

一般化ミウラ折りの剛体平坦折り畳みシミュレーション

Numerical Simulation of Rigid Flat-Folding Behavior of Generalized Miura-ori

田川浩之¹⁾

Hiroyuki Tagawa

1) Ph.D. 武庫川女子大学建築学科 教授 (〒663-8121 兵庫県西宮市戸崎町1-13, E-mail: tagawa@mukogawa-u.ac.jp)

The generalized Miura-ori is a pattern that consists of multiple 4-valent vertices and mountain-valley fold lines and enables a linked rigid flat-foldable behavior. In this study, numerical simulation of rigid flat-foldable behavior is conducted for the generalized Miura-ori, considering a rigid motion accompanied by large rotation and displacement. Enclosed and self-balanced roof shape with the arc-shaped Miura-ori is obtained by the numerical simulation of the rigid flat-foldable behavior. Finally, the eigenvalue, static and pseudo-static analyses are conducted for a deployable roof structure with the arc-shaped Miura-ori.

Key Words : Generalized Miura-ori, Rigid Flat-Folding, Large Rotation and Displacement

1. はじめに

一般化ミウラ折り[1,2]とは、複数の4価頂点と山・谷折りの折れ線から構成され、1自由度で連動した剛体平坦折り畳みが可能な折れ線パターンである。本稿では、大回転・大変位を伴う剛体運動を考慮した、一般化ミウラ折りの剛体平坦折り畳みシミュレーション手法について述べる。さらに、一般化ミウラ折りの連動条件を導き、その特異なパターンとして、円弧状、渦巻き状ミウラ折りについて述べる。ここまでは、幾何学的形状に対する数学的な検討であるが、最後に、建築のスケールで円弧状ミウラ折りの大屋根の構造解析を行い、物理的な検討を行う。

2. 1節点周りの剛体平坦折り畳みシミュレーション

まず基本形として、円盤の1節点まわりの剛体平坦折り畳みシミュレーションを行う。図-1に示すように、半径 r の円盤の O 点まわりの剛体平坦折り畳みを考える。折れ線を OA , OB , OC , OD の4本とする。

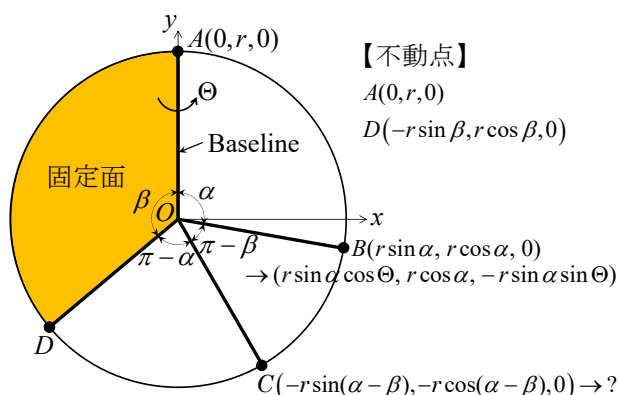


図-1 1つの節点と4つの折れ線からなる円盤

平坦折りを可能とする条件[3]より $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOD = \beta$ とすると, $\angle BOC = \pi - \beta$, $\angle COD = \pi - \alpha$ と

なる。平面 OAD を固定した状態で B 点を OA 軸まわりに角度 Θ だけ回転すると B 点の座標は $B(r \sin \alpha \cos \Theta, r \cos \alpha, -r \cos \alpha \sin \Theta)$ となる。 C 点が描く軌跡を算出する。剛体平坦折りの過程で、 OC 間、 CD 間、 BC 間の距離は一定である条件から、 C 点の座標を (x, y, z) として、3個の2次連立方程式(1)~(3)が得られる。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 & \dots (1) \\ (x + r \sin \alpha)^2 + (y - r \cos \alpha)^2 + z^2 = \left(2r \sin \frac{\pi - \alpha}{2}\right)^2 & \dots (2) \\ (x - r \sin \alpha \cos \Theta)^2 + (y - r \cos \alpha)^2 + (z + r \sin \alpha \sin \Theta)^2 = \left(2r \sin \frac{\pi - \beta}{2}\right)^2 & \dots (3) \end{cases}$$

これを解くと、 $\beta \neq \pi/2$, $\Theta \neq 0, \pi$ の時、 C 点の X 座標値 x は、式(4)~(6)の A , B , C を係数とする2次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ の解となる。ここで、2つの解に対応する山・谷の折れ線のパターンがある。 y, z の値は、式(7), (8)で得られる。1節点まわりの円盤の剛体平坦折り畳みシミュレーションの結果を図-2に示す。

$$A = 1 + \tan^2 \beta + \left(\frac{\cot \alpha \tan \beta + \cos \Theta}{\sin \Theta} \right)^2 \dots (4)$$

$$B = -2r \left(\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{(\cot \alpha \tan \beta + \cos \Theta)(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)}{\sin \alpha \cos \beta \sin^2 \Theta} \right) \dots (5)$$

$$C = r^2 \left(\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 + \left(\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin \alpha \cos \beta \sin \Theta} \right)^2 - 1 \right) \dots (6)$$

$$y = (\tan \beta)x - r \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \dots (7)$$

$$z = \left(\frac{\cot \alpha \tan \beta + \cos \Theta}{\sin \Theta} \right)x - r \left(\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin \alpha \cos \beta \sin \Theta} \right) \dots (8)$$

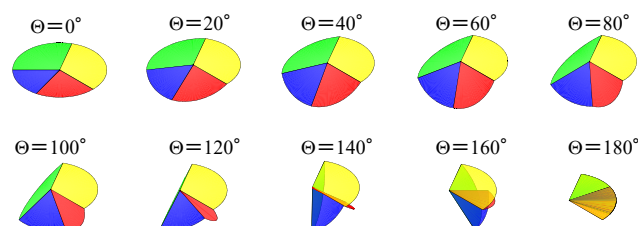


図-2 1節点まわりの剛体平坦折り畳みシミュレーション

3. 連動した剛体平坦折り畳みシミュレーション[4]

2 節点まわりの連動した剛体平坦折り畳みでは、2 個の節点まわりの円盤どうしの連動性を考慮する必要がある。図-3 で網掛けをした節点①まわりの F1,F2,F3,F4 から構成される 1 つ目のユニットと F2,F5,F6,F3 から構成される節点②まわりの 2 つ目のユニットが連動した平坦折り畳みを考える。

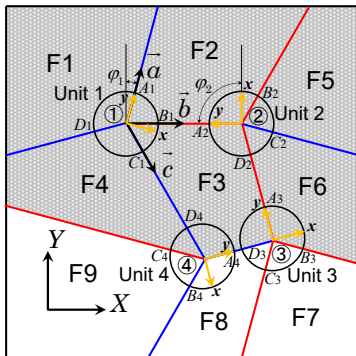


図-3 4つの節点と12本の折れ線からなる3x3パネル

1 つ目の円盤の全体座標系 X - Y に基づく軌跡 $(X_1, Y_1, Z_1)^T$ は、式(9)のように、局所座標系 x - y に基づく各点の軌跡 $(x_1, y_1, z_1)^T$ に初期状態で z 軸まわりの回転行列 $R_z(\varphi_1)$ を掛け、円盤の中心座標 $(X_{01}, Y_{01}, Z_{01})^T$ を加えることで得られる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = R_z(\varphi_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{pmatrix} \quad \cdots (9)$$

$$R_z(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots (10)$$

2 つ目の円盤については、まず回転角 θ_2 を求める。図-3 でユニット 1 と 2 で共有する平面である F2 と F3 の間の角度を求めるため、式(11)~(13)のように $\vec{a}, \vec{c}$ の $\vec{b}$ に直交する成分のベクトルを求めてそれらの間の角度を算出する。これにより、局所座標系での 2 つ目の円盤の軌跡 $(x_2, y_2, z_2)^T$ が算出できる。

$$\vec{p} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) / |\vec{b}|^2 \cdot \vec{b} \quad \cdots (11)$$

$$\vec{q} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{b}) / |\vec{b}|^2 \cdot \vec{b} \quad \cdots (12)$$

$$\theta_2 = \pi - \cos^{-1}(\vec{p} \cdot \vec{q} / |\vec{p}| |\vec{q}|) \quad \cdots (13)$$

式(14)により全体座標系での軌跡 $(X_2, Y_2, Z_2)^T$ に変換する。

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = R_{xyz} R_z(\varphi_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{02} \\ Y_{02} \\ Z_{02} \end{pmatrix} \quad \cdots (14)$$

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad \cdots (15)$$

ここで $(X_{02}, Y_{02}, Z_{02})^T$ は 2 つ目の円盤の中心座標であり、 R_{xyz} は 2 つ目の円盤の局所座標系での固定面(図-3 の平面 ①②③④)の向きを一つ目の円盤におけるこの平面向きに一致させる回転行列である。 R_{xyz} の各成分を式(15)とおくと $(1,0,0)^T$ は $(R_{11}, R_{21}, R_{31})^T$, $(0,1,0)^T$ は $(R_{12}, R_{22}, R_{32})^T$, $(0,0,1)^T$

は $(R_{13}, R_{23}, R_{33})^T$ に移る。初期状態で $(1,0,0)^T = s\vec{b} + t\vec{c}$, $\vec{b} = (a, b, 0)^T$, $\vec{c} = (c, d, 0)^T$ とすると s, t は式(9)で $e=1, f=0$ として求まる。折り畳みの過程では $(R_{11}, R_{21}, R_{31})^T = s\vec{b} + t\vec{c}$ より R_{11}, R_{21}, R_{31} の値が求まる。同様の手順で $(R_{12}, R_{22}, R_{32})^T$ の値を求められる。さらに $(0,0,1)^T \perp \vec{b} \text{ \& } \vec{c}$ であり、 $(R_{13}, R_{23}, R_{33})^T$ は $(0,0,1)^T$ の回転ベクトルなので単位ベクトルとなり、かつ $(R_{13}, R_{23}, R_{33})^T \perp (R_{11}, R_{21}, R_{31})^T \text{ \& } (R_{12}, R_{22}, R_{32})^T$ の条件より外積をとることで R_{13}, R_{23}, R_{33} の値を求められる。

図-3 の網掛け部分 (ユニット 1 と 2) の 2 節点まわりの連動した剛体平坦折り畳みシミュレーションの結果を図-4 に示す。単連結した場合は、各節点で各節点まわりの平坦折り畳み条件[3]を満たせば、剛体平坦折り畳みが可能となる。

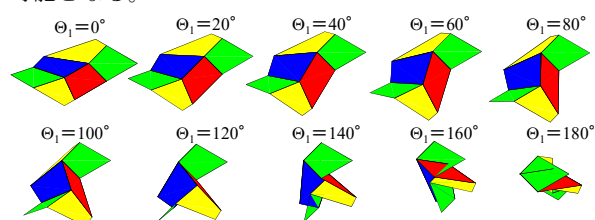


図-4 2節点まわりの連動した折り畳みシミュレーション

ユニットを直列上に連結し多節点が連動する平坦折り畳みに拡張する。ユニットの中心節点を結ぶリンクが閉じなければ各ユニットは連動して展開できる。図-3 に示すように、各節点まわりの平坦折り畳み可能な条件[3]を満たす以外は折れ線のパターンが不規則な 3×3 の四角形からなる折板で四つの節点①~④まわりで連動し折り畳まれる場合を図-5 に示す。1 つ目と 4 つ目のユニットで共有する平面 F4 の動きが一致していない。すなわち、図-3 のような不規則なパターンの折れ線をもつ 1 枚の紙を折り畳むと歪みが発生することを意味する。

一方、ミウラ折りもしくは Single-curvature (SC) ミウラ折りの場合、図-6 に示すように歪むことなく折り畳むことができる。

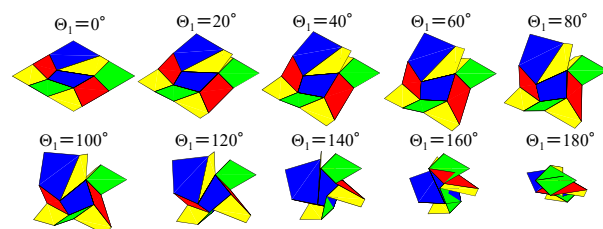


図-5 3x3パネルの折り畳みシミュレーション

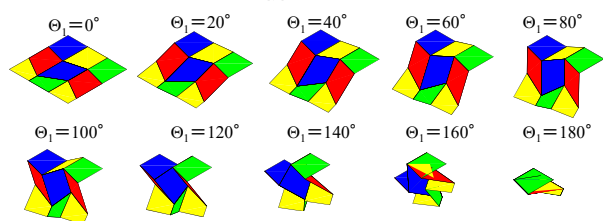


図-6 SCミウラ折りの折り畳みシミュレーション

渦巻き状ミウラ折りの展開図の例を図-11に示す。その剛体平坦折り畳みシミュレーションの結果を図-12に示す。

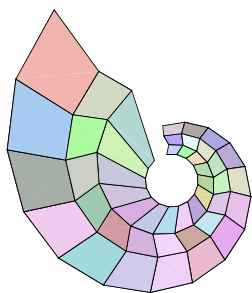


図-11 渦巻き状ミウラ折りの展開図

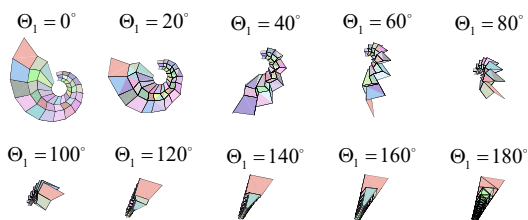


図-12 渦巻き状ミウラ折りの折り畳みシミュレーション

円弧状ミウラ折りは、渦巻き状ミウラ折りで、同じ段の左右の辺の長さを同じにする条件を与えることで得られる。すなわち、図-13において、四角形の角度 α_3 を式(24)で算出する。ここで、 ϕ は左右の辺の長さの比を表し、 $\phi=1.0$ の時、円弧状ミウラ折りとなる。円弧状ミウラ折りの展開図の例を図-14に示す。剛体平坦折り畳みシミュレーションの結果を図-15に示す。

$$\alpha_3 = \arccos \left(\frac{r \cos \alpha_1 (r \cos \alpha_1 + \phi r \cos \alpha_2 - d) + r \sin \alpha_1 (r \sin \alpha_1 - \phi r \sin \alpha_2)}{\sqrt{(d - r \cos \alpha_1 - \phi r \cos \alpha_2)^2 + (r \sin \alpha_1 - \phi r \sin \alpha_2)^2}} \right) \dots (24)$$

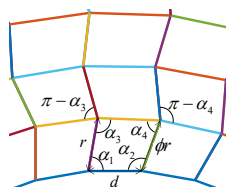


図-13 円弧状ミウラ折りの折れ線のパターン

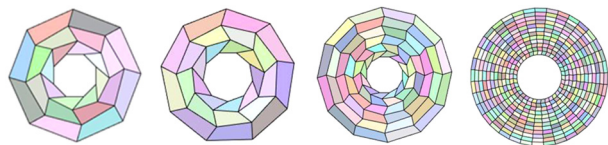


図-14 円弧状ミウラ折りの展開図

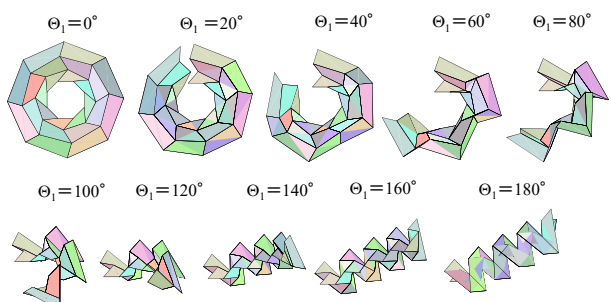


図-15 円弧状ミウラ折りの折り畳みシミュレーション

従来の直線状ミウラ折りの剛体平坦折り畳みシミュレーションの結果を図-16、円弧状ミウラ折りの場合を図-17に示す。ここで、直線状ミウラ折りでは、 $\alpha_1=50^\circ$, $\alpha_2=130^\circ$ ($\therefore \alpha_1+\alpha_2=180^\circ$)、円弧状ミウラ折りでは、 $\alpha_1=80^\circ$, $\alpha_2=110^\circ$ ($\therefore \alpha_1+\alpha_2=190^\circ$)としている。

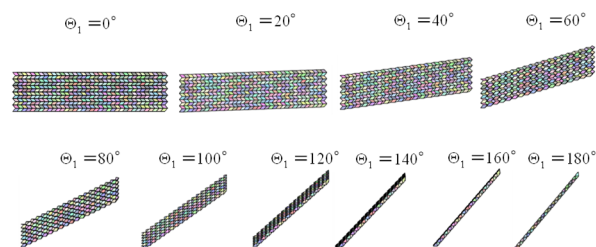


図-16 直線状ミウラ折りの折り畳みシミュレーション

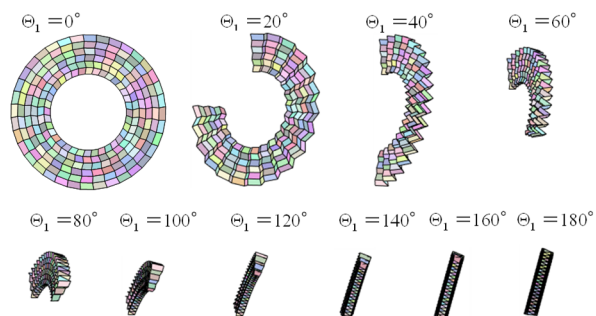


図-17 円弧状ミウラ折りの折り畳みシミュレーション

6. 円弧状ミウラ折りの勾配屋根の構造解析

本章では、固定した円弧状ミウラ折りの勾配屋根の構造解析について検討する。

(1) 閉じた円弧状ミウラ折りの幾何学形状生成

展開図の平面状態で4列分を重複させ、その初期状態から剛体平坦折り畳みシミュレーションを行い、勾配をもつ状態で360°閉じた形状を得る。折り畳みシミュレーションの結果を図-18に示す。展開角度 Θ_1 が20°と30°の間で丁度閉じた形状となるので、それらの角度の間で2分法による収束計算を行い、 Θ_1 が23.668°の時、閉じた形状となる。閉じた円弧状ミウラ折りの勾配屋根の、厚さの無視できる平紙で折った模型を図-19に示す。

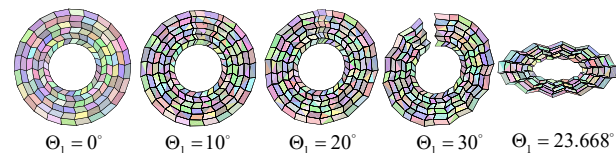


図-18 円弧状ミウラ折り（4列重複）の折り畳みシミュレーション

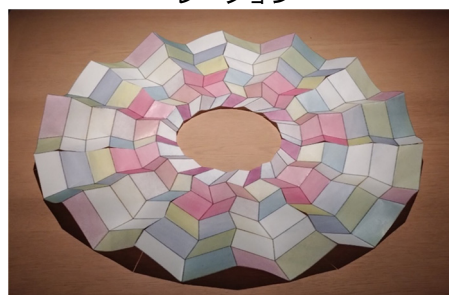


図-19 360°閉じた円弧状ミウラ折りの勾配屋根の模型

(2) 円弧状ミウラ折りの勾配屋根の構造解析

円弧状ミウラ折りは1自由度の展開構造なので、ある2つの節点間の距離を固定、もしくは、ある隣り合う平面どうしの角度を固定すれば、幾何学的形状は安定する。ところが、実際の構造物は、板には厚みがあり、自重などの荷重が作用するので、物理的な検討を行う必要がある。建築のスケールで円弧状ミウラ折りによる勾配屋根の構造的な検討を行う。固定した円弧状ミウラ折りの勾配屋根の固有値解析、自重解析を行う。解析には、汎用有限要素解析プログラムNX-Nastran, Ansys LS-DYNAを用いる。

a) 折れ線を剛接合でモデル化した場合

NX-Nastranによる構造解析モデルを図-20に示す。屋根板はプレート要素でモデル化する。屋根の外形は約50m、屋根板の厚さは0.15mである。屋根板は、ヒノキのCLT材を想定し、弾性剛性は $5.48 \times 10^6 (\text{kN/m}^2)$ 、ポアソン比は0.4とする。折れ線を剛接合でモデル化する場合、隣り合う折板どうしで折れ線で共有する節点は、1つの節点としてモデル化を行う。これらの共有節点で隣り合う折板の回転角が等しくなるため、折れ線を剛接合でモデル化することになる。Ansys LS-DYNAの解析モデルは、NX-Nastranの解析モデルを自動変換して得られ、プレート要素は、Belytschko-Tsay シェル要素に変換される。

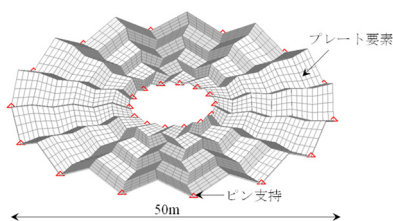


図-20 構造解析モデル

(固有値解析)

外側、内側の各14点をピン支持した場合の、NX-NastranとAnsys LS-DYNAによる固有値解析結果を、それぞれ図-21、図-22に示す。NX-NastranとAnsys LS-DYNAによる1次、2次のモード形状は似通っているが、NX-Nastranの方がAnsys LS-DYNAよりも固有周波数が若干大きい。

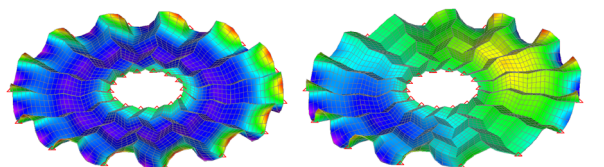


図-21 固有値解析結果（外、内側の各14点をピン支持）

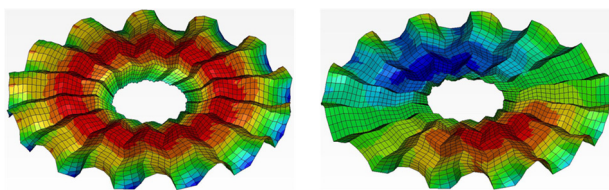


図-22 固有値解析結果（外、内側の各14点をピン支持）

外側の14点をピン支持した場合のNX-NastranとAnsys LS-DYNAによる固有値解析結果をそれぞれ図-23、図-24に示す。NX-NastranとAnsys LS-DYNAによる1次、2次モードの固有周波数は殆ど等しい。

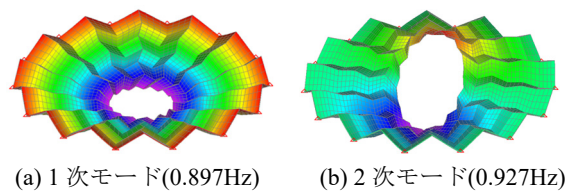


図-23 固有値解析結果（外側の14点のみピン支持）

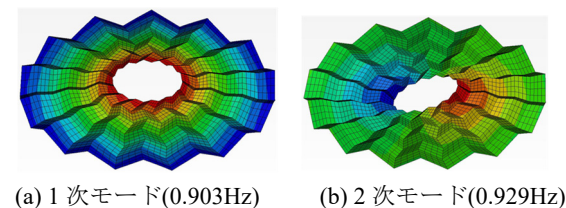


図-24 固有値解析結果（外側の14点のみピン支持）

(自重解析)

外側、内側の各14点をピン支持した場合の、NX-NastranとAnsys LS-DYNAによる自重解析結果をそれぞれ図-25、図-26に示す。NX-Nastranでは、鉛直変位の下向きの最大値は0.00436m、Mises相当応力の最大値は 1.50N/mm^2 である。一方、Ansys LS-DYNAでは、陰解法による準静的解析より、自重に対する釣合状態を求める。鉛直変位の下向きの最大値は0.00521m、Mises相当応力の最大値は 0.966N/mm^2 となった。最大の鉛直変位をもつ節点における鉛直変位の時刻歴を図-27に示す。NX-NastranとAnsys LS-DYNAで、鉛直変位、Mises相当応力に違いはあるが、オーダーとしては値に大きな隔たりはない。

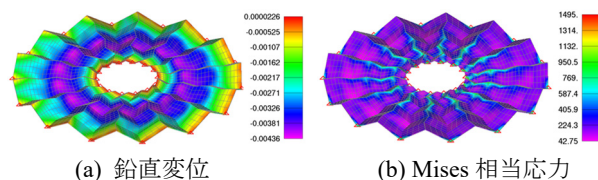


図-25 自重解析結果（外、内側の各14点をピン支持）

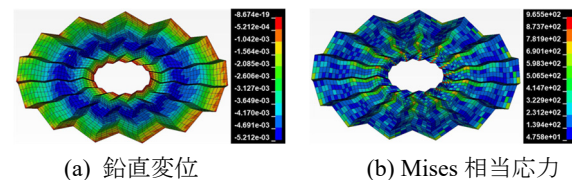


図-26 自重解析結果（外、内側の各14点をピン支持）

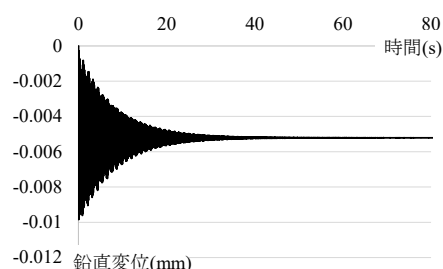


図-27 鉛直変位の時刻歴

外側の14点をピン支持した場合のNX-NastranとAnsys LS-DYNAによる自重解析結果を図-28、図-29に示す。NX-Nastranでは、鉛直変位の最大値は0.524m、Mises相当応力の最大値は21.4N/mm²となった。一方、Ansys LS-DYNAでは、鉛直変位の下向きの最大値は3.74m、Mises相当応力の最大値は17.7N/mm²となり、鉛直変位はNX-Nastranよりも7倍程度大きい。最大の鉛直変位をもつ節点における鉛直変位の時刻歴を図-30に示す。

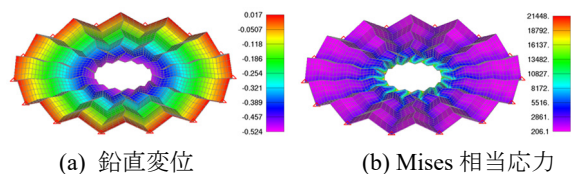


図-28 自重解析結果（外側の14点をピン支持）

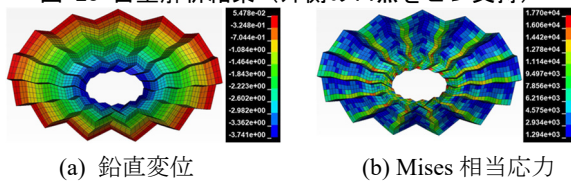


図-29 自重解析結果（外側の14点をピン支持）

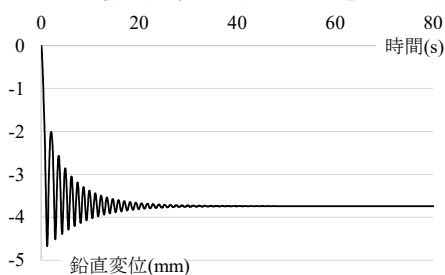


図-30 鉛直変位の時刻歴

次にAnsys LS-DYNAで、自重の0.01倍に対する準静的解析を行い、釣合状態を求めた。図-30に示すように、鉛直変位の最大値は0.00519mとなる。この値を1/0.01=100倍すると0.519mとなり、NX-Nastranの自重解析結果0.524mと同程度となる。

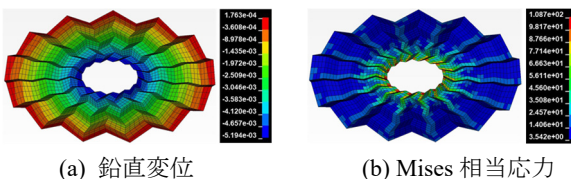


図-31 自重(x0.01)解析結果（外側の14点をピン支持）

b) 折れ線を1軸回転でモデル化した場合

折れ線まわりの1軸回転挙動のモデル化を図-32に示す。隣り合う平板の共有節点において、2つの節点を設定する。これらのx, y, z方向の並進変位を同一にして、折れ線の軸の向きに対する回転に対しては拘束せず、折れ線の軸に対して直交する2つの軸に対しては回転を拘束する、多点拘束条件の式(25)、式(26)を与えることで、折れ線まわりの1軸回転をモデル化する。

$$(\theta_{1x}\ell_1 + \theta_{1y}m_1 + \theta_{1z}n_1) - (\theta_{2x}\ell_1 + \theta_{2y}m_1 + \theta_{2z}n_1) = 0 \cdots (25)$$

$$(\theta_{1x}\ell_2 + \theta_{1y}m_2 + \theta_{1z}n_2) - (\theta_{2x}\ell_2 + \theta_{2y}m_2 + \theta_{2z}n_2) = 0 \cdots (26)$$

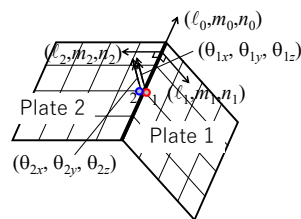


図-32 折れ線まわりの1軸回転のモデル化

外側、内側の各14点をピン支持した場合のNX-NastranとAnsys LS-DYNAによる固有値解析結果を図-33、図-34、NX-Nastranによる自重解析結果を図-35に示す。鉛直変位の最大値は0.0057m、Mises相当応力の最大値は1.598N/mm²と小さい。一方、Ansys LS-DYNAで、自重解析を行うと釣合状態が得られず解析不能となった。

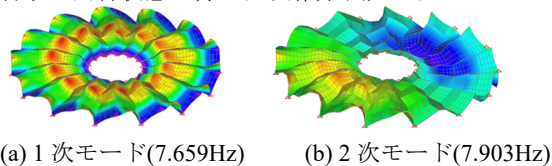


図-33 固有値解析結果（外、内側の各14点をピン支持）

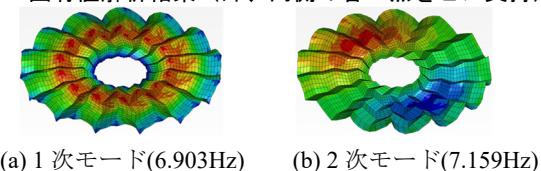


図-34 固有値解析結果（外、内側の各14点をピン支持）

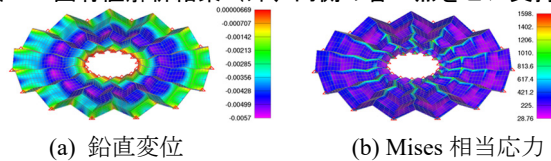


図-35 自重解析結果（外側12点、内側12点をピン支持）

7. おわりに

一般化ミウラ折りの剛体平坦折り畳みシミュレーション手法を開発し、円弧状、渦巻き状ミウラ折りの剛体平坦折り畳みシミュレーションを行った。建築スケールで、円弧状ミウラ折りの大屋根に対して構造解析を行った。

謝辞：本研究は、JSPS 科研費 23K04113, JST CREST JPMJCR1911の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] K. Miura: Method of packaging and deployment of large membranes in space, *Institute of space and astronautical science*, Report No. 618, 1985.
- [2] T. Tachi: Generalization of rigid foldable quadrilateral mesh origami, *Proceedings of the IASS symposium 2009*, Valencia, Spain, 2009.
- [3] 村田三良, The theory of paper structure (折紙についての考察)(2), *Bulletin of Oita prefectural Junior College of Art* 5, 29-37, 1966.
- [4] H. Tagawa, N. Yoshioka, T. Suzuki: Proposal of arc- and spiral-shaped Miura-ori and its application to the design of large roof architecture, *Proceedings of the IASS symposium 2022*, Beijing, China, 2022