

Mindlin-Reissner 板の動的解析のための分離型時間積分

Splitting Time Integrator for Dynamic Analysis of Mindlin-Reissner Plates

芳谷和哉¹⁾ 山田貴博²⁾

Kazuya YOSHIYA and Takahiro YAMADA

¹⁾修士 (情報) 元横浜国立大学 大学院環境情報学府 (E-mail: k.yoshiya4483@outlook.com)²⁾学博 横浜国立大学大学院 環境情報研究院 教授 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp)

This study applies the splitting time integrator, along with the mixed finite element method with transverse shear stress as an independent variable to the dynamic analysis of Mindlin-Reissner plates. The integrator works as an explicit method for bending deformation and as an implicit method for shear deformation. The time interval is determined by the wave velocity of the bending deformation, which alleviates the constraint of time interval. The numerical properties of the proposed approach are evaluated by numerical experiments and compared with the Verlet method and Newmark- β method.

Key Words : Mindlin-Reissner Plates, Mixed finite element, Numerical time integrator

1. 緒言

動的問題の時間発展を解くための時間積分法は、陽解法と陰解法に大別される。固体の過渡応答解析において、波動伝播現象としての力学特性に着目する場合には、位相誤差の小さい陽解法の方が有利である [1]。また自動車の衝突に代表されるような衝撃問題などの強い非線形性を有する問題に対してもロバスト性の高い陽解法が有効であり、LS-DYNA に代表される衝撃シミュレーションソフトウェアでは陽解法が採用されている。例えば、Sun 等 [2] は、弾性体の衝撃問題において、陰解法では正確な解が得られない問題に対しても、陽解法では正確な解が得られることを示している。しかし、陽解法の数値安定性は条件付きであり [3]、時間刻みに強い制約が課される。一方で、陰解法では無条件安定となる解法も存在することから、衝突などの特別な場合を除けば、一般的に陰解法が用いられている。このとき、高次モードに対する精度が犠牲となっていることに注意する必要がある。

著者は、微圧縮弾性体、ケーブルおよびはりの動的問題に対して、陽解法の時間刻みの制約を緩和する手法として、拘束条件付き問題に対する時間積分法を拡張した混合型定式化に基づく分離型時間積分を提案した [4,5,6]。この手法では、混合型定式化により独立変数として導入した変数を陰的に取り扱うことで、時間刻みの制約が厳しい変形モードを陰解法、それ以外の変形モードを陽解法として求解する。本研究では、板曲げ問題において、板の波動伝播特性を考慮し、分離型時間積分を適用する。

板の波動伝播は、Rayleigh-Lamb の理論によりせん断波速度は分散性を有し、板が薄い場合には曲げ波速度より大きいことが知られている [7]。この状況は、せん断波速度で定められるクーラン (Courant) 数の条件が数値安定性を支配し、曲げ波で定められる数値安定性の条件より厳しくなることを意味する。すなわち、板曲げ問題では曲げ変形が支配的であるにもかかわらず、陽

解法の数値安定性は面外せん断変形に起因する最小固有周期で決定されてしまう。

そこで本研究では、板の動的問題において面外せん断応力を独立変数とする混合型有限要素法に対して、曲げ変形について陽解法、せん断変形について陰解法となる分離型時間積分を導出し、時間刻みの制約を緩和する。また数値実験により、提案手法の数値特性を評価するとともに、従来の陽解法や陰解法と比較する。

2. 支配方程式

本研究では、Mindlin-Reissner 理論に基づく等方弾性平板の自由振動問題を考える。はじめに、板中央面の領域 Ω で定義された時刻 t に依存する未知変位ベクトル $\mathbf{u}$ を定義する。

$$\mathbf{u} = \{w, \beta_x, \beta_y\}^T \quad (1)$$

ここで、 w はたわみ、 β_x, β_y は板中央面の法線線素の回転角である。さらに、曲率 $\kappa(\mathbf{u})$ 、面外せん断ひずみ $\gamma(\mathbf{u})$ 、板の曲げ剛性 $\mathbf{D}$ は以下で表される。

$$\kappa(\mathbf{u}) = \left\{ \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \frac{\partial \beta_y}{\partial y}, \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right\}^T, \quad \gamma(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{array} \right\}, \quad \mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 h は板厚である。さらに、 k をせん断補正係数、 G をせん断弾性係数とし、面外せん断剛性を $D_s = kGh$ で表す。このとき、運動方程式の弱形式は、 $\mathbf{u}$ に対する仮想変位を $\hat{\mathbf{u}}$ として次式となる。

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = - \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{k}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{D} \kappa(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\mathbf{u}}) D_s \gamma(\mathbf{u})) d\Omega \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は板の面密度テンソルであり、密度を ρ とすると、 $\mathbf{I} = \text{diag}(\rho h, \rho h^3/12, \rho h^3/12)$ である。

式(3)の変位のみで記述される弱形式に対し、本研究では面外せん断応力 $\mathbf{Q} = \{Q_{xz}, Q_{yz}\}^T$ を独立変数とする混合型定式化を行う。式(3)において、Kirchhoff-Loveの仮定が成立し、面外せん断ひずみを零に拘束する場合を考え、 $\mathbf{Q}$ をLagrange未定乗数と解釈すれば、Kirchhoff板の混合型の弱形式が以下に示すように得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega &= - \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{k}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{D}\mathbf{k}(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{Q}) d\Omega, \\ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、式(4)の第2式はKirchhoff-Loveの仮定に対する拘束条件式である。

3. 時間積分

(1) Rattle 法

式(4)で表されるKirchhoff板に対する拘束条件付き問題の時間積分を考え、面外せん断ひずみに対する構成則を拘束条件からの摂動項と捉えることで拡張し、Mindlin-Reissner板に対する時間積分を導出する。このとき、拘束条件とは独立に時間刻みを決定することが可能な拘束条件付き問題に対する時間積分法を基礎とすることが鍵となる。

まず、式(4)の弱形式に対し、拘束条件付き問題に対する時間積分法であるRattle法[8]を適用する。Rattle法は、一般的な陽解法であるVerlet法[3]から導かれた2次精度の時間積分法であり、式(4)に適用すると、以下の2ステージのアルゴリズムが得られる。

[ステージ 1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) d\Omega &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} d\Omega, \\ \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} (\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}^n) d\Omega &= - \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{k}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{D}\mathbf{k}(\mathbf{u}^n) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{Q}^n) d\Omega, \\ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^{n+1}) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

[ステージ 2]

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}) d\Omega &= - \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{k}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{D}\mathbf{k}(\mathbf{u}^{n+1}) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{Q}^{n+1}) d\Omega, \\ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}^{n+1}) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{u}^n$ は時刻 t^n に対応する n ステップの変位、 $\mathbf{v}^n$ は速度の近似値である。また $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$ は n ステップと $n+1$ ステップの中間時刻における速度の近似値であり、 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ は時間刻みである。上述のアルゴリズムは、ステージ1では $n+1$ ステップにおける変位に対して、ステージ2では $n+1$ ステップにおける速度に対して、それぞれ拘束条件が課される。

(2) 分離型時間積分

Kirchhoff板にRattle法を適用して得られた上述の半離散化方程式を、著者らが提案した手法[4,5,6]にしたがって摂動系であるMindlin-Reissner板に拡張する。Mindlin-Reissner板では次式のように面外せん断応力と面外せん断ひずみの関係が表される。

$$\mathbf{Q} = D_s \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

Rattle法におけるステージ1が n ステップの時点の近似であり、ステージ2が $n+1$ ステップの時点の近似であることに留意して、式(5)の第3式と式(6)の第2式の拘束条件式を、式(7)の構成則の弱形式により置き換える。この置き換えは、Hellinger-Reissnerの原理を基礎とする混合型定式化において、コンプリメンタリエネルギーを考慮したことに相当する。これにより、分離型時間積分のアルゴリズムが以下のように得られる。

[ステージ 1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) d\Omega &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} d\Omega, \\ \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} (\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}^n) d\Omega &= - \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{k}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{D}\mathbf{k}(\mathbf{u}^n) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{Q}^n) d\Omega, \\ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}^n d\Omega &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \frac{D_s}{2} (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^{n+1}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^n) - \Delta t \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}^n)) d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

[ステージ 2]

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}) d\Omega &= - \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{k}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{D}\mathbf{k}(\mathbf{u}^{n+1}) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{Q}^{n+1}) d\Omega, \\ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \frac{D_s}{2} (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^{n+1}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^n) + \Delta t \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}^{n+1})) d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、ステージ1の面外せん断応力は、 $n+1$ ステップの変位から決定される物理量を含み、 n ステップにおける近似を構成するものとなっている。同様に、ステージ2では $n+1$ ステップの速度から決定される物理量を含み、 $n+1$ ステップにおける近似を構成するものとなっている。すなわち、せん断変形を担う自由度 $\mathbf{Q}$ については、陰的に取り扱われている。またRattle法は2次精度の解法であるため、大域的に2次精度を保つように、面外せん断応力については差分法により離散化している。このようにして得られた上述のアルゴリズムは、Mindlin-Reissner板の半離散化方程式となる。

4. 空間離散化と求解

(1) 混合型有限要素法

本研究では、せん断変形を考慮した板要素でせん断ロッキングを回避するものとして主流となっている4節点のMITC4板要素[9]と等価な双一次の混合型要素を定式化する。変位場に対する空間方向の有限要素近似では、変位法の有限要素近似[10]と同様に、 w, β_x, β_y す

べてに双一次補間を採用する。MITC 要素では、面外せん断ひずみのサンプリングを工夫しロッキングを回避するが、混合型要素では、応力の補間関数の選択で対応することが一般的である [11]。いま、MITC4 板要素のひずみ場は要素辺上の中点でサンプリングされたひずみの共変成分に対し、特別な方向に線形分布する仮定ひずみ場を構成している。一方、混合型要素でこれと同等となる応力の補間関数を設定することは困難である。そこで本研究では、面外せん断応力 $\mathbf{Q}$ については、双一次補間を用いて要素内の応力場を構成し、面外せん断ひずみ $\gamma(\mathbf{u})$ において、MITC4 板要素と同様となるひずみ場を構成する。これにより、MITC4 板要素と等価な 4 節点混合型板要素が得られる。

以上の空間離散化を行うことにより、以下に示す全体質量マトリクス $\mathbf{M}$ と混合型の剛性を表すマトリクス $\mathbf{K}_i$ が定式化される。

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{k}}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{D} \mathbf{k}(\mathbf{u}) d\Omega = \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{U} \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \hat{\gamma}^T(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{Q} d\Omega = \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{Q} \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{Q}}^T \frac{1}{D_s} \mathbf{Q} d\Omega = \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{K}_3 \mathbf{Q} \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{u}$ の加速度を離散化して得られる節点加速度ベクトル、 $\mathbf{U}$ は $\mathbf{u}$ を離散化して得られる節点変位ベクトル、 $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{Q}$ を離散化して得られる面外せん断応力の自由度である。また、速度 $\mathbf{v}$ を離散化して得られる節点速度ベクトルを $\mathbf{V}$ とする。このとき、 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ は曲げ変形を担う自由度となり、 $\mathbf{Q}$ はせん断変形を担う自由度となる。

(2) 全離散化方程式の求解

上述の空間離散化を式 (8)(9) に適用すると、全離散化方程式が以下のように導かれる。

[ステージ 1]

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n), \\ \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} (\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{V}^n) &= -\mathbf{K}_1 \mathbf{U}^n - \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}^n, \\ \mathbf{K}_3 \mathbf{Q}^n &= \frac{1}{2} \mathbf{K}_2^T (\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n - \Delta t \mathbf{V}^n) \end{aligned} \quad (14)$$

[ステージ 2]

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} (\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}}) &= -\mathbf{K}_1 \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}^{n+1}, \\ \mathbf{K}_3 \mathbf{Q}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{K}_2^T (\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{V}^{n+1}) \end{aligned} \quad (15)$$

さらに、式 (14)(15) から中間節点速度ベクトル $\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}}$ を消去することで、解くべき連立一次方程式が以下のようになれる。

[ステージ 1]

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{U}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}^n &= \left(\mathbf{M} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{K}_1 \right) \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{M} \mathbf{V}^n, \\ -\frac{1}{2} \mathbf{K}_2^T \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{K}_3 \mathbf{Q}^n &= \frac{1}{2} \mathbf{K}_2^T (\mathbf{U}^n - \Delta t \mathbf{V}^n) \end{aligned} \quad (16)$$

[ステージ 2]

$$\begin{aligned} \Delta t \mathbf{M} \mathbf{V}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}^{n+1} &= \left(\mathbf{M} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{K}_1 \right) \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{V}^n, \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_2^T \mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{K}_3 \mathbf{Q}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{K}_2^T (\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n) \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16)(17) は、ステージ 1 では $\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{Q}^n$ を、ステージ 2 では $\mathbf{V}^{n+1}, \mathbf{Q}^{n+1}$ を未知とする。このとき、変位と速度の自由度である $\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}$ は陽的に、面外せん断応力の自由度である $\mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n+1}$ は陰的に求解される。すなわち、陽解法における時間刻みの制約が弱い曲げ変形を担う自由度は陽解法で、制約が厳しいせん断変形を担う自由度は陰解法で解くことができる。しかしながら、上述のアルゴリズムでは陽的に解かれる部分においても連立一次方程式の求解が必要である。そのため、ステージ 1 の $\mathbf{U}^{n+1}$ とステージ 2 の $\mathbf{V}^{n+1}$ を各ステージで消去し、 $\mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n+1}$ のみを未知とする以下の式を導く。

[ステージ 1]

$$\left(\mathbf{K}_3 + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K}_2^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_2 \right) \mathbf{Q}^n = \left(\mathbf{K}_2^T - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K}_2^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_1 \right) \mathbf{U}^n \quad (18)$$

[ステージ 2]

$$\left(\mathbf{K}_3 + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K}_2^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_2 \right) \mathbf{Q}^{n+1} = \left(\mathbf{K}_2^T - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K}_2^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_1 \right) \mathbf{U}^{n+1} \quad (19)$$

式 (18)(19) により $\mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n+1}$ を求めた後、式 (16)(17) の第 1 式により $\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}$ を求めれば、陽的に解かれる部分において、全体質量マトリクス $\mathbf{M}$ に対角化された集中化質量マトリクスを用いることで、連立一次方程式の求解が不要となる。したがって、全自由度数に対する解くべき連立一次方程式の次元を、陰的に解かれる応力の自由度数まで減少させることが可能となる。

しかしながら、変位に回転自由度 β_x, β_y を含む板要素の集中化質量マトリクスは、回転自由度に対する質量に回転慣性を用いることに起因して、固有値解析において整合質量マトリクスの場合とは大きく異なる結果が現れることが知られている [12]。また板要素の質量集中化は容易ではない [13]。質量集中化による計算精度の低下は、時間積分の数値誤差に直接的な影響を及ぼす。したがって、本研究では時間積分の数値特性を評価することを目的として、連立一次方程式の求解を伴う整合質量マトリクスを用いた数値計算結果を示す。

5. 検証問題

検証のための問題として解析解の存在する Mindlin-Reissner 板の自由振動問題を設定する。問題は、板厚 h 、半径 $R = 0.5[m]$ の円板の横振動であり、境界条件は全

周固定とする.(図-1 参照) また材料定数を表-1 に示す. この問題の運動方程式の解は, 最終的には固有値問題を解くことで得られる. 本研究では, Senjanovic ら [14] が導いた固有値問題を数値的に解き, 固有周期の解析解を取得する.

動的解析において, 要素分割は一様分割とし, 図-2 に 48 要素の分割例を示す. 一般に, 動的解析の周期の誤差を評価するためには初期変位として固有モードの解析解を用いる. しかし, 図-2 のように円板の問題では, 円周部分の滑らかさを要素分割で表現できないため, 形状による数値誤差が生じる. これにより, 初期変位に解析解を用いた場合, 高次モードが現れてしまい, 周期の誤差を評価することは困難である. そこで本研究では, 先に固有値解析を実施し, 有限要素離散化後の形状に対する固有モードの数値解を全ての検証における初期変位として動的解析に用いる.

6. 数値計算

a) 数値安定性評価

検証問題において, 本研究の手法と, 比較対象として一般的な陽解法の Verlet 法による計算を行った. ただし, Verlet 法の計算では空間離散化に本手法の混合型要素と等価である MITC4 板要素を用いた. 安定性評価の基準は振動が 1 周期を経過した後, 振幅が大幅に増加したものを解の発散とみなし, それ以外を安定とみなす. 要素数を 48 要素とし, 円板の薄さを表すパラメータである $R/h = 10^a (a = 1, 1.5, 2, 2.5, 3)$ で計算した際の数値安定性限界を図-3 に示す. 図-3 において, Verlet 法の計算では, せん断波速度の分散性により, 板が薄くなるにつれて, 時間刻みの制約が厳しくなっている. これに対し, 本研究の手法はその制約を回避し, 一定の時間刻みの制約が課されている. したがって, せん断変形による運動が陰解法により解かれたことが読み取れ, 時間刻みの制約が緩和されたことを確認した. 数値安定性限界が一定となる要因は, 板要素の曲げ変形に対応する固有値の一部に, 板厚の薄さによってほとんど値が変わらない固有値が存在するためである. この固有値は, 波動伝播速度が定数値となる Rayleigh 波 [7][15] に対応している固有値であると推量される.

b) 誤差収束評価

振動問題における周期の誤差は空間離散化に起因する誤差と時間積分に起因する誤差の合計であることが知られている. したがって, 時間刻みのみを変化させたときの誤差を評価しても, 空間離散化の誤差が時間積分の誤差に影響を及ぼすため, 結果的に収束次数を評価することはできない. そこで本研究では, 要素代表長さ l と時間刻み Δt の比 $l : \Delta t$ を一定値に固定し, 複数の異なる要素分割と時間刻みに対して計算を行い, 計算結果から得られる周期に対して誤差を評価した. 空間方向の離散化誤差は, MITC4 板要素と等価であるため, 2 次収束である. さらに, 時間方向の離散化誤差においても, 前述の定式化で示した通り, 大域的に 2 次収束となるように設計されている. そのため, 周期の誤差は, 全体として 2 次収束することが期待される.

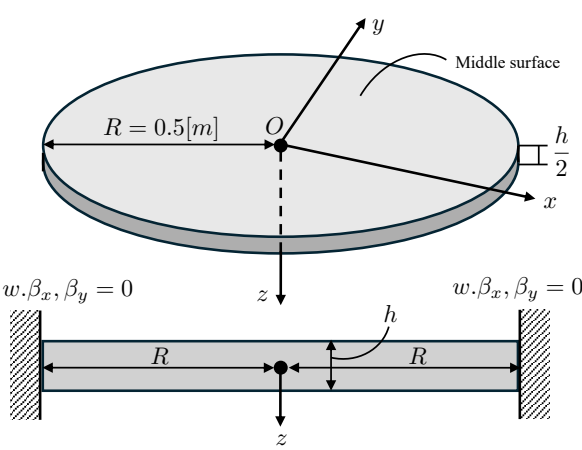


図-1 円板検証問題

表-1 材料定数

$E[\text{GPa}]$	ν	$\rho[\text{kg/m}^3]$	k	G
70	0.345	2700	$\frac{5}{6}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$

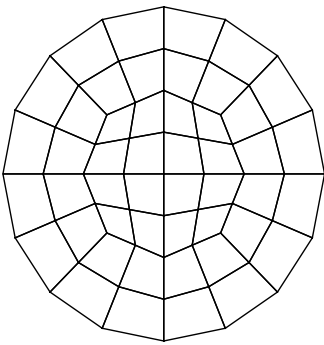


図-2 48 要素の一様分割

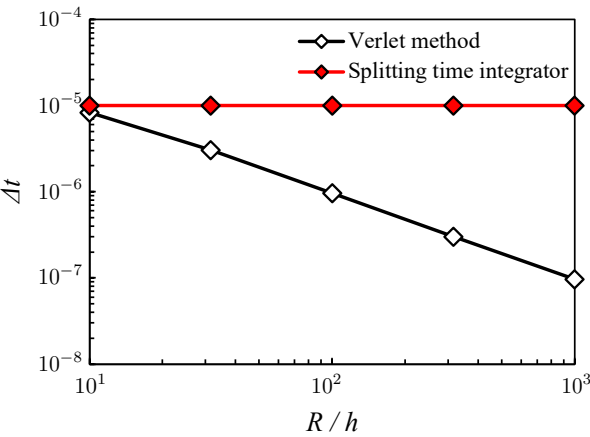


図-3 数値安定性

検証問題において、初期変位を1次の固有モードとし、板厚 $h = 0.05[m]$ と設定した。円板の中央たわみ w の時刻歴から数値解の周期 T_h を算出し、解析解の周期 T_e との相対誤差を評価した。要素数を 48, 192, 768 とする一様分割において計算した周期の誤差収束を図-4 に示す。図-4 から、空間方向と時間方向がともに2次収束することが確認できた。

c) 陰解法との精度比較

陽解法と陰解法では、位相誤差の観点では基本的に陽解法の方が優れている [1]。本研究の手法は、せん断変形による運動に対して陰解法が適用されるが、板曲げ問題は曲げ変形が支配的であるため、陽解法の優れた位相特性が維持されることが期待され、通常陰解法よりも位相誤差が小さいと考えられる。

検証問題は前項と同じであり、要素数を 48 要素、時間刻み $\Delta t = 8 \times 10^{-6}[s]$ と設定した。空間方向を有限要素離散化した時点で、固有周期が解析解よりも小さくなることを考慮して、時間積分の位相誤差を評価する必要がある。そのため、固有値解析の結果から得られる1次の固有値から周期を求め、これを用いて N 周期経過後の時間の参照解 t_{ref} を算出する。さらに、1000 周期が経過するまで計算を行い、中央たわみ w の時刻歴から、経過した周期の数 $N = 200, 400, 600, 800, 1000$ 時点での計算時間 t_h を求め、時間積分によって累積的に大きくなる N 周期経過後の時間の絶対誤差 $|t_{ref} - t_h|$ を算出した。

本研究の手法と一般的な陰解法である平均加速度法 (Newmark- β 法において $\beta = 0.25$ とする解法) [3] で計算を行った際の絶対誤差を図-5 に示す。ただし、平均加速度法の計算には、MITC4 板要素を使用した。経過した周期の数 N が多くなるにつれて、いずれも累積的に絶対誤差が増加しているが、本研究の手法の方が陰解法よりも誤差の増加が緩やかであることから、時間積分の位相誤差が小さいことが読み取れる。

位相が遅進する方向は陰解法が遅くなる方向に位相誤差が発生するのに対し、本研究の手法は支配的な変形に対して陽解法が適用されるため、位相が進む方向に位相誤差が発生する。有限要素離散化の誤差は位相が進む方向に生じるため、陰解法はその誤差を打ち消すような挙動を示すことになる。すなわち、図-5 より時間積分の位相誤差では本研究の手法が優れているといえるが、これは空間離散化による位相進みの誤差を含めた比較ではない。また陽解法で連立一次方程式の求解が不要となる利点は質量集中化を用いることで得られるものであるが、本研究では整合質量行列を係数行列とした連立一次方程式の求解を行っている。したがって、陽解法の特徴が現れる適切な集中化質量を用いた場合の計算手法を検討し、その特性を今後明らかにする必要がある。

d) 過渡応答解析

通常陽解法の数値安定性限界に対して、非常に大きな時間刻みを設定しても、本研究の手法では正確な解が得られる。検証問題において、初期変位を1次の固有モードとし、要素数を 192 要素、板厚 $h = 5 \times 10^{-4}[m]$ とする。時間刻み Δt を、Verlet 法の数値安定性限界となる時間刻みの約 42 倍である $4 \times 10^{-6}[s]$ に設定し、動

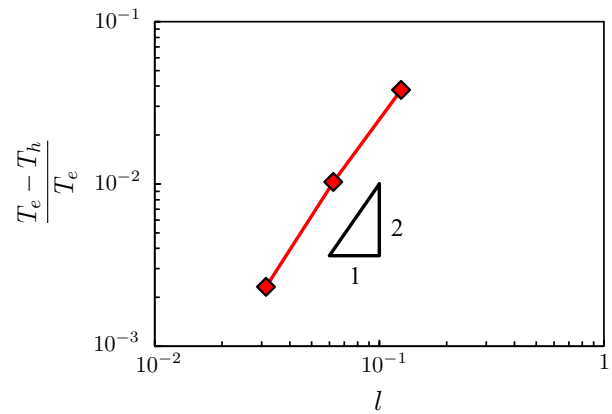


図-4 周期の誤差収束

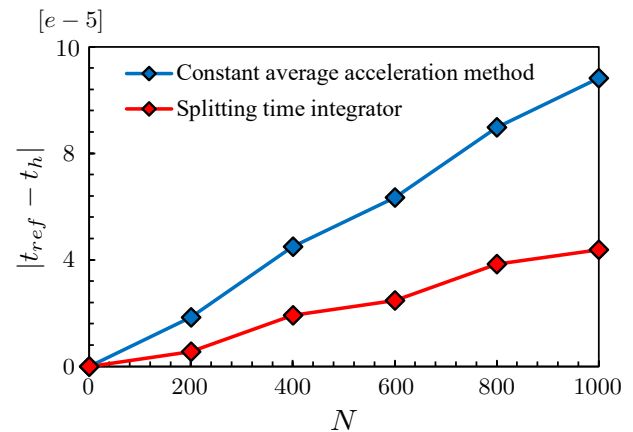


図-5 位相誤差の累積

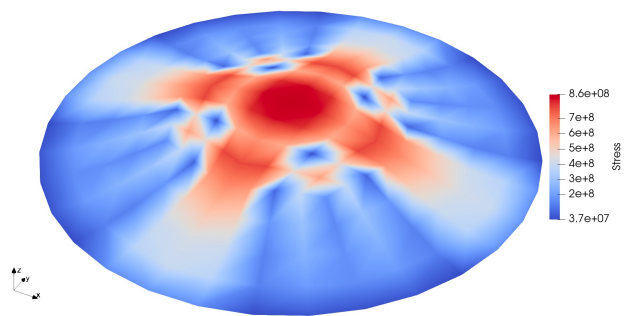


図-6 変位と面外せん断応力の分布

的解析を行った際の1周期経過後の変位のたわみ w と半径方向の面外せん断応力 Q_{rz} の分布を図-6 に示す。このとき、数値安定性が確保された計算が行われ、図-6 より、変位と面外せん断応力の分布が妥当な計算結果が得られていることを確認できた。

7. 結言

本研究では、板の波動伝播論におけるせん断波速度の分散性を考慮し、板要素に対して、曲げ変形による運動を陽的に、せん断変形による運動を陰的に求解する分離型時間積分を定式化した。これにより、板が薄くなるにつれて厳しくなるせん断波からのクーラン数

の制約を回避し、時間刻みの制約を緩和した。また提案した手法は、空間方向と時間方向がともに2次収束となる数値解法であることを示し、一般的な陰解法よりも時間積分による位相誤差が小さいことを示した。

参考文献

- [1] 山田貴博: 波動方程式に対するガラーキン法に基づく数値計算手法の特性評価, 応用力学論文集, 11, pp.117-122, 2008.
- [2] Sun, J.S., Lee, K.H. and Lee, H.P.: Comparison of implicit and explicit finite element methods for dynamic problems, Journal of Materials Processing Technology., 105, pp.110-118, 2000.
- [3] 土木学会応用力学委員会計算力学小委員会編: いまさら聞けない計算力学の常識, 丸善, 2008.
- [4] 山田貴博: 微圧縮弾性体の動的問題に対する分離型時間積分, 土木学会論文集 A2 (応用力学), 77(2), pp.217-225, 2021.
- [5] 池田貴和子, 山田貴博: ケーブルに対する混合型変分原理に基づく数値時間積分法, 計算工学講演会論文集, 6(1), pp.71-74, 2001.
- [6] 芳谷和哉, 山田貴博: Timoshenko 梁要素の動的問題への分離型時間積分の適用, 計算工学講演会論文集, 28, c-07-03, 2023. 1979.
- [7] 臼木恒雄: 横波および Rayleigh 波の位相速度に収束する Mindlin 板の理論, 土木学会論文集, 640, pp.39-48, 2000.
- [8] Andersen, H.C.: Rattle: A “velocity” version of the shake algorithm for molecular dynamics calculations, Journal of Computational Physics., 52, pp.24-34, 1983.
- [9] Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N.: A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, International Journal for Numerical Methods in Engineering., 21(2), pp.367-383, 1985.
- [10] 山田貴博: 高性能有限要素法, 丸善, 2007.
- [11] Yamada, T, Kikuchi, F. and Wada, A.: A 9-node mixed shell element based on the Hu-Washizu principle, Comput. Mech., 7, pp.149-171, 1991.
- [12] Archer, G.C.: A technique for the reduction of dynamic degrees of freedom, Earthquake Engineering & Structural Dynamics., 30, pp.127-145, 2001.
- [13] Archer, G.C. and Whalen, T.M.: Development of rotationally consistent diagonal mass matrices for plate and beam element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering., 194, pp.675-689, 2005.
- [14] Senjanovic, I. et al.: Natural vibrations of thick circular plate based on the modified Mindlin theory, Arch. Mech., 66(6), pp.389-409, 2014.
- [15] Mindlin, R.D.: Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics., 18(1), pp.31-38, 1951.