

# 微圧縮大変形解析における 次世代平滑化有限要素法 (EC-SSE-SRI-T4) の性能評価

Performance Evaluation of the Next-gen Smoothed Finite Element Method,  
EC-SSE-SRI-T4, in Nearly Incompressible Large Deformation Analyses

大西有希<sup>1)</sup>  
Yuki Onishi

<sup>1)</sup>博(工)東京工業大学工学院助教(〒152-8550 東京都目黒区大岡山2-12-1, E-mail: yonishi@a.sc.e.titech.ac.jp)

A new finite element formulation based on the edge center-based strain smoothing element using 4-node tetrahedral mesh with selective reduced integration (EC-SSE-SRI-T4) is presented, and its performance in large deformation analysis of nearly incompressible solids is evaluated. EC-SSE-SRI-T4 combines the next-gen S-FEM (EC-SSE) and the classical node-based S-FEM (NS-FEM) to achieve a locking-free T4 formulation with accurate deviatoric strain/stress distributions. The demonstrative analyses showed that EC-SSE-SRI-T4 can suppress pressure checkerboarding to a level sufficient for practical use in the cases of 0.49 Poisson's ratio.

**Key Words :** Smoothed finite element method, Tetrahedral mesh, Volumetric locking, Pressure checkerboarding.

## 1. はじめに

平滑化有限要素法 (Smoothed Finite Element Method: S-FEM)[1] は、近年様々な分野で研究と実用化[2]が進んでいる。今日までに種々の S-FEM 定式化が開発されているが、とりわけ四面体メッシュを用いる手法が産業上重要であるとして注目されている。固体解析において、4 節点四面体メッシュを用いる標準的な有限要素法 (FEM-T4) は別名「ひずみ一定要素」とも呼ばれ、せん断・体積ロッキングを起こす低精度な要素として知られている。また、10 節点四面体メッシュを用いる標準的な 2 次要素 (FEM-T10) は、節点反力振動を起こすこと、体積ロッキングを起こすこと、細かな形状の再現時にメッシュ数が急増すること (△中間節点で辺を折り曲げてはいけないこと) など欠点が多い。これら標準的な四面体要素の課題を克服する定式化として、四面体メッシュを用いる S-FEM の研究が現在も活発に続けられている。

古典的な S-FEM として最も成功している定式化に 4 節点四面体の Edge-based S-FEM (ES-FEM-T4) がある。ES-FEM-T4 は複雑形状に適した T4 メッシュを用いながらも FEM-T10 と同等の (ほぼ 2 次の) メッシュ収束速度を持つ上、せん断ロッキングや節点反力振動も起こさない。しかしながら、微圧縮材料の解析における体積ロッキングを抑えることは出来ず、ゴム材料等の解析では精度が出ない欠点がある。この欠点を克服すべく、これまでに種々の定式化[3-7]が提案されてきたが、精度・大変形ロバスト性・計算速度の 3 点をバランス良く共生させる定式化は未だ開発されていない。

2018 年、Lee らは ES-FEM-T4 にさらにもう一段階のひずみ平滑を施す「ひずみ平滑要素 (Strain Smoothing Element: SSE)」[8] を提案した。SSE-T4 は ES-FEM-

T4 よりも計算量は増加するが、同一メッシュの弾性解析において ES-FEM-T4 を上回るメッシュ収束速度と滑らかなひずみ分布を実現している。さらに 2022 年、

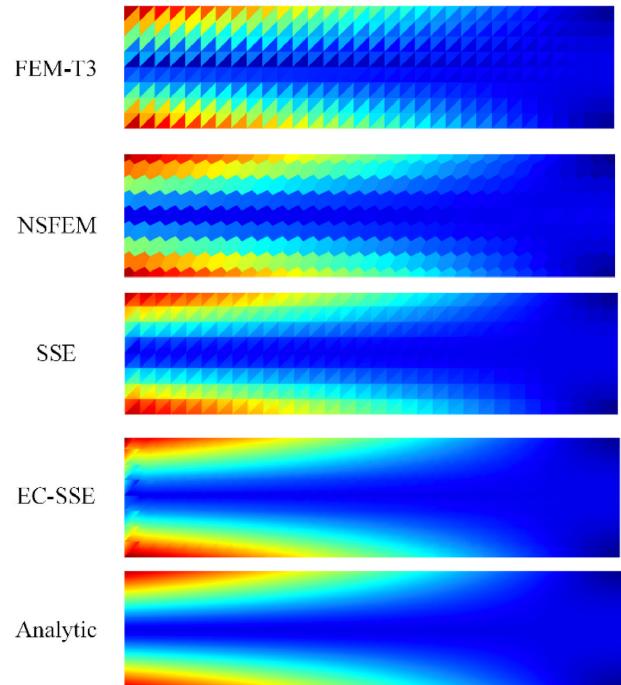


図-1 2 次元片持ち梁の微小変形曲げにおける Mises 応力分布の同一メッシュでの解析結果比較 (文献 [9] より抜粋引用)。次世代平滑化有限要素法である EC-SSE は解析解 (Analytic) と見まごう程の高精度な応力分布を与えている。

Jinsong らは SSE-T4 とは異なる手順で ES-FEM-T4 にもう一段階のひずみ平滑を施す Edge Center-based SSE (EC-SSE)[9] を提案した。EC-SSE-T4 は SSE-T4 よりもさらに計算量は増加するが、SSE-T4 よりも高精度なひずみ・応力分布が得られる利点がある。微小変形の2次元片持ち梁の曲げにおける Mises 応力分布の解析結果を比較した画像を図1（文献[9]より抜粋引用）に示す。同一メッシュを用いた解析であるが、EC-SSE は解析解（Analytic）と見まごう程の高精度な応力分布を与えていることが分かる。S-FEM が「次世代有限要素法」と呼ばれ始めて十数年が経過したが、この EC-SSE は一時代を画す革新的な手法であり、「次世代平滑化有限要素法」あるいは“S-FEM 2.0”と呼ぶに値すると著者は考える。

本研究では EC-SSE-T4 と古典的な4節点四面体 Node-based S-FEM (NS-FEM-T4) を選択的低減積分 (SRI) で組み合わせることにより、EC-SSE-T4 を微圧縮材料に拡張する新たな定式化“EC-SSE-SRI-T4”を提案し、その性能を評価する。EC-SSE-SRI-T4 は微圧縮材料の解析で問題となる体積ロッキングおよび圧力チェックカーボーディングを SRI により回避・低減させると同時に、高精度な偏差ひずみ・応力分布を EC-SSE により獲得できる。幾つかの解析例を示し、EC-SSE-SRI-T4 がボアソン比 0.49 程度の微圧縮材料の解析において実用的に概ね十分と考えられる精度・大変形ロバスト性・計算速度を有していることを確認する。

## 2. 手法

提案手法である EC-SSE-SRI-T4 は、一言でいうと、既存手法である Selective ES/NS-FEM-T4[3] の ES-FEM-T4 担当部分を EC-SSE-T4 に置き換えた手法である。

簡単のため、本稿では3節点三角形 (T3) メッシュを使用した2次元の定式化である EC-SSE-SRI-T3 を中心に解説する。EC-SSE-SRI の計算手順概要を図2に予め示しておく。ES-FEM, SSE および EC-SSE の定式化の詳細はそれぞれ文献[1, 8, 9]を参照されたい。

なお、SSE の E は Element の略記であるため本稿では「ひずみ平滑『要素』」と訳しているが、独立した有限要素ではないことに注意されたい。提案手法を含め、SSE は要素をまたぐ平滑化を行うため、標準的な

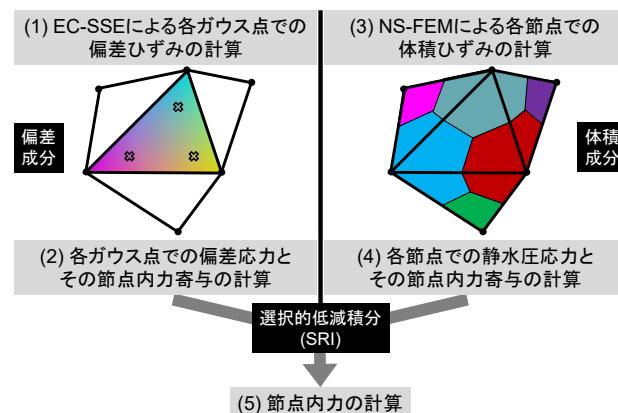


図-2 EC-SSE-SRI の計算手順概要。EC-SSE と NS-FEM を SRI で組み合わせている。

FEM コードの要素として実装することは困難である。また、標準的な FEM の要素の概念との混同を避けるため、本稿では三角形/四面体メッシュの各三角形/四面体を「セル」と称する。

### (1) EC-SSE による偏差成分の計算

提案手法では偏差ひずみ成分の計算に EC-SSE を使用する。2次元の EC-SSE-T3 による偏差ひずみ分布の計算の流れを図3に示す。

まず、各セルで標準的な T3 要素としての [B]（いわゆる、B-マトリックス）を計算した後、それらをエッジにおいて平滑化（面積重み付き平均化）し、各エッジの [B] を計算する。この時、各エッジの [B] はそのエッジの中心点での量であると考える。すると、各セル内の任意の位置における [B] は、3エッジ中心の [B] の線形内挿/外挿により与えられる。そこで、各セル内に配置した3つのガウス点（図3内「×」印）における [B] を線形内挿/外挿により計算する。この3ガウス点における [B] を用いて偏差ひずみを計算し、その後は標準的な FEM と同様の手順で偏差応力とその節点内力寄与の計算を行う。

2次元の ES-FEM-T3 ではひずみ・応力分布がセル毎に区分線形となるのに加え、要素境界のエッジの中心点において必ずひずみ・応力が連続となる。従って、提案手法では粗いメッシュでも高精度かつ滑らかな偏差ひずみ・応力分布が得られ、T4 メッシュでも2次要素と同等以上に速いメッシュ収束速度が期待できる。ただし、各エッジの中心点以外の位置では一般に偏差ひずみ・応力は不連続であることに注意されたい。

なお、3次元の EC-SSE-T4 では各エッジの [B] を計算した後、各フェイスでの [B] を3エッジの体積重み付き平均で計算する。各フェイスでの [B] をそのフェイスの中心点での量であると考え、4フェイス中心の [B] の線形内挿/外挿により各セル内の4ガウス点における [B] を計算する。3次元の提案手法では偏差ひずみ・応力分布がセル毎に区分線形となり、フェイスの中心点において必ず偏差ひずみ・応力が連続となる。

### (2) NS-FEM による体積成分の計算

提案手法では体積ひずみ成分の計算に NS-FEM を使用する。NS-FEM は各節点の周辺セルの [B] を平滑化し、節点の [B] を用いる手法である。各節点の [B] から体積ひずみを計算し、その後は標準的な FEM と同様の手順で体積（静水圧）応力とその節点内力寄与の計算を行う。詳細は文献[1]に譲る。

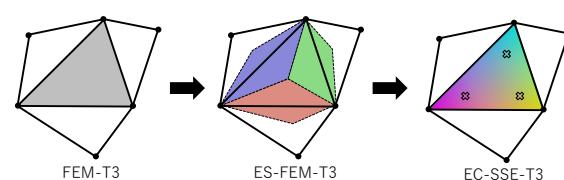


図-3 EC-SSE-T3 の偏差ひずみ計算の流れ。FEM-T3 および ES-FEM-T3 を経由し、セル内線形かつエッジ中心で連続なひずみ分布を実現している。

### (3) SRI による偏差/体積応力成分の合算

提案手法では SRI に基づいて偏差応力成分の節点内力と体積（静水圧）応力成分の節点内力を合算する。計算手順は一般的な SRI と同じであるため、本稿では記載を省略する。

### (4) 定式化の特徴

EC-SSE-SRI-T4 の定式化における主な特徴は次の通りである。

#### a) せん断/体積ロッキングを回避できる。

T4 メッシュでロッキングフリーを実現している。

#### b) 圧力チェックカーボーディングを抑制できる。

NS-FEM の採用により、圧力分布の数値振動の抑制効果が期待できる。

#### c) 厳しい大変形に対応できる。

大変形ロバスト性を低下させる高次の内挿関数を使用していない。

#### d) 偏差ひずみ・応力の精度が高くメッシュ収束が速い。

EC-SSE の採用により、粗いメッシュでも高精度な偏差ひずみ・応力分布が得られる。

#### e) 自由度が一切増加しない。

純粋な変位型有限要素法であり、自由度追加が無く、陽解法にも拡張できる。コード開発も容易である。

#### f) 標準的な T4 要素より計算コストが高い。

セルをまたぐひずみ平滑化を行っているため、標準的な T4 要素 (FEM-T4) より剛性マトリックスのバンド幅が広く、計算コストが高い。同一メッシュでの計算コストは FEM-T4 の約 6.7 倍となる。

#### g) 標準的な FEM コードの要素として実装できない。

セルをまたぐひずみ平滑化を行っているため、一般的な FEM コードの T4 要素として実装できない。

## 3. 結果と考察

EC-SSE-SRI-T4 を用いた微圧縮大変形解析例を 4 例紹介する。全例題において非構造格子の 4 節点四面体メッシュを使用する。

### (1) 片持ち梁の曲げ解析

10 m × 1 m × 1 m の片持ち梁の先端角の 1 点に死荷重を加えた曲げ（大たわみ）解析を行う。材料は初期ヤング率が約 6 GPa・初期ポアソン比が 0.49 の微圧縮性 Neo-Hooke 超弾性体とする。

荷重が 20 MN に達した時点（参照解の先端たわみは約 6.5 m）での Mises 応力および圧力の分布を図 4 に示す。標準的な 4 節点四面体要素 (FEM-T4) を用いた解析結果は、せん断/体積ロッキングによりたわみが足りないだけでなく、深刻な圧力チェックカーボーディングが生じている。Mises 応力は比較的見るに耐える分布ではあるが、区分一定（各要素内で一定）の分布となることからメッシュ収束精度は極めて遅い。他方、EC-SSE-SRI-T4 を用いた解析結果は、せん断/体積ロッキングを起こしておらず、Mises 応力は妥当かつ区分線形の滑らかな分布を示している。唯一、圧力チェックカーボーディングをゼロに抑え切れていないが、その振動幅は相当程度小さ

く抑えられている。なお、EC-SSE-SRI-T4 の Mises 応力分布は偏差応力の評価点（各セルの 4 ガウス点）での応力 6 成分を各セルの 4 頂点で補外してから Mises 応力値に変換したものを用い、各セル内にて線形分布で表示している。また、EC-SSE-SRI-T4 の圧力分布は静水圧応力の評価点（節点）での圧力値をそのまま用い、セル内にて線形分布で表示している。

後述の例題でも同様であるが、EC-SSE-SRI-T4 における圧力チェックカーボーディングの程度は SelectiveES/NS-FEM-T4[4] よりも明らかに抑制・改善されている。体積成分の計算には両者とも NS-FEM-T4 を同様に使用しているにも関わらず、この様な違いが生じた原因は現在調査中である。ひずみ・応力の内挿次数が ES-FEM-T4（区分一定）より EC-SSE-T4（区分線形）の方が 1 つ上であるため、体積成分の内挿次数が相対的に 1 つ下がって SRI による次数低減効果がより強く現れた可能性が一因として考えられる。

### (2) ブロックの圧力押込解析

1 m × 1 m × 1 m の立方体ブロックの上面に圧力を加えて押し込む解析を行う。ブロック上面には面内変位ゼロの拘束を与え、上面の 1/4 にのみ圧力を与える。材料は初期ヤング率が約 240 MPa・初期ポアソン比が 0.49 の微圧縮性 Arruda-Boyce 超弾性体とする。

圧力が約 1.65 GPa に達した時点での Mises 応力および圧力の分布を図 5 に示す。上述の大たわみ解析と同様、EC-SSE-SRI-T4 の解析結果は大ひずみ解析においてもロッキングフリーで滑らかな Mises 応力分布を示し、圧力チェックカーボーディングも相当程度小さく抑えられている。なお、押込圧力をこれ以上大きくすると解析が収束困難に陥った。図 5 において最も押し潰されているブロック隅部分の高さは約 0.04 m であり、約 1/25 にまで圧縮されている。よって、EC-SSE-SRI-T4 は大変形ロバスト性も十分に備えていると言える。

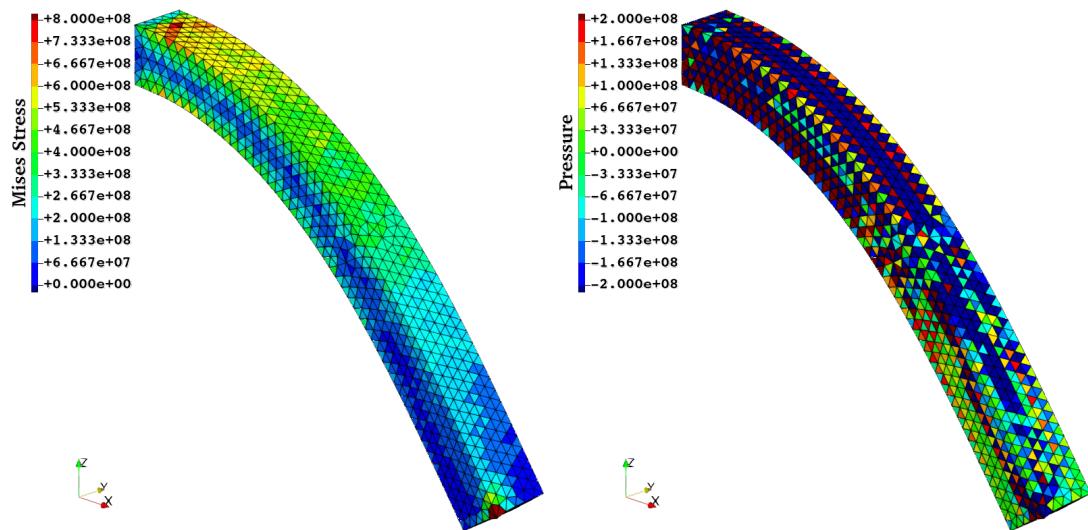
### (3) 円柱の変位押込解析

直径 2 m、高さ 2 m の円柱の 1/8 モデルに対して押込解析を行う。3 つの対称面には面对称境界条件を与え、上面には面内変位をゼロに拘束のうえ圧縮方向に一様な圧縮強制変位を与える。材料は初期ヤング率が約 5.96 GPa・初期ポアソン比が 0.49 の微圧縮性 Neo-Hooke 超弾性体とする。

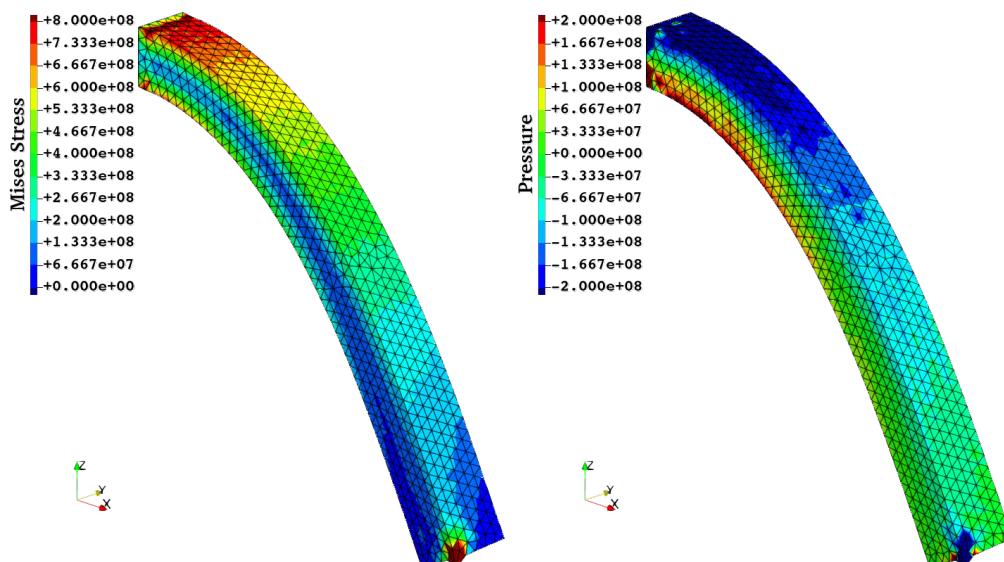
公称圧縮が 37 % に達した時点での Mises 応力および圧力の分布を図 6 に示す。応力特異性をもつ上部縁周辺を除き、EC-SSE-SRI-T4 は十分に滑らかな Mises 応力分布を与えている。圧力分布は主に上面において若干のチェックカーボーディングが見られるものの、実用上許容範囲と考えられるレベルに抑えられている。なお、押込変位をこれ以上大きくすると解析が収束困難に陥ったが、他の手法と比較して EC-SSE-SRI-T4 の大変形ロバスト性は良好であると言える。

### (4) フィラー充填ゴムの引張解析

0.5 m × 0.5 m × 0.5 m の立方体ゴムの角に直径 0.6 m の 1/8 球形の鉄フィラーが埋め込まれた物体の引張解析



(a) FEM-T4



(b) EC-SSE-SRI-T4

図-4 FEM-T4 および EC-SSE-SRI-T4 による片持ち梁曲げ解析の最終状態における Mises 応力および圧力分布.

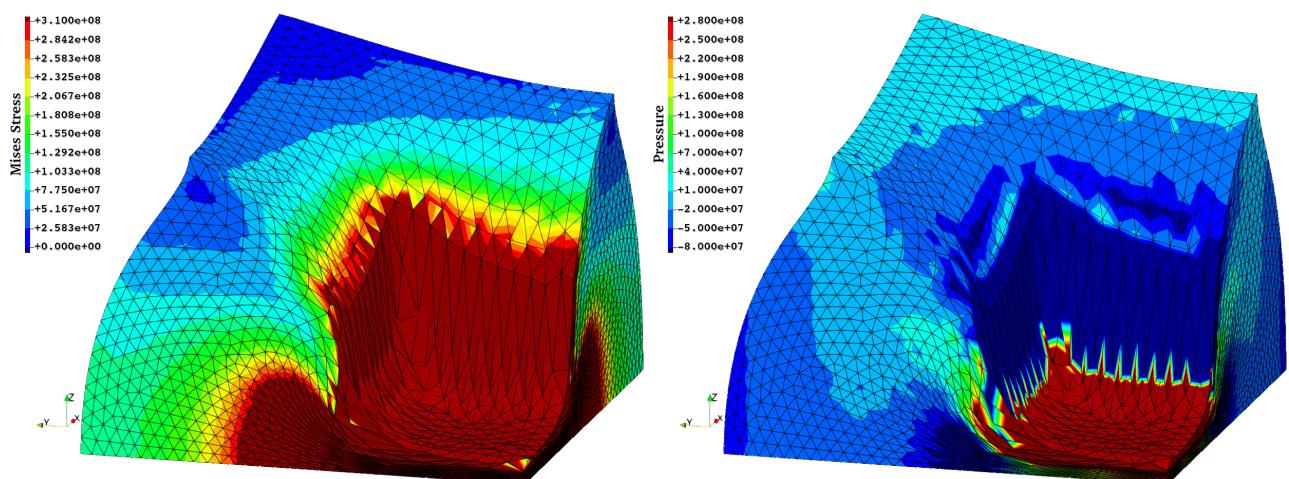


図-5 EC-SSE-SRI-T4 によるブロック圧力押込解析の最終状態における Mises 応力および圧力分布.

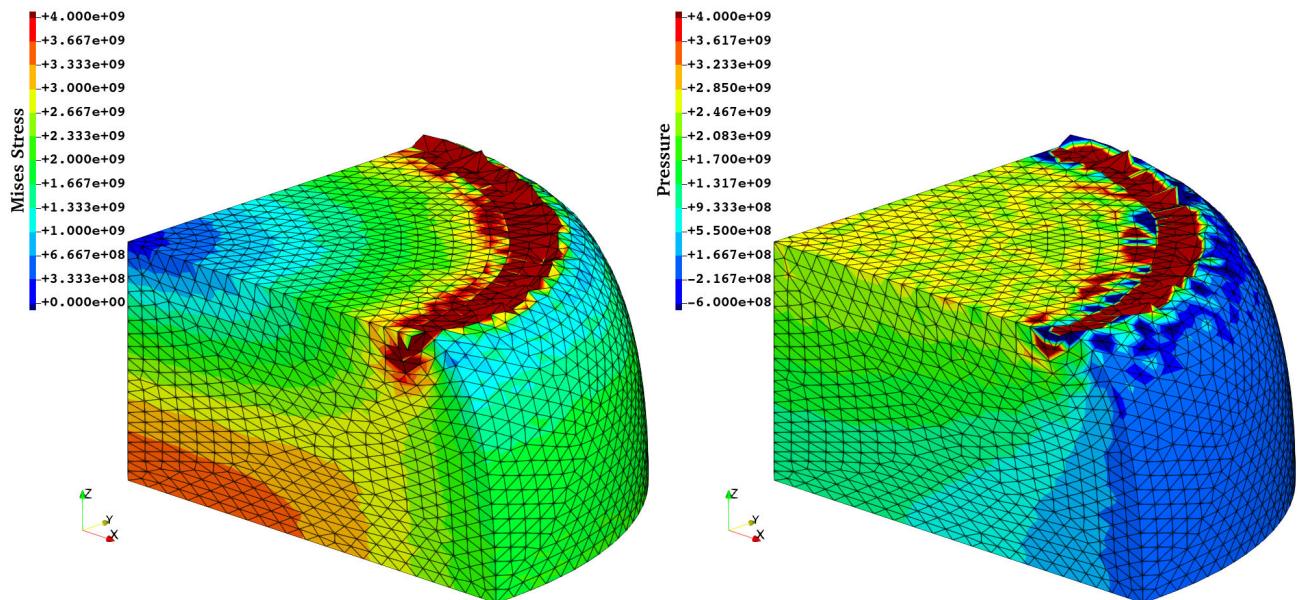


図-6 EC-SSE-SRI-T4 による円柱変位押込解析の最終状態における Mises 応力および圧力分布.

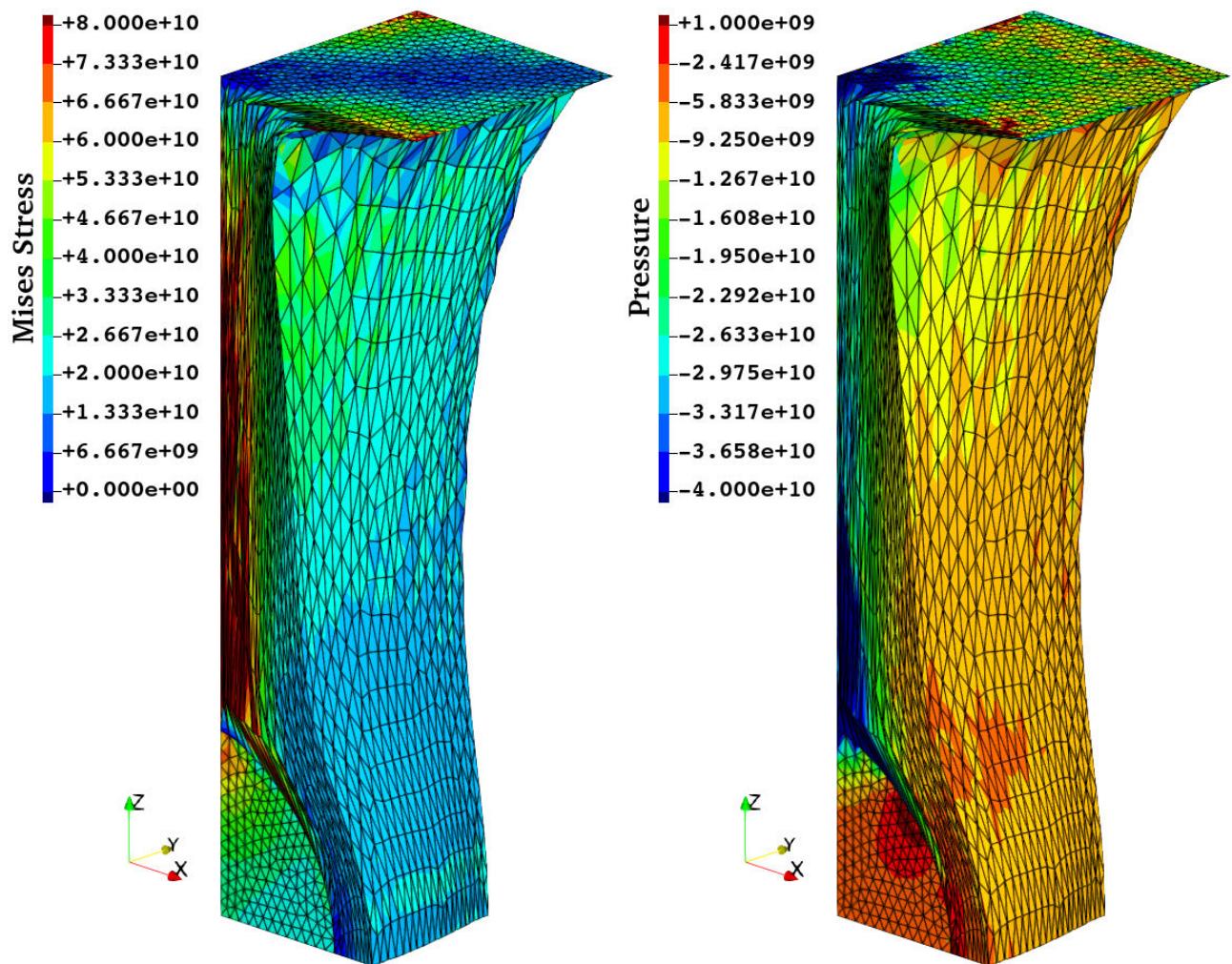


図-7 EC-SSE-SRI-T4 によるフィラー充填ゴム引張解析の最終状態における Mises 応力および圧力分布.

を行う。3つの対称面には面对称境界条件を与え、上面には面内変位ゼロの拘束と引張方向の強制変位を与える。ゴム材料は初期ヤング率が約6 GPa・初期ポアソン比が0.49の柔らかい微圧縮性Neo-Hook超弾性体とし、鉄材料は初期ヤング率が約260 GPa・初期ポアソン比が0.3の硬い圧縮性Neo-Hook超弾性体とする。

公称引張が221%に達した時点でのMises応力および圧力の分布を図7に示す。EC-SSE-SRI-T4は十分に滑らかなMises応力分布を与えており、圧力分布は、圧縮性である鉄部では十分に滑らかである一方、微圧縮性であるゴム部では主に上面で若干のチェックカーボーディングが見られる。なお、引張変位をこれ以上大きくすると解析が収束困難に陥ったが、大変形ロバスト性は実用上十分に確保されていると言える。

#### 4. おわりに

EC-SSE-T4とNS-FEM-T4をSRIで組み合わせて微圧縮大変形に対応させた新しい4節点四面体平滑化有限要素法(EC-SSE-SRI-T4)を提案し、その性能を評価した。静解析においてEC-SSE-SRI-T4は標準的な4節点四面体要素(FEM-T4)の7倍弱の計算時間を要する代わり、FEM-T4の持つ致命的な問題点(せん断/体積ロック、圧力チェックカーボーディング、低メッシュ収束速度)を解決することができる。解析例に示した通り、典型的な微圧縮大変形問題においてEC-SSE-SRI-T4は十分実用的な大変形ロバスト性を備えていることが示された。EC-SSE-SRI-T4の唯一の精度的な欠点は圧力チェックカーボーディングを完全には抑え切れていない点であり、計算時間をこれ以上増やさずにこの欠点を改善することが今後の課題である。

#### 参考文献

- [1] G. R. Liu and T. Nguyen-Thoi, *Smoothed Finite Element Methods*, Boca Raton, FL, USA: CRC Press (2010).
- [2] Y. Onishi, "EDESFEM Official Website," <https://edes.fem.jp/> (2023).
- [3] Y. Onishi and K. Amaya, "A locking-free selective smoothed finite element method using tetrahedral and triangular elements with adaptive mesh rezoning for large deformation problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 99, No. 5, pp. 354–371 (2014).
- [4] Y. Onishi and K. Amaya, "Performance Evaluation of the Selective Smoothed Finite Element Methods using Tetrahedral Elements with Deviatoric/Hydrostatic Split in Large Deformation Analysis," *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 63, pp. 55–65 (2015).
- [5] Y. Onishi, R. Iida, and K. Amaya, "F-bar aided edge-based smoothed finite element method using tetrahedral elements for finite deformation analysis of nearly incompressible solids," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 109, No. 11, pp. 1582–1606 (2017).
- [6] Y. Onishi, "Concept of Cell-Based Smoothed Finite Element Method Using 10-Node Tetrahedral Elements (CS-FEM-T10) for Large Deformation Problems of Nearly Incompressible Solids," *International Journal of Computational Methods*, Vol. 17, No. 2, pp. 1845009:1–19 (2020).
- [7] Y. Onishi, "Selective Cell-based Smoothed Finite Element Method using 10-node Tetrahedral Element with Radial Element Subdivision," *International Journal of Computational Methods*, pp. 2141015:1–29 (2021).
- [8] C. Lee and P.-S. Lee, "A new strain smoothing method for triangular and tetrahedral finite elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 341, pp. 939–955 (2018).
- [9] T. Jinsong, C. Guangsong, and G. Yao, "An edge center-based strain-smoothing triangular and tetrahedral element for analysis of elasticity," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 95, p. 104606 (2022).