektor）” $\{\mathbf{Z}\}_0$ で表し，任意座標点 $\boldsymbol{x}$ のZustandvektor: $\{\mathbf{Z}\}_{\boldsymbol{x}}$ は，遷移行列： $[\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}]$（還元行列とも呼び，伝達マトリックスとも邦訳されている）を乗じて，$\{\mathbf{Z}\}_{\boldsymbol{x}} = [\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}]\cdot\{\mathbf{Z}\}_0$ で表して行く．

＜Note＞…………………………………………………………

Transfer matrix 法・遷移行列“法”は連立方程式解法のひとつ，としても認識されるので，Transfer matrix 有限要素法・遷移行列有限要素法と呼ぶ，ことで区別する．

…………………………………………………………………

(4) 変位法・応力法の遷移行列表示

上界/下界の概念は，仕事量＜ $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathbf{F}$ ＞（$\nabla\mathbf{F} \equiv \nabla\mu\boldsymbol{u}$）に関し，変位法の要素間仕事量差 $(\varDelta u\nabla\varDelta\mathrm{F})_n = 0$ の，適合条件：$\varDelta u = 0$ を緩和して，非適合：$\varDelta u \neq 0$ とすることで，応力差 $\nabla\varDelta\mathrm{F}$ も緩和され，系としては望ましい分布：$(\varDelta u\nabla\varDelta\mathrm{F})_\Omega \Rightarrow 0$ が得られる，とするものである．

したがって，粘性や剛性の異なる要素間に対し，ひずみではなく応力 $\nabla\mathbf{F}$ を変数とすれば，変分 $\delta\nabla\mathbf{F}$ で，$\varDelta u \Rightarrow 0$ を計算して行けるので，たいへん都合よい．

4. 数値計算スキーム

(1) 板曲げ解法（その１）

$\varphi^{(11)}$ や $\varphi^{(22)}$ 項は，座標回転系表示には不可欠であり，数値Lockingを避けるためには，何らかの処理（最小化）を必要とする．

そこで $\varphi^{(11)} = const., \varphi^{(22)} = const.$ 要素を，重心（に限らないが）にノードパラメータ $\{\varphi^{(11)}\}_{\mathrm{COG}}$，$\{\varphi^{(22)}\}_{\mathrm{COG}}$ を設定して表し，それぞれで制約式＜ $\varphi^{(11)} \Rightarrow 0, \varphi^{(22)} \Rightarrow 0$ ＞を変分することで，数値Lockingを回避して行く．

板曲げ解法に関しては，准C1級 w 要素に，2次関数の傾角 (θ_x, θ_y) 要素を加える．

つまり，それら要素の“関数項をすべて加えて”，w 関数を表す．

傾角要素の辺中点ノードのパラメータはいずれもアイソレート化し，辺平行方向勾配はゼロ＜ $\{\theta_s\}_m = 0$ ＞を制約条件式とし，pivot 絶対値が大きい方の傾角パラメータを消去して，条件式を取り込んで行く．

数値計算ステップは，次の通りとする．

ステップ(a)：w 関数で，ひずみエネルギー式を表し，准C1級要素のノードパラメータで変分する．

ステップ(b)：w 関数で，離散混合変分式(2)を表し，両傾角要素のノードパラメータで変分する．

$$\int_{\Omega}[\delta\nabla^1\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla^2\mathbf{F}+\delta\nabla^2\mathbf{F}\cdot\nabla^1\boldsymbol{\theta}]d\Omega + \int_{\partial\Omega}[\delta\nabla^1\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla_n\Delta\mathbf{F}+\delta\nabla^2\mathbf{F}\cdot\Delta\theta_n]\partial\Omega=0 \qquad (2)$$

∇_n は要素辺法線方向の勾配，$\Delta\theta_n$ は傾角差を表す．

ステップ(a)とステップ(b)を交互に，収束するまで反復計算する．

ステップ(a)では，傾角要素のノードパラメータをgivenとし，Node-by-Node（N-by-N）に修正SOR法で，当該変分行・パラメータを，緩和計算して行く．

ステップ(b)では，上述と反対の形でパラメータを表し，Element-by-Element（E-by-E）に修正SOR法で，当該変分行・パラメータを，緩和計算して行く．

上述スキームの勾配要素は，2次要素に限らず，3次要素・准3次要素，なども適用可能である．

(2) 板曲げ要素のスタッガード配置法

DKT, DKR 板要素法から，$\boldsymbol{\theta}$ 要素と φ 要素を双対配置するパターンを発想した．スタッガード要素法である．

θ_i 要素を通常の有限要素配置とし，准C1級 w 要素頂点ノードを，θ_i 要素の重心位置に配置する．

ただし境界外の w 要素ノードは，境界上，かつ，θ_i 要素ノード位置に設定する．

w の関数は＜ $w+xy\boldsymbol{\theta}$ ＞で表して，仮想仕事変分法で解いて行く．

(3) 適合板曲げ要素の非適合化法（別法）

上界/下界の概念は，適合要素の適合性をチョット緩めれば，望ましい解を得るであろう，とするものである．

DKT, DKR 要素中点ノードのみのアイソレート化は，その概念に沿ったものであり，准C1級要素の非適合に応力法で，理論的根拠を与えるものである．

別法として，完全適合要素の適合性を緩和する方法を次に示す．

適合板曲げ要素は，頂点ノードのパラメータベクトルを $\{w^{(00)},w^{(10)},w^{(01)},w^{(11)}\}_k$ とすることで，三角形要素も四辺形要素も表し得る．

その内のパラメータ $\{w^{(11)}\}_k$ は，ゆがみの要素内分布の最小化式：＜ $w^{(11)}\Rightarrow 0$ ＞の変分にのみ適用し，他の変分には使わないことで，安定して解いて行ける．

その要素関数は，四辺形要素は双3次関数であり，三角形要素は双3次関数から $\{x^2y^2,x^3y^2,x^2y^3,x^3y^3\}$ 項を除いた不完全双3次関数である．

四辺形要素の解釈は，不完全双3次関数に，関数項：

$$w^{\#}=+x^2y^2(a^{22}+xa^{32}+ya^{23}+xya^{33})$$

を加えた，と解釈することもできる．（a^{ij} は係数）

三角形要素は，不完全3次関数に，関数項：

$$w^{\#}=+xy(a^{11}+x^2a^{31}+y^2a^{13})$$

を加えた，とも解釈できる．

かつ，いずれも頂点ノードパラメータ $\{w^{(11)}\}_k$ で表す．

上述を，四辺形には関数項：

$$w^{\#}=+xy(a^{11}+xa^{21}+ya^{12}+xya^{22})$$

を加え，三角形には関数項：

$$w^{\#}=+xy(a^{11}+xa^{21}+ya^{12})$$

を加えて表せば，同じ次数の重複項が表われるが，加えた項のパラメータは，＜ $w^{(11)}\Rightarrow 0$ ＞の変分にのみ適用することで，解いて行ける．

かつ，准C1級（傾角は不連続）に緩和される．

(4) 板曲げ解法（その２）

（DKT, DKR）板要素の$\boldsymbol{\theta}$ 要素を，上述のゆがみ処理法の観点から，$\lambda^{\#}\equiv w^{(11)\#}$ 要素に代えるモデルである．

三角形 w 要素には，2次 $\lambda^{\#}$ 要素を加え，四辺形 w 要素には双2次 $\lambda^{\#}$ 要素を加える．

いずれも頂点・中間ノードの全パラメータ$\{\lambda^{\#}\}_k,\{\lambda^{\#}\}_m$（並びに$\{\lambda^{\#}\}_{\mathrm{COG}}$）で，＜$w^{(11)}\Rightarrow 0$ ＞を変分計算して行く．

数値計算して検証する必要があるが，要素のスタッガード配置や，$\{\lambda^{\#}\}_m$ を アイソレート化して応力法で解いて行く，なども容易であり，推奨すべきモデルと考える．

(5) 板曲げ解法（その３）

ここには，ポテンシャル要素 Θ を介する新しい方法を提示する．

板曲げ式のラプラシアンをΘ として ＜$\mathrm{G}\nabla^2\Theta-q=0$＞で表す．

変形 $\nabla^2\Theta$ を応力で表す状態量の式：＜$\nabla^2\Theta=q/G$＞ と解することができる．

上述式を多方向に満たして行くには，共役変数を最小化する必要があり，結局 ＜$\mathrm{G}\nabla^2_{diag}\Theta-\{1{,}1\}^{\mathrm{T}}\cdot q=0$＞ を仮想仕事式で満たし，かつ数値的に ＜ $\Theta^{(11)}\Rightarrow 0$ ＞ として行く必要がある．

Θ をgivenとするラプラシアン式：＜$\nabla^2\mathrm{w}-\Theta=0$ ＞ を同様に解いて，収束するまで交互に解いて行く．

遡って，C1級要素は＜$\delta w\cdot(\mathrm{G}\nabla^4_{diag}w-\{1{,}1\}^{\mathrm{T}}\cdot q)=0$＞の累次部分積分による仮想仕事計算と，＜ $w^{(11)}\Rightarrow 0$ ＞に依っている．

q を一般化して加速度表示すれば，動的問題に適用でき，非圧縮流れ場計算の偽圧縮offset法として適用することもできる．

5. ま と め

板曲げ式は平面保持仮定の下に誘導されている．つまり中立面を原点とする傾角ベクトルで表される．

Helmholtz分解は任意のベクトル場をポテンシャル表示する．

したがって，板曲げの傾角ベクトル場もポテンシャル $\nabla\varphi$ で表示し得る．かつ，重調和関数式となる．

その解法は，変位ベクトル場へ一般化して適用できることを示した．

謝辞: Helmholtz分解の有限要素法への適用の研究に関し，長年慶應義塾大学名誉教授 棚橋隆彦先生にアドバイスを頂いた．記して感謝の意を表します．

参考文献

[1] 例えば：数学ハンドブック，丸善, pp.258, 1960.
[2] 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論，培風館，1972.
[3] Martine, H.C. and Carey, G.F.: 有限要素法の基礎と応用，（鷲津久一郎，山本善之共訳），培風館，1979.