

# アイソレート要素法による平板の固有値解析の精度検証

Accuracy verification of eigenvalue analysis of  
flat plates using the Isolated element method

吉田新<sup>1)</sup>, 伊藤亮<sup>1)</sup>, 菊地彌<sup>2)</sup>, 風間悦夫<sup>3)</sup>

Arata Yoshida, Ryo Ito, Atsushi Kikuchi and Etsuo Kazama

1) 秋田県立大学システム科学技術学部 (〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口84-4,  
E-mail: ryo.ito@akita-pu.ac.jp)

2) 数値解析開発株式会社 (〒195-0072 東京都町田市金井6-27-9)

3) 数値解析開発株式会社 (〒381-0051 長野市若槻園地4-81)

The Isolated Element Method has been proposed as a new discretization analysis method for solid mechanics problems, distinct from conventional Finite Element Method. However, quantitative investigations regarding its computational accuracy have not been sufficiently conducted. In this study, focusing on the bending of thin plates as a fundamental example with theoretical analytical solutions, we applied both Finite Element Method and Isolated Element Method to analyze and compared their computational accuracies. It was demonstrated that the Isolated Element Method, especially when analyzing higher-order vibration modes, can achieve significantly higher accuracy compared to the Finite Element Method.

**Key Words :** FEM, IEM, Eigenvalue analysis, High-order mode of vibration

## 1. 緒言

従来のFEMとは異なる新しい固体力学問題の離散化解析手法として提案されたアイソレート要素法(IEM)[1]は、特に高次モードの振動解析において有限要素法(FEM)よりも高精度に解析できることが示唆されている[2]。しかしながらその精度がどの程度なのか定量的な調査は十分に行われていない。そこで、本報では理論解析解が存在する基本的な例として薄板の曲げを取り上げ、その解析に有限要素法とアイソレート要素法の2つの手法を適用し、両者を比較しながら調査を行った。

## 2. アイソレート要素法による薄板の曲げ理論

### 2.1 アイソレート要素法の変分方程式

最小ポテンシャルエネルギーの原理から以下の汎関数を定義する。

$$\Pi = U_p - W + I_{BPE} \quad (1)$$

ここで $U_p$ はひずみエネルギー、 $W$ は外力のポテンシャルエネルギー、 $I_{BPE}$ は境界ポテンシャルエネルギーである。図1に局所座標系と境界力、変位の関係を示す。ひずみエネルギー $U_p$ は以下のように表される。

$$U_p = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (M_x w_{xx} + M_y w_{yy} + 2M_{xy} w_{xy}) d\Omega \quad (2)$$

ここで、 $\Omega$ は解析領域、 $w$ はたわみである。 $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{xy}$ はそれぞれ各軸に対応するモーメントである。以後、カン

マがついた添え字は偏微分を表している。

外力のポテンシャルエネルギー $W$ は以下のように表される。

$$W = \int_{\Omega} pw d\Omega + \int_{F_1} Q_z w d\Omega - \int_{F_2} M_n w_n dS - \int_{F_3} M_{ns} w_s dS \quad (3)$$

ここで $Q_z$ 、 $M_n$ 、 $M_{ns}$ はそれぞれせん断力、曲げモーメント、ねじりモーメントである。記号に $\bar{\cdot}$ のアクセントがある場合、隣接要素から作用する値を表す。 $n$ 、 $s$ はそれぞれ単位法線ベクトル、接線方向の単位ベクトルである。

境界ポテンシャルエネルギー $I_{BPE}$ は以下のようにあらわされる。

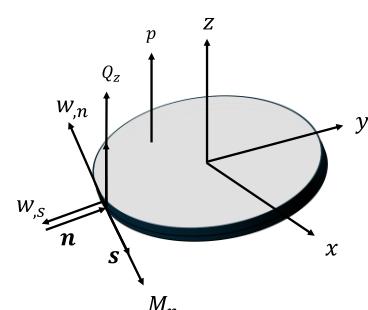


図 1. 局所座標系と境界力、変位の関係

$$\begin{aligned} I_{BPE} = & \int_{\partial\Omega} Q_z(w - \bar{w}) dS \\ & - \int_{\partial\Omega} M_n(w_n - \bar{w}_n) dS \\ & - \int_{\partial\Omega} M_{ns}(w_s - \bar{w}_s) dS \end{aligned} \quad (4)$$

式(1)に式(2), 式(3), 式(4)を代入し第一変分をとると薄い平板の曲げ解析に用いる変分方程式は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \delta\Pi_p = & - \int_{\Omega} (M_x \delta w_{xx} + M_y \delta w_{yy} \\ & + 2M_{xy} \delta w_{xy}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} p \delta w d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{Q}_z \delta w d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} \bar{M}_n \delta w_n dS + \int_{\Gamma_3} \bar{M}_{ns} \delta w_s dS \\ & + \int_{\partial\Omega} (w - \bar{w}) \delta Q_z dS \\ & - \int_{\partial\Omega} (w_n - \bar{w}_n) \delta M_n dS \\ & - \int_{\partial\Omega} (w_s - \bar{w}_s) \delta M_{ns} dS = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

## 2.2 特性方程式

各要素の変位関数を式(7)で定義する。

$$\begin{aligned} w := & a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 \\ & + \dots + a_{22}\xi^6 + \dots + a_{28}\eta^6 \quad (a_j|_{j=1}^{28} \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\xi := \{x/s | x \in X, s \in \mathbb{R}, s \text{は最大要素の辺の最大長さ}\}$$

$$\eta := \{y/s | y \in X, s \in \mathbb{R}, s \text{は最大要素の辺の最大長さ}\}$$

変位関数を未定係数ベクトル  $\alpha$  と座標のベクトル  $w(x, y)$  に分離する。式(3)の変位関数  $w$ , せん断力  $Q_z$ , 曲げモーメント  $M_n$ , ねじりモーメント  $M_{ns}$  を離散化し代入する。また, 固有値解析する場合は物体力  $p$  を式(8)に示される慣性力に置き換えて質量行列を作成する。

$$p = -\rho\omega^2 w \quad (8)$$

ここで,  $\rho$ :密度,  $\omega$ :固有円振動数である。固有値を求める場合は最終的に次式のように整理される。

$$\mathbf{M}_{ee}\alpha + \mathbf{M}_{ec}\bar{\alpha} + \Omega\mathbf{M}_{em}\alpha = \mathbf{0} \quad (9)$$

$\mathbf{M}_{ee}$ ,  $\mathbf{M}_{ec}$ ,  $\mathbf{M}_{em}$  はそれぞれ式(10)~式(12)で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ee} = & \left( \int_A \mathbf{w}_{ij}^t \mathbf{M}_R dA \right) + \left( \int_C \mathbf{Q}_n^t w dC \right) \\ & - \left( \int_C \mathbf{M}_n^t w_n dC \right) \\ & - \left( \int_C \mathbf{M}_{ns}^t w_s dC \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ec} = & \left( \int_C \mathbf{w}^t \bar{\mathbf{Q}}_n dC \right) + \left( \int_C \mathbf{w}_n^t \bar{\mathbf{M}}_n dC \right) \\ & + \left( \int_C \mathbf{w}_s^t \bar{\mathbf{M}}_{ns} dC \right) \\ & - \left( \int_C \mathbf{Q}_n^t \bar{w} dC \right) \\ & + \left( \int_C \mathbf{M}_n^t \bar{w}_n dC \right) \\ & + \left( \int_C \mathbf{M}_{ns}^t \bar{w}_s dC \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_{em} = \left( \int_A \rho \mathbf{w}^t \mathbf{w} dA \right) \quad (12)$$

ここで,  $\mathbf{w}_n$ :単位法線ベクトルに関するたわみの座標ベクトル,  $\mathbf{w}_s$ :接線方向の単位ベクトルに関するたわみの座標ベクトル,  $\mathbf{w}$ :たわみの座標ベクトル,  $\mathbf{M}_R$ :各軸に対応するモーメントの座標ベクトル,  $\mathbf{M}_n$ :曲げモーメントの座標ベクトル,  $\mathbf{M}_{ns}$ :ねじりモーメントの座標ベクトル,  $\mathbf{Q}_n$ :せん断力の座標ベクトル,  $\alpha$ :未定係数ベクトルである。上式はそれぞれの要素ごとに成り立つ式である。全要素合体の特性方程式（固有値問題の式）は以下のようになる。

$$(\mathbf{K} + \Omega\mathbf{M})\Lambda = 0 \rightarrow \mathbf{K} + \Omega\mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (13)$$

ここに,  $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N (\mathbf{M}_{ee} + \mathbf{M}_{ec})$ ,  $\mathbf{M} = \sum_{e=1}^N \mathbf{M}_{em}$ ,  $\Lambda = \sum_{e=1}^N \alpha$ ,  $N$ :要素数である。本研究ではさらにこの式を

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} + \Omega\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A} + \Omega\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (14)$$

と変形し標準固有値問題に帰着させる。この時の  $\mathbf{A}$  を特にシステムマトリクスと呼ぶ。

## 3. 数値解析例

一辺1mの全周単純支持の正方形平板を解析対象とし、アイソレート要素法による解析と有限要素法による解析それぞれについて要素の分割数を変化させ、解析解がどのようになるかを確認した。これをいくつかの振動モードで解析した。正方形の板の振動モードとしては様々なものがあるが、本研究では各解析手法の比較のため、縦横で同じ整数個の波数になる振動モードのみに着目する。一例として図2に18波×18波のモード変形図を示す。なお

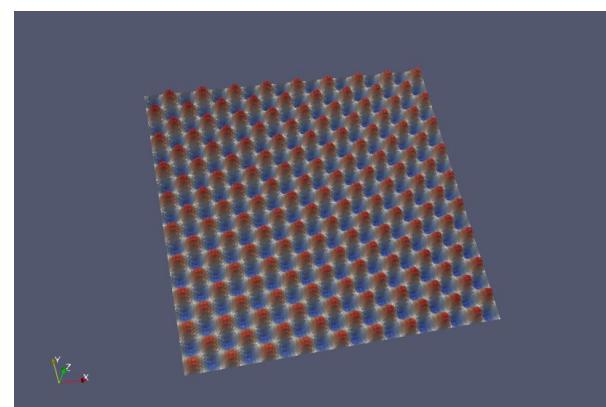


図2. 18波×18波のモード変形図

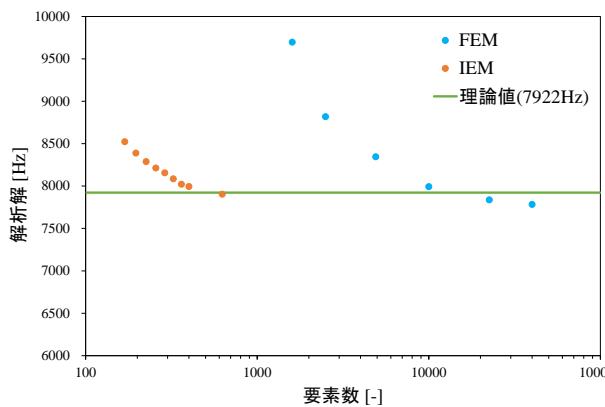


図 3.18 波×18 波の振動モードの場合の固有振動数

密度 $\rho$ , ヤング率 $E$ , ポアソン比 $\nu$ , 厚さ $h$ はそれぞれ 7900kg/m<sup>3</sup>, 209GPa, 0.3, 0.005m とした。

解析環境の都合上, 有限要素法による解析は四辺形1次薄肉シェル要素にて縦横200x200要素, アイソレート要素法による解析は四辺形板要素にて縦横25×25要素まで実施した。

図3に18波×18波の振動モードの場合の固有値解析の結果を示す。横軸は要素数であり, 縦軸は固有振動数である。有限要素法とアイソレート要素法のどちらも要素数が大きくなると理論値に近づくが, 同じ要素数で比較すると有限要素法による解析がアイソレート要素法による解析よりも誤差が非常に大きくなっていることがわかる。また, 有限要素法の場合は要素数を増加させても必ずしも精度が良くなるとは限らないことが見て取れ, V&Vの観点でアイソレート要素が優位であることが確認できた。

#### 4. 結言

アイソレート要素法を用いた固有値解析では, 有限要素法を用いた場合と比較して要素数を増やした際により少ない要素数で理論値に解が収束することが分かった。また, 解析対象が高次の振動モードであってもアイソレート要素法は高い精度を保つことができた。今後実用化に向け, より広範な解析対象物への適用を可能にするためアイソレート要素法におけるシェル要素の適用などが必要と考えられる。

#### 参考文献

- [1] 風間悦夫, 菊地彌: 変分原理によるアイソレート要素法の開発と応用に関する研究, 日本計算工学会論文集, Vol.2020, pp.20200001, 2020.
- [2] 風間悦夫, 菊地彌: アイソレート要素法による板曲げの高周波振動解析, 計算工学講演会論文集, Vol.28, 2023.
- [3] 岡部朋永: ベクトル解析からはじめる固体力学入門, コロナ社, 2013.