計算工学講演会論文集 Vol. 29 (2024 年 6 月)　日本計算工学会

混合型時間積分を用いた圧力安定化１次要素による動的大変形解析

Large Deformation Analysis by Pressure Stabilized Linear Element with Mixed Time Integrator

山田貴博 [1)]
Takahiro Yamada

1)学博 横浜国立大学大学院環境情報研究院　教授（〒 240-8501 横浜市保土ケ谷区常盤台 79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp)

The author proposed a splitting time integrator for nearly incompressible elasticity, incorporating an implicit solver for volumetric deformation propagation and an explicit solver for isochoric deformation. In this study, the proposed method is applied to large deformation problems in nearly incompressible hyperelasticity. For spatial discretization, the robust pressure-stabilized linear tetrahedral element is adopted. Furthermore, an efficient algorithm derived from the linearization of the volumetric component is presented.

Key Words : *Large Deformation, Mixed Time Integrator, Pressure Stabilied Element, Nearly Incompressible Hyperelasticity*

1.　序

ゴム等の高分子材料や生体軟組織のような微圧縮超弾性体の動的大変形解析に対するロバストな数値計算手法が求められている．衝撃問題や塑性加工の分野では，ロバストな手法として非線形反復計算を必要としない動的陽解法が多く用いられている．そこで，本研究では，大変形時の要素ゆがみに強い圧力安定化１次要素 [1] に陽解法を適用した有限要素解析手法を検討する．

固体の過渡応答解析における陽解法は条件付き安定な手法であり，一般に時間刻みが弾性波動の伝播速度で決定されるクーラン数に支配される．微圧縮性材料においては，体積変形に対する波動伝播速度すなわち P 波速度は等容変形に対する S 波速度より大きくなることから，P 波速度に依存する時間刻みが設定されることとなる．一方，評価すべき主な現象は等容変形として表されることから，過度に小さい時間刻みを用いなければならないこととなる．このような数値計算上の課題に対して，筆者は体積変形に対しては陰解法，等容変形に対しては陽解法として機能する分離型時間積分 [2] を提案した．この手法は，拘束条件付きハミルトン力学系に提案された Rattle 法 [3] を拡張した手法であり，時間刻みは等容変形の波動伝播速度で決定され，等容変形に対する材料非線形性も陽的な取り扱いが可能なものである．一方，これまでの分離型時間積分 [2] は線形問題を対象に定式化されており，自由度の少ない圧力場に対する連立一次方程式を導出することで体積変形に対する陰的な取り扱いを効率化するアルゴリズムを線形性の仮定の上で構築している．したがって，変位に対しては非線形である変形前後の体積比と圧力の関係を表す材料構成則が用いられる微圧縮超弾性体にこれまでの分離型時間積分を直接適用することはできない．そこで，本研究では，体積変形に対する材料構成則に新たな近似とアルゴリズムを分離型時間積分に導入した微圧縮超弾性体の動的大変形問題に対する有限要素解析手法を提案する．

2.　支配方程式

本研究では，均質な微圧縮性超弾性体の動的問題を考える．初期配置の領域を Ω，座標を $\boldsymbol{X}$ で表すと，初期配置における物質点 $\boldsymbol{X}$ の時刻 t における現配置の位置 $\boldsymbol{y}$ を表す変形写像 $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{X}, t)$ にに対して，変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{1}$$

と表される．この変形勾配テンソルを体積変形を表す変形前後の体積比 $J = \det \boldsymbol{F}$ と等容変形成分 $\tilde{\boldsymbol{F}} = J^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{F}$ に分解し，超弾性体のひずみエネルギ密度関数 $W(\boldsymbol{F})$ を，次のように等容変形成分 $W^{\mathrm{iso}}(\tilde{\boldsymbol{F}})$ と体積変形成分 $W^{\mathrm{vol}}(J)$ に分離できることを仮定する．

$$W(\boldsymbol{F}) = W(J^{\frac{1}{3}}\tilde{\boldsymbol{F}}) = W^{\mathrm{iso}}(\tilde{\boldsymbol{F}}) + W^{\mathrm{vol}}(J) \tag{2}$$

このとき，Kichhoff 応力の偏差成分 $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{y})$ は以下より計算される．

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{F}) = 2\boldsymbol{F}\frac{\partial W^{\mathrm{iso}}(\boldsymbol{F})}{\partial \boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^T, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{y}) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\tilde{\boldsymbol{F}}) - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\tilde{\boldsymbol{F}}) \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{C}$ は右 Cauchy 変形テンソル，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである．また，式 (3) の第２式における変形勾配テンソル $\tilde{\boldsymbol{F}}$ は現配置の位置 $\boldsymbol{y}$ から計算されるものとする．

本研究では，次の体積変形に関するひずみエネルギ密度関数を採用する．

$$W^{\mathrm{vol}}(J) = \frac{K}{2}(J-1)^2 \tag{4}$$

ここで，K は体積弾性係数である．このとき，圧力 p は次式で求められることとなる．

$$p = -K(J-1) \tag{5}$$

以上の超弾性構成則に基づき，変形後の位置 $\boldsymbol{y}$ と圧力 p を独立変数とする混合型定式化を行うと，運動方程式の弱形式は以下のように表される．

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{w}\, dX + \int_\Omega \{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{y}) : \nabla_s \boldsymbol{w} + pJ\nabla \cdot \boldsymbol{w}\}\, dX - \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{w}\, dX = 0 \quad (6)$$

ここで，ρ，$\boldsymbol{f}$ は初期配置を基準とした密度，体積力であり，$\boldsymbol{w}$ は仮想変位である．また，$\nabla_s \boldsymbol{w}$ は以下で表される現配置における仮想ひずみである．

$$\nabla_s \boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^T\right\}$$

また，体積変形に対する構成則の弱表現は圧力 p に対する許容変数 q を用いて以下で与えられる．

$$\int_\Omega (\frac{1}{K}p + J - 1)q\, dX = 0 \quad (7)$$

さらに本研究では，安定化有限要素法 [1] を適用するため，圧力のラプラス作用素に対応した圧力安定化項を式 (7) に追加した次式を用いる．

$$\int_\Omega \left\{\frac{1}{K}pq + \beta\nabla p \cdot \nabla q + (J-1)q\right\} dX = 0 \quad (8)$$

ここで，β は安定化パラメータであり，詳細は後述する．

3. 時間積分

前節の弱定式化された支配方程式に対して，筆者が提案する微圧縮性に対する分離型時間積分 [2] を適用する．これまでの研究では，体積変形に対する材料構成則は線形であることが前提となっていたが，式 (8) は非線形の関係式である，したがって，拘束条件に新たな近似を導入することが必要となる．本研究では，時間方向を以下のように離散化する．

[ステージ 1]

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n\right) = \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\frac{2}{\Delta t}\int_\Omega \rho\left(\boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{v}^n\right)\cdot \boldsymbol{w}\, dX = -\int_\Omega \{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{y}^n) : \nabla^n_s \boldsymbol{w} + \bar{p}^n J^n \nabla^n \cdot \boldsymbol{w}\}\, dX + \int_\Omega \boldsymbol{f}^n \cdot \boldsymbol{w}\, dX \quad (10)$$

$$\int_\Omega \frac{1}{K}\bar{p}^n q - \beta\nabla^n \bar{p}^n \cdot \nabla^n q\, dX = -\frac{1}{2}\int_\Omega \{(J^n - 1) + (J^{n+1} - 1)\} q\, dX + \frac{\Delta t}{2}\int_\Omega J^n \nabla^n \cdot \boldsymbol{v}^n q\, dX \quad (11)$$

[ステージ 2]

$$\frac{2}{\Delta t}\int_\Omega \rho\left(\boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot \boldsymbol{w}\, dX = -\int_\Omega \{\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{y}^{n+1}) : \nabla^{n+1}_s \boldsymbol{w} + \bar{p}^{n+1} J^{n+1} \nabla^{n+1} \cdot \boldsymbol{w}\}\, dX + \int_\Omega \boldsymbol{f}^{n+1} \cdot \boldsymbol{w}\, dX \quad (12)$$

$$\int_\Omega \left\{\frac{1}{K}p^{n+1} q - \beta\nabla^{n+1} p^{n+1} \cdot \nabla^{n+1} q\right\} dX = -\frac{1}{2}\int_\Omega \{(J^n - 1) + (J^{n+1} - 1)\} q\, dX + \frac{\Delta t}{2}\int_\Omega J^{n+1} \nabla^{n+1} \cdot \boldsymbol{v}^{n+1} q\, dX \quad (13)$$

ここで，$\boldsymbol{y}^n, \boldsymbol{v}^n$ は時刻 t_n に対応する n ステップの位置，速度の近似値であり，$\boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}$ は n ステップと $n+1$ ステップの中間時刻における速度である．圧力については，瞬時値として定まるものとして，ステージ１とステージ２のそれぞれで時刻 t_n, t_{n+1} に対応した $\bar{p}^n, p^{n+1}$ が用いられる．また，$\Delta t = t_{n+1} - t_n$ は時間刻み，$\boldsymbol{f}^n$ は時刻 t_n における外力である．式 (11)(13) の右辺は，$n, n+1$ ステップにおける変形前後の体積比から計算される圧力と速度から計算される圧力変化量により表されたアルゴリズム上の圧力であり，Energy–Momentum 法 [4] のおけるアルゴリズム上の応力と類似な近似である．以上の時間積分法は，線形化されたとき，これまでの定式化 [2] と一致する．さらに，体積弾性係数 $K \to \infty$ の非圧縮性の場合には，非線形拘束条件の問題に対する Rattle 法に本手法は帰着される．

4. 空間離散化と全離散化方程式

上述の本研究で提案する時間積分法を適用して得られた半離散化方程式 (9)〜(13) において，変位，速度，圧力を独立変数として Galerkin 法に基づき空間方向に離散化する．

ステージ 1 について空間離散化を行うと以下の代数方程式が得られる．

[ステージ 1]

$$\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) \quad (14)$$

$$\frac{2}{\Delta t}\mathbf{M}(\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{V}^n) = \mathbf{F}^n_{\mathrm{ext}} - \mathbf{F}^n_{\mathrm{int}} + \mathbf{C}^n\bar{\mathbf{P}}^n \quad (15)$$

$$\mathbf{S}^n\bar{\mathbf{P}}^n = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{R}^n + \mathbf{R}^{n+1} - \Delta t\mathbf{C}^t\mathbf{V}^n\right) \quad (16)$$

ここで，$\mathbf{Y}^n, \mathbf{V}^n, \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}}$ はそれぞれ n ステップの離散化された変形後形状 $\boldsymbol{y}^n_h$，n ステップの離散化された速度 $\boldsymbol{v}^n_h$ および離散化された中間速度 $\boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}_h$ に対する節点ベクトルであり，$\bar{\mathbf{P}}^n$ は n ステップの離散化された圧力 p_h の自由度のベクトルである．行列 $\mathbf{M}, \mathbf{C}^n, \mathbf{S}^n$ は，離散化された仮想変位 $\boldsymbol{w}_h$ および離散化された圧力の許容変数 q_h

を用いて，前述の弱定式化に基づき以下で表される．

$$\int_\Omega \rho \boldsymbol{y}_h^n \cdot \boldsymbol{w}_h \, dX = \mathbf{W}^t \mathbf{M} \mathbf{Y}^n \tag{17}$$

$$\int_\Omega q_h J^n \nabla^n \cdot \boldsymbol{v}_h \, dX = \mathbf{Q}^t (\mathbf{C}^n)^t \mathbf{V} \tag{18}$$

$$\int_\Omega \left\{ \frac{1}{K} p_h q_h + \beta \nabla^n p_h \cdot \nabla^n q_h \right\} dX = \mathbf{Q}^t \mathbf{S}^{\mathbf{n}} \mathbf{P} \tag{19}$$

ここで，$\mathbf{W}$ は離散化された許容変数 $\boldsymbol{w}_h$ の節点ベクトル, $\mathbf{Q}$ は離散化された許容変数 q_h の自由度ベクトルである．さらに，$\mathbf{F}^n_{\mathrm{int}}, \mathbf{F}^n_{\mathrm{ext}}$ は n ステップにおける内力と外力の等価節点力ベクトル，$\mathbf{R}^n$ は n ステップにおける体積変形量に対するベクトルであり，以下で表される．

$$\int_\Omega \nabla^n_s \boldsymbol{w}_h : \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{y}^n) \, dX = \mathbf{W}^t \mathbf{F}^n_{\mathrm{int}} \tag{20}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{f}^n \, dX = \mathbf{W}^t \mathbf{F}^n_{\mathrm{ext}} \tag{21}$$

$$\int_\Omega (J^n - 1) q_h \, dX = \mathbf{Q}^t \mathbf{R}^n \tag{22}$$

式 (14)(15) において，変位ベクトル $\mathbf{U} = \mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n$ を導入し，中間速度のベクトル $\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}}$ を消去し，変位についての質量行列 $\mathbf{M}$ を対角化した集中化質量行列 $\tilde{\mathbf{M}}$ に置き換えると次式が得られる．

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{U} = \Delta t \mathbf{M} \mathbf{V}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{C}^n \bar{\mathbf{P}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\mathbf{F}^n_{\mathrm{ext}} - \mathbf{F}^n_{\mathrm{int}} \right) \tag{23}$$

式 (16), (4.) を連立すると，変位ベクトル $\mathbf{U}$ と $n+1$ ステップの位置 $\mathbf{Y}^{n+1}$ が求められるが，この方程式は非線形方程式である．そこで，変位 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n$ に関する次の線形化を考える．

$$J^{n+1} \simeq J^n + J^n \nabla^n \cdot \boldsymbol{u} \tag{24}$$

これを離散化すると，

$$\mathbf{R}^{n+1} \simeq \mathbf{R}^n + (\boldsymbol{C}^n)^t \mathbf{U} \tag{25}$$

と表される．これを式 (16) に適用し，$\mathbf{U}$ を消去すると，圧力 $\bar{\mathbf{P}}^n$ のみの方程式として次式が得られる．

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{S}^n + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{C}^n)^t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}^n \right) \bar{\mathbf{P}}^n \\ &\qquad = -\mathbf{R}^n - \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{C}^n)^t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \left(\mathbf{F}^n_{\mathrm{ext}} - \mathbf{F}^n_{\mathrm{int}} \right) \end{aligned} \tag{26}$$

いま，行列 $(\mathbf{C}^n)^t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}^n$ は圧力に対する離散ポアソン作用素に対応する．式 (26) の求解で得られた圧力 $\bar{\mathbf{P}}^n$ は式 (16) を満たすものではないが，本研究では非線形反復計算を避けることとし，この圧力をステージ 1 の近似解とする．続いて変位ベクトル $\mathbf{U}$ を式 から計算し，中間速度の節点ベクトル $\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}}$ と $n+1$ ステップの位置 $\mathbf{Y}^{n+1}$ を求めることができる．

ステージ 2 の空間離散化についても，ステージ 1 と同様に以下の代数方程式として表すことができる．

[ステージ 2]

$$\frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} \left(\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} \right) = \mathbf{F}^{n+1}_{\mathrm{ext}} - \mathbf{F}^{n+1}_{\mathrm{int}} + \mathbf{C}^{n+1} \mathbf{P}^{n+1} \tag{27}$$

$$\mathbf{S}^{n+1} \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{R}^n + \mathbf{R}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{C}^{n+1})^t \mathbf{V}^{n+1} \tag{28}$$

ここで，ステージ 1 と同様に集中化質量行列 $\tilde{\mathbf{M}}$ を適用し，$\mathbf{V}^{n+1}$ を消去すると次式が得られる．

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{S}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{C}^{n+1})^t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}^{n+1} \right) \mathbf{P}^{n+1} \\ &\qquad = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}^n + \mathbf{R}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{C}^{n+1})^t \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} \\ &\qquad\quad + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{C}^{n+1})^t \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \left(\mathbf{F}^{n+1}_{\mathrm{ext}} - \mathbf{F}^{n+1}_{\mathrm{int}} \right) \end{aligned} \tag{29}$$

ここで現れた圧力に対する係数行列は次のステップのステージ 1 にも現れることから，連立 1 次方程式の求解に直接法を用いる場合には，三角化された行列を保存すれば，係数行列の三角化は各時間ステップで 1 回のみとできる．以上より，変形の自由度より少ない圧力の自由度に関する連立 1 次方程式を各ステップで求解する時間積分のアルゴリズムが得られる．

5. 圧力安定化四面体 1 次要素

空間離散化に対しては，変位については四面体 1 次要素を適用し，圧力は要素毎に定数とし，ラプラス作用素として表される圧力安定化項を導入する．弱形式では圧力の勾配が必要であるが，圧力は不連続な区分的定数関数であることから，これを直接求めることはできない．そこで，本研究では，面を共有する隣接要素において，要素境界面の圧力を隣接要素の圧力の平均値として定義し，要素重心点と要素境界面で構成される四面体毎に圧力の勾配を近似することで圧力安定化項の離散表現を与える [1][5]．なお，圧力安定化項については，現配置で評価するものとする．

安定化項の大きさを制御する人工的なパラメータ β に関しては体積弾性係数 K，要素代表長さ h，無次元定数 α により，次式のように表す．

$$\beta = \frac{\alpha h}{K} \tag{30}$$

要素代表長さ h には，要素境界の三角形の面積の平方根を用い，無次元定数 α については，線形の自由振動問題における固有値から適切なパラメータとして $\alpha = 0.1$ を算出し，非線形問題で用いることとした．

6. 結

本研究では，微圧縮超弾性体の大変形問題に対するロバストな有限要素解析手法として，圧力安定化四面体 1 次要素に分離型時間積分を適用した新しい手法を提案した．今後は，実際に数値計算を実施し，提案手法の有効性を示す予定である．

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 20H04198 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] 山田貴博: 超弾性体の大変形問題に対する圧力安定化四面体 1 次要素, 土木学会論文集 A2, Vol. 73, pp.I_405– I_415, 2017.

[2] 山田貴博: 微圧縮弾性体の動的問題に対する分離型時間積分, 土木学会論文集 A2, Vol. 77, pp. I_217–I_225, 2021.

[3] Andersen, H.C.: Rattle: A “ velocity ” version of the shake algorithm for molecular dynamics calculations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 52, pp.24–34, 1983.

[4] Simo, J.C., Tarnow, N.: The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for non-linear elastodynamics, Z. angew. Math. Phys. 43, pp.757–792 , 1992.

[5] Burman, E. and Hansbo, P.: A unified stabilized method for Stokes ’ and Darcy ’ s equations, *J. Comp. App. Math.*, 198, pp.35-–51, 2007.

[6] 山田貴博: 弾性体の振動固有値問題における有限要素解の数値特性, 日本計算工学会論文集, 2024, p. 20240002, 2024.