

時間依存性・上下負荷面弾塑性摩擦モデルの初期値問題への適用と特性把握

Application and characterization of time-dependent super/subloading surface elasto-plastic friction model to initial value problem

安池亮¹⁾ 豊田智大²⁾ 野田利弘³⁾
Ryo Yasuike, Tomohiro Toyoda and Toshihiro Noda

¹⁾学(工)名古屋大学 工学研究科 修士2年 (〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: yasuike.ryo.z9@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

²⁾博(工)名古屋大学 工学研究科 助教 (〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp)

³⁾博(工)名古屋大学 工学研究科 教授 (〒464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp)

The time-dependent super/subloading surface elasto-plastic friction model which describes the transition from static to dynamic friction as the "structure" of the contact surface, is applied to various initial value problems. The ability of model were clarified through reproduction analyses of the stop process in rough slope and so on. Also the transition process to a steady state and computational stability were discussed.

Key Words : 摩擦, stick-slip, 弾塑性

1. はじめに

著者らの専門である地盤力学分野ではこれまで、幾何的・材料非線形性を考慮した弾塑性有限変形解析が実施されることが多い。一方、地盤と構造物の境界での摩擦現象は本来強い非線形を有するが、実際の初期値境界値問題の解法において極度の単純化が行われる。つまり、完全固着条件と完全塑性すべり条件で、前者は二物体間が常に固着していてすべり出すことはない、後者は接触面における摩擦力が常に一定であるというように単純化される。しかし、実際の摩擦現象においては、相対変位の進展に伴う固着状態からすべり状態への接触面の力学状態変化および摩擦力の滑らかな減少が予想される。これまで、摩擦係数の発展則によりその連続的な変化を弾塑性力学に基づいて表現した時間依存性下負荷面摩擦モデル[1]が提案してきた。著者らは同モデルを Asaoka et al.[2] の上負荷面概念により拡張した時間依存性上下負荷面摩擦モデルを考案した。本モデルは、静止摩擦係数が動摩擦係数より大きい状態を摩擦係数の「嵩張り」と捉え、その嵩張りを接触面に定義した「構造」として表現したモデルである。構造の発展則により、塑性すべりに伴う構造の喪失が静止摩擦から動摩擦へ強度の低下(軟化)を、時間経過に伴う構造の回復が動摩擦から静止摩擦への強度の回復(時間性硬化)を表現している。本稿では、同モデルを様々な初期値問題へ適用することで、その表現能力を検証した。構造発展則のパラメータを変化させることで摩擦由来の顕著な動力学現象(安定すべり、stick-slip 現象)を再現することが可能であり、既往モデルと同等の表現能力があることを示す。ただし、既往モデルによる stick-slip 現象の再現計算とは異なり、軟化後に摩擦力が動摩擦以下まで undershoot する現象および摩擦力とすべり速度の向きが一致する現象が得ら

れた。このため、表面の粗い斜面を下る物体の停止過程の再現計算[1]を通じて、その原因がペナルティ法にあることを明らかにした。また、接触面での法線応力を増減させる計算から、法線応力変化がすべり抑制・促進に与える効果を本モデルは表現可能であることを示すとともに、物体に強制すべり変位を与える解析を実施し、摩擦力の符号反転に伴う構成式積分の計算安定性についても確認する。

2. 時間依存性・上下負荷面摩擦モデルの概要

本モデルは、摩擦力の連続的な変化を表現可能な弾塑性力学に基づいた接触面の接触応力速度と相対変位速度の構成式である。

① すべり速度の加算分解

解析対象に接する母材に対するすべり速度 \bar{v} は次式に示すように接線方向と法線方向に加算分解することができる。

$$\bar{v} = \bar{v}_t + \bar{v}_n, \quad \begin{cases} \bar{v}_t = \bar{v} - \bar{v}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{v} \\ \bar{v}_n = (\bar{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\bar{v} \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{n} は母材から見て外向き単位法線ベクトル、各記号の詳細は図-1 に示す。接触応力 \mathbf{f} の接線方向成分 f_t および法線方向成分 f_n は次式で与える。 t は $t = f_t / \|f_t\|$ と定義される。

$$\begin{cases} f_t = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} \\ f_n = \mathbf{f} - f_t = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{f} \end{cases} \quad (2)$$

さらに \bar{v}_t と \bar{v}_n についても弾性成分と塑性成分に加算分解することができる。

$$\bar{v} = \bar{v}^p + \bar{v}^e, \quad \begin{cases} \bar{v}_t = \bar{v}_t^p + \bar{v}_t^e \\ \bar{v}_n = \bar{v}_n^p + \bar{v}_n^e \end{cases} \quad (3)$$

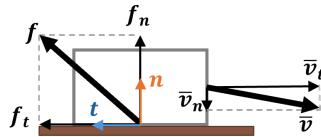


図-1: 接触面での各種変数の定義

② 弹性構成式

弹性構成式は f_t, f_n を用いて次式で表される。ただし、マイナス記号は物体に作用する接触応力速度と物体のすべり向きが逆向きであることに起因し、 α_t, α_n は接触面における接線、法線方向成分の弾性係数に相当するペナルティ係数にあたる。

$$\dot{f}_t = -\alpha_t \bar{v}_t^e, \quad \dot{f}_n = -\alpha_n \bar{v}_n^e \quad (4)$$

f の共回転速度 \dot{f} と物質時間微分 \dot{f} は接触面の剛体回転スピン Ω を用いて次式で与える。

$$\dot{f}_t = \dot{f}_n - \Omega f_t \quad \dot{f}_n = \dot{f}_n - \Omega f_n \quad (5)$$

また、弹性構成式は2階の弾性係数テンソル C^e を用いて次式のように与える。

$$\dot{f} = C^e \bar{v}^e = \{-\alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \alpha_n (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\} \bar{v}^e \quad (6)$$

③ 降伏関数

図-2のように動摩擦係数 μ_k の傾きを持つ等方的な Coulomb の摩擦基準面を正規すべり面にとる。

$$\|f\| = \mu_k \|f_n\| \quad (7)$$

それに相似かつ高位の位置に相似比 R^* ($\mu_k/\mu_s \leq R^* \leq 1$) のすべり上負荷面を定義する。

$$\|f_t\| = \frac{1}{R^*} \mu_k \|f_n\| \quad (8)$$

ここに、すべり上負荷面は最大で静止摩擦係数に相当する傾きを取り、最小で動摩擦係数に相当する傾き（正規すべり面に一致）を取る。本モデルは、正規すべり面より高位にあるすべり上負荷面が「摩擦係数が嵩張った状態」を示し、それが接触面における「構造」に起因すると考えたモデルである。摩擦係数は $\mu = \mu_k/R^*$ と表される。

さらに上負荷面に相似な相似比 R (正規すべり比: $0 < R \leq 1$) のすべり下負荷面を定義することで、正規すべり面の内側で塑性すべりが生じることを可能にしている。

$$\|f_t\| = \frac{R}{R^*} \mu_k \|f_n\| \quad (9)$$

したがって、降伏関数は次式である。

$$F(\|f_t\|, \|f_n\|) = \|f_t\| - \frac{R}{R^*} \mu_k \|f_n\| \quad (10)$$

④ 適応条件式

降伏関数より適応条件式は以下のようになる。

$$\dot{F}(\|f_t\|, \|f_n\|) = 0 \quad (11)$$

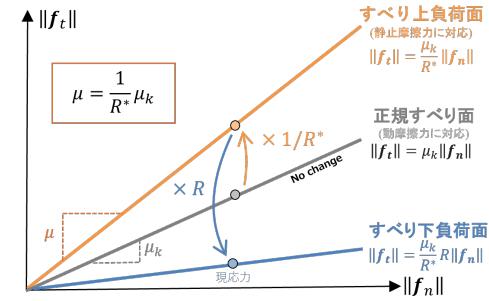


図-2: 上下負荷面

⑤ 非関連すべり流動則

塑性すべり速度に関する非関連すべり流動則を次式とする。ここで、 λ は正の比例乗数であり、塑性乗数と呼ばれる。

$$\bar{v}^p = \bar{v}_t^p = -\lambda t \quad (\bar{v}_n^p = \mathbf{0}) \quad (12)$$

この式は、相対変位に対してダイレイタンシーの影響を無視した式となっており、塑性すべりに伴って接触面で物体が上昇あるいは下降することがないことを表す。右辺のマイナスは接触応力に起因する t と塑性すべり速度 \bar{v}^p が反対向きを取ることに由来する。

⑥ 正規すべり比 R の発展則

正規すべり比 R の発展則は Toyoda et al.[3] に倣い、次式で与える。

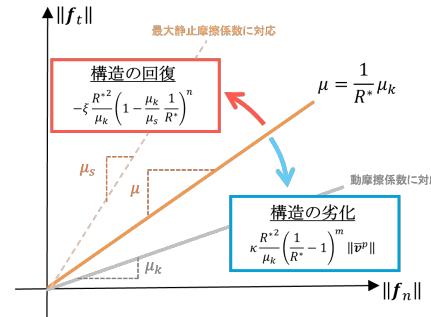
$$\dot{R} = U(R) \|\bar{v}^p\|, \quad U(R) = -r \ln R \quad (13)$$

⑦ 構造の程度 $1/R^*$ の発展則

構造の程度を表す $1/R^*$ の発展則は次式で与える。

$$\dot{R}^* = \kappa \frac{R^{*2}}{\mu_k} \left(\frac{1}{R^*} - 1 \right)^m \|\bar{v}^p\| - \xi \frac{R^{*2}}{\mu_k} \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*} \right)^n \quad (14)$$

ここで、 r, κ, m, η, n は非負の材料定数、 μ_s, μ_k は静止摩擦係数、動摩擦係数であり、Toyoda et al.[3] の表記に倣い定義している。図-3に示すように、発展則の第一項は静止摩擦から動摩擦への摩擦抵抗減少を塑性すべりに伴う構造の喪失（軟化）として、第二項は動摩擦から静止摩擦への摩擦抵抗増加を時間経過に伴う構造の回復（時間依存性硬化）としてモデル化している。

図-3: 構造の程度 $1/R^*$ の発展則の意味合い

以上より塑性すべり速度の大きさを決める塑性乗数は接触応力変化 (f_t と f_n) または相対速度 (\bar{v}) を用い

て表すことができ、それらをそれぞれ λ, Λ ($\lambda = \Lambda$) で表すと

$$\lambda = \frac{t \cdot \dot{f}_t - \xi R \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*}\right)^n \|f_n\| - \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} \cdot \dot{f}_n}{r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k \|f_n\| - \kappa R \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \|f_n\|} \quad (15)$$

$$\Lambda = \frac{\left(\alpha_n \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t}\right) \cdot \bar{v} - \xi R \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*}\right)^n \|f_n\|}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k \|f_n\| - \kappa R \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \|f_n\|} \quad (16)$$

また、接触応力速度 \dot{f} とすべり速度 \bar{v} に関する構成式について同様に求めると

$$\dot{f} = \begin{cases} \mathbf{C}^{ep} \bar{v} + \mathbf{C}^c \mathbf{t} & \dots \text{負荷 } (\bar{v}^p \neq \mathbf{0}) \\ \mathbf{C}^c \bar{v} & \dots \text{除荷 } (\bar{v}^p = \mathbf{0}) \end{cases} \quad (17)$$

ここに、

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left(\alpha_n \frac{R}{R^*} \mu_k \mathbf{n} - \alpha_t \mathbf{t}\right)}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k \|f_n\| - \kappa R \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \|f_n\|} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}^c = \frac{\alpha_t \xi R \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_s} \frac{1}{R^*}\right)^n \|f_n\|}{\alpha_t + r \frac{-\ln R}{R^*} \mu_k \|f_n\| - \kappa R \left(\frac{1}{R^*} - 1\right)^m \|f_n\|} \quad (19)$$

また、塑性すべり速度の負荷基準は塑性乗数 Λ の正定性より次式で与えられる。

$$\begin{cases} \bar{v}^p \neq \mathbf{0} : \Lambda > 0 \\ \bar{v}^p = \mathbf{0} : \Lambda \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

ただし、3. 以降の初期値問題では面の回転を考慮しないため、 $\dot{f} = \dot{f} (\Omega = \mathbf{0})$ として解析を実施している。

3. 様々な初期値問題への適用

本章における解析結果を評価する際は摩擦力 f_t ($= \|f_t\| S$) と垂直抗力 f_n ($= \|f_n\| S$) を用いて評価する。

(1) バネ～「質点」系における摩擦由来の動力学現象の再現および法線応力の影響評価

a) 解析条件

図-4 に示す一次元バネ～「質点」系の動力学計算を実施した。このときの物体の速度型の運動方程式は式(21)で与えられる。

$$M \ddot{v} = K(v_{ex} - \bar{v}) + \dot{f} S + \dot{F}_{out} \quad (21)$$

本解析では、式(21)を Wilson-θ 法によって陰的に時間離散化をし、表-1 に示す 5 つのケースに対して解析を実施した。Case1～3 は摩擦由来の動力学現象（安定すべり、stick-slip 現象）を再現することを目的に実施した。Case3～5 は、物体の接触面に作用する法線応力の時間的な増加・減少が stick-slip 現象に与える影響を評価することを目的に実施した。その他のパラメータおよび初期条件は表-2 に示す。初期時刻において物体は静止しているものとした。

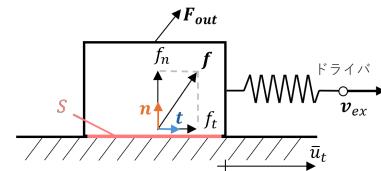


図-4: 一次元バネ～質点モデル

表-1: 実施ケース

Case	κ (mm ⁻¹)	ξ (s)	$\dot{F}_{out,n} (= \dot{F}_{out} \cdot \mathbf{n})$ (N/s)
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0.002	0
4	10.0	0.002	0.01
5	10.0	0.002	-0.01

表-2: 各種パラメータと初期条件

接触面の物性値	
静止摩擦係数 μ_s	0.4
動摩擦係数 μ_k	0.2
接線方向のペナルティ係数 α_t (kPa/mm)	1000
法線方向のペナルティ係数 α_n (kPa/mm)	1000
発展則パラメータ	
正規圧密度化指数 r	100
構造喪失速度を規定する材料定数 m	1.0
構造回復速度を規定する材料定数 n	1.0
バネ～質点系パラメータ	
質量 M (kg)	10
バネ定数 K (N/mm)	10
ドライバの接線方向速度 v_{ext} (mm/s)	0.001
接触面積 S (mm ²)	1
初期条件	
初期の構造の程度 $1/R_0^*$	2.0
初期垂直抗力 f_{n0}	98.1
初期摩擦力 f_{t0}	1.0×10^{-6}

b) 解析結果および考察

Case1～3 の接線方向の相対変位 \bar{u}_t -時間 t 関係および摩擦力 f_t -時間 t 関係を図-5 に示す。構造の喪失と回復を考慮しない Case1 (黒線) では、摩擦係数が変化しないため間欠性のない一様なすべり現象 (安定すべり) が得られた。構造の喪失のみを考慮した Case2 (青線) では、一度だけ階段状の相対変位-時間関係 (stick-slip 現象) が現れる。これは静止摩擦力から動摩擦力への低下 (軟化) を考慮したことによって得られたすべりである。その後は、構造が回復して摩擦係数が変わることはないため、Case1 同様の安定すべりが得られた。構造の喪失・回復いずれも考慮した Case3 (赤線) では、間欠的な stick-slip 現象が周期的に発生する結果が得られた。これは静止摩擦力から動摩擦力への強度低下と動摩擦力から静止摩擦力への強度回復を考慮したことによる。既往モデルの結果 [1] と同等の再現能力を有することが確認された (図-6(a))。ただし、摩擦力-時間関係 (図-6(b)) において、既往研究とは異なり、動

摩擦力より小さな値を取ることおよびその計算 step において摩擦力とすべり速度の向きが一致した。これに関しては次項(2)で説明する。

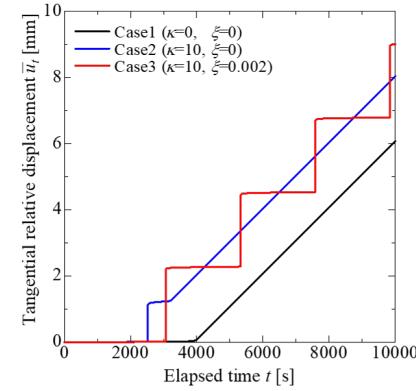
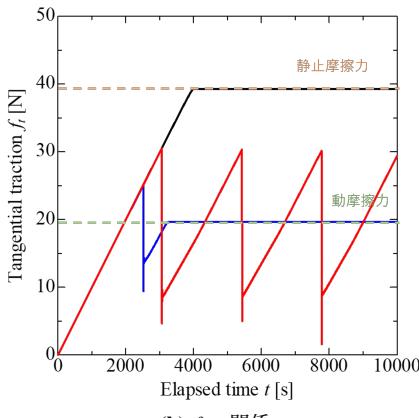
(a) \bar{u}_t-t 関係

図-5: 解析結果 (Case1～3)

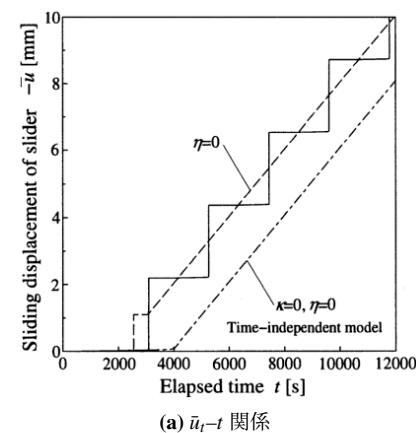
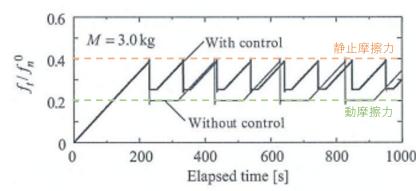
(a) \bar{u}_t-t 関係

図-6: 解析結果 (既往研究 [1])

次に、Case3～5 の相対変位 \bar{u}_t -時間 t 関係および f_t-f_n 関係を図-7 に示す。Case4 (緑線) では接触面の法線応

力增加に伴いすべりが抑制されるため、すべりの発生頻度は低く、一回当たりのすべり量は、Case3 (赤線) に比べて大きい。一方、Case5 (紫線) は接触面の法線応力低下に伴いすべりが促進されるため、すべりの発生頻度は高く、一回あたりのすべり量は Case3 (赤線) よりも小さくなつた。

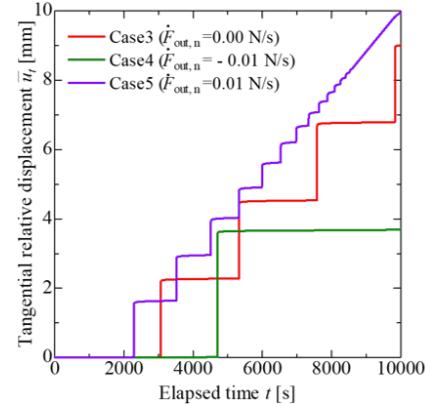
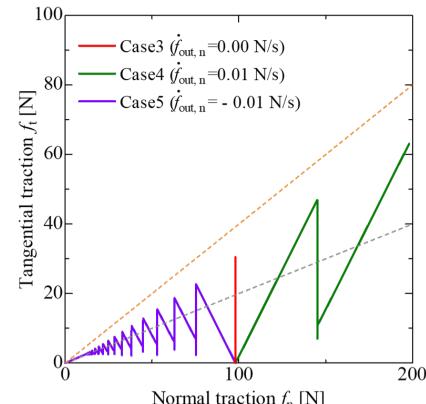
(a) \bar{u}_t-t 関係(b) f_t-f_n 関係

図-7: 解析結果 (Case3～5)

(2) 粗い斜面を下る物体に作用する摩擦力変化の評価

ここでは、図8のような粗い斜面を下る物体に作用する摩擦力変化を分析する。そして、(1)において摩擦力が動摩擦力より小さな値を取りながら、stick-slip 現象を生じた点と摩擦力とすべり速度(相対速度)の向きが反対にならない結果が表れていた点について議論する。本解析における接線方向の運動方程式は、次式で与えられる。

$$M\ddot{x}_t = mg \sin \theta - f_t S \quad (22)$$

ただし、ここでは、前項(1)とは異なり、運動方程式を微分をしていない計算の結果を示す。(紙幅の都合上、この違いが解析精度に及ぼす影響は割愛するが、本条件で十分な精度の結果が得られたことは確認している。) 斜面上に置かれた物体に初速度を与え、斜面の傾き $\tan \theta$ を動摩擦係数 μ_k より小さくすることで、物体が徐々に減速して停止する ($f_t = mg \sin \theta$) 過程を再現した。

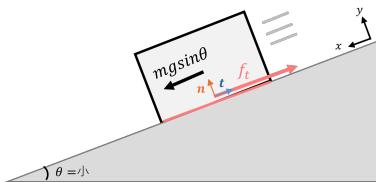


図-8: 粗い斜面を下る物体

a) 解析条件

初期条件に初速度 ($v_0 = 10\text{mm/s}$) を与えてすべり状態から解析を開始した。解析条件は、接触面の物性値は表-2と同様に設定し、発展則パラメータ、質点系パラメータ、初期条件は、表-3の通りに設定した。動摩擦より小さな摩擦力を取る理由を知ることが主たる目的であるため、摩擦係数は一定 ($\kappa, \xi = 0$) とした。

表-3: 各種パラメータと初期条件

質点系パラメータ	
質量 M (kg)	10
坂の傾き $\tan \theta$	0.15
接触面積 S (mm^2)	1
初期条件	
初期の構造の程度 $1/R_0^*$	1.0
初期垂直抗力 $f_{n0} = mg \cos \theta$ (N)	97.0
初期摩擦力 $f_{t0} = \mu_k f_{n0}$ (N)	19.4

b) 解析結果および考察

粗い斜面を減速しながら下降する質点に作用する摩擦力は、初期は動摩擦力に対応する力が作用し（すなわち、すべり上負荷面とすべり下負荷面が正規すべり面に一致し）、速度低下に伴って摩擦力が定常状態 ($f_t = mg \sin \theta$) に向かって滑らかに減少をする（すべり下負荷面が正規すべり面の内側に緩やかに移動）ことが予想される。それを踏まえ、動摩擦力から摩擦力への低下減少が見られた近傍の摩擦力 f_t -時間 t 関係を図-9に示す。この予想とは異なり、摩擦力は $t = 20.5$ (sec) 付近で急激に減少し、斜面に平行な力とつり合う定常状態まで負荷と除荷を繰り返して漸近している。この原因について次に述べる。

まず、本摩擦モデルの塑性乗数 Λ は、表-3、すべり上負荷面とすべり下負荷面が正規すべり面に一致している ($R = 1, R^* = 1$) ことに加え、 \mathbf{n} と $\bar{\mathbf{v}}$ が互いに直交することを踏まえると式(16)から次式となる。

$$\Lambda = -\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (23)$$

したがって、斜面を下る物体に作用する接線応力 f_t より計算される \mathbf{t} とすべり速度 $\bar{\mathbf{v}}$ は逆向きであるため、この塑性乗数は常に正（常に負荷状態）とわかる。よって、図-8の x - y 軸の基底ベクトルより

$$\{\mathbf{t}\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

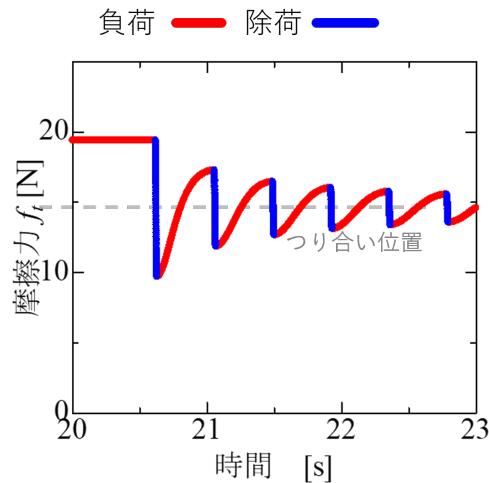


図-9: 解析結果

とすると、構成式は

$$\{\dot{\mathbf{f}}\} = \begin{Bmatrix} f_t \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_n \mu_k \\ 0 & -\alpha_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_t \\ \bar{v}_n \end{Bmatrix} \quad (25)$$

となる。物体が減速をする中では $\bar{v}_n = 0$ であるため、摩擦力は動摩擦力から変化しない ($\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$)。したがって、物体は速度が低下している中で、常に動摩擦力 ($f_t = mg \sin \theta$) を受け続け、物体の速度が負（斜面上向き）になる。一方、構成式積分より導かれる摩擦力の向きはすぐには変わらず、物体に作用する摩擦力と物体のすべり速度の向きが一致する。よって、負荷判定が「除荷」となり、弾性応答として摩擦力が動摩擦力より小さい値へ $t = 20.5$ (sec) 付近で急激に減少したのである。その後、ふたたびすべりの向きが斜面下向きになることで接触面は負荷状態（弾塑性挙動）に転じる。正規すべり面より内側で塑性すべりを許容する本モデルは、摩擦力が上昇する中で塑性すべりによるエネルギー消費を生じるため、斜面を下る物体の速度は除荷判定がなされる前のそれより小さくなつてゆく。このエネルギー減衰により、物体は静止状態へと近づく。

この摩擦力がすべり速度と同じ方向になる原因是、本解析で用いたペナルティ法による。ペナルティ法は接触面にバネを仮定して、物体同士の重なりを許容する代わりにその重なり具合に応じた反力を物体に作用させる解析手法である。

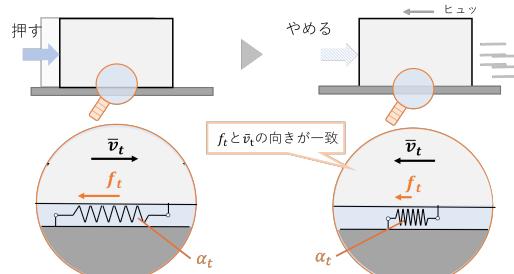


図-10: ペナルティ法の表現能力の限界

したがって、図-10のように、相対変位が生じている物体の荷重を取り除いたとき、すべりの向きは右向きから

左向きに切り替わる一方、その復元力（摩擦力）の向きは変わらず、摩擦力と相対速度の向きが一致することになる。以上のように、摩擦力がすべり速度と同じ方向になる挙動はペナルティ法を使用した本モデルの限界である。

(3) 強制変位を与えたことによる摩擦力への影響評価

最後に、水平面にある物体に周期的な強制変位を与えたときの摩擦力の変動を評価した。この解析においては、摩擦力の向きが変わる際に、正規すべり比が定義されない $f_t = 0$ 近傍の状態を取ることが懸念される。そこで、 $f_t = 0$ をまたぐ際の解析の安定性について議論する。

a) 解析条件

ここでは物体を強制的に単振動させ、接線方向の相対変位 $\bar{u}_t = A \sin \omega t$ を与え続けたときの摩擦力変化を解く。解析条件は、表 2 を基に実施した。その他の解析条件は表 4 に示す。ただし、初期条件はすべり状態を仮定している。

表-4: 各種パラメータと初期条件

発展則パラメータ	
構造喪失速度を規定する材料定数 κ	10
構造回復速度を規定する材料定数 ξ	0.002
質点系パラメータ	
振幅 A (mm)	1.0
各速度 ω (rad/s)	1.0
初期条件	
初期の構造の程度 $1/R_0^*$	1.0
初期垂直抗力 $f_{n0} = mg \cos \theta$ (N)	98.1
初期摩擦力 $f_{t0} = \mu_k f_{n0}$ (N)	19.62

b) 解析結果および考察

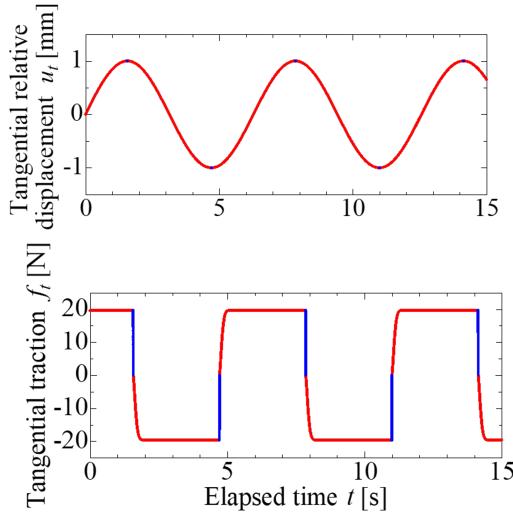


図-11: 解析結果の一例 ($\Delta t = 10^{-5}$)

時間刻み幅 $\Delta t = 10^{-5}$ (sec), step 每の繰り返し計算回数最大 1000 回の解析結果の例を相対変位 \bar{u}_t -時間 t 関係および f_t -時間 t 関係を図-11 に示す。ただし、ここ

では接線方向の単位ベクトル t を摩擦力からではなく常に左向きに取り、それと接触力の内積 $f_t = fS \cdot t$ を評価する点に注意されたい。良好な結果が得られたように見える。しかし、 $f_t = 0$ 近傍において、iteration が収束しないことが何度か発生した。収束しない原因は次の通りである。ちょうど f_t の符号反転を生じる step においてまず、負荷状態を仮定して次ステップを計算すると負荷判定および収束判定において、「除荷」と判断され、摩擦力も収束しない。その結果を用いて再度計算をすると、さきほど仮定していた負荷状態と全く同じ状態が計算される。つまり、負荷と除荷の 2 つの状態を行き来するだけで、繰り返し計算は一向に収束しない。この原因としては、 $f_t = 0$ では正規すべり比 R がほぼ 0 となるため、発展則における $U(R)$ がとても大きな値を取ってしまい計算の不安定化が起きたことなどが考えられる。今後は、初期値境界値問題へ適用することを見込んで、 f_n 軸近傍に純粋弾性域を導入するといった安定的に計算可能なモデルへの改良を検討する予定である。

4. おわりに

本稿では、摩擦力の連続的な変化を表現可能な時間依存性上下負荷面・弾塑性摩擦モデルを多様な初期値問題へ適用した。バネ～「質点」系を用いて、摩擦由来の動力学現象（安定すべり・stick-slip 現象）の再現能力および法線応力増減に伴うすべりの抑制・促進を再現可能であることを確認した。一方で、粗い斜面上を物体が下る計算を通じて、摩擦力と速度の向きが一致する理由、摩擦力が動摩擦力より小さな値を取る原因がペナルティ法であることを明らかにした。また、正規すべり比の値が定義されない $f_t = 0$ 近傍の値を取るときに、計算安定性に問題が生じるため、今後は、摩擦実験を通じたモデルの改良も予定している。なお当日の講演では、初期値境界値問題への本モデルの適用事例も併せて示し、非一様な接触面の固着/すべり状態の分布がすべり伝播を導く過程を示す。

謝辞: 本研究の実施にあたり、科学研究費補助金（基盤研究(B)：課題番号 22H01586）の助成を受けた。

参考文献

- [1] Ozaki, S. and Hashiguchi, K(2010) : Numerical analysis of stick-slip instability…, Tribology International, 43(11), 2120-2133.
- [2] Asaoka, A., Nakano, M and Noda, T(2000) : Super-loading yield surface concept for highly structured soil behavior, Soils and Foundations, 40(2), 99-110.
- [3] Toyoda, T., Yasuike, R. and Noda, T. (2024): Super/sub-loading surface model for constitutive equation of friction, Tribology International, 191, 109080.