計算工学講演会論文集　Vol.29 (2024年6月)　　日本計算工学会

陰的動解析の時間積分パラメータに関する研究

Study on parameters of implicit dynamic time integration

石川覚志[1)]
Satoshi Ishikawa

1) 工博 (株)IDAJ （〒650-0001 兵庫県神戸市中央区加納町4-4-17, E-mail: ishikawa.satoshi@idaj.co.jp)

Dynamic problems involving contact phenomena are of great importance in industry related to mechanical and civil engineering, but also in environmental and medical applications. Regarding the implicit dynamic structural analysis, Abaqus/Standard has the HHT (Hilber-Hughes-Taylor) method which is a family of unconditionally stable one step time methods for the direct time integration. This method is extended from well known Newmark beta method. The HHT method has three parameters, the parameters of beta and gamma are commonly of Newmark beta method, and the parameter of alpha is additional one. We investigated a variety of HHT's three parameters differences with the contact problem, furthermore illustrated the practical application regarding impact analysis of a ratchet device.

Key Words : *Implicit dynamic, Time integration, Contact*

1.　はじめに

動的解析では，慣性項つまり時間の概念を含めた運動方程式を解くことが要求される．この場合，空間方向への離散化のみではなく，時間方向への離散化を伴うため，直接時間積分が必要となる．本報では，接触を含む陰的動解析の時間積分手法および衝突問題におけるパラメータについて述べる．

2.　陰解法動解析

陰解法では，時刻 t_n までの変位，速度，加速度が既知であるとして，時間刻み Δt 後の時刻 $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ での釣り合い状態を満足する解を求める．運動方程式には，未知量 $\{u\}$，$\{v\}$，$\{a\}$ が含まれているため通常は3変数を何らかの近似により関係付けることにより，1変数に減じて解析が行われる．この代表的な近似手法として，Newmarkの β 法が使用されており，加速度，速度および変位は次式の関係で表される．

$$\{v\}_{n+1}=\{v\}_n+\Delta t\left[(1-\gamma)\{a\}_n+\gamma\{a\}_{n+1}\right] \qquad (1)$$

$$\{u\}_{n+1}=\{u\}_n+\Delta t\{v\}_n+\frac{\Delta t^2}{2}\{a\}_n+\beta\Delta t^2\left(\{a\}_{n+1}-\{a\}_n\right) \qquad (2)$$

ここで，β と γ は安定性や精度の観点から決定される定数であり，$\gamma=1/2$ とすることが多い．$\beta=1/4$ とおくと定加速度法となる．

3.　HHT法[1]

Newmark の β 法に新たなパラメータ α を導入し，$t=t_{n+1}$ での運動方程式を式(3)の形式に拡張した数値積分手法が，HHT 法（Hilber-Hughes-Taylor Method）である．

$$[M]\{a\}_{n+1}+(1+\alpha)[K]\{u\}_{n+1}-\alpha[K]\{u\}_n=\{f\}_{n+1} \qquad (3)$$

式(3)では簡単のため減衰項については表記していない．

HHT 法において加速度，速度および変位の関係式は，Newmark-β と同じ式が適用される．さらに α，β，γ の間に，次式の関係が成り立てば，無条件安定であるとされている．

$$\beta=\frac{1}{4}(1-\alpha)^2,\ \gamma=\frac{1}{2}-\alpha \qquad (4)$$

ここで $\alpha=-0.05$ とすれば，実用的に低周波には影響を及ぼさず高周波において数値減衰を発生させることができるので，非定常における過渡応答をほぼ忠実にかつ効率的に求解することができる有効な積分手法となる．また，$\alpha=1-\sqrt{2}=-0.41421$ のとき，高周波において積極的な数値減衰を与えることができるので，衝突などの接触を含む問題に有効とされている[2]．図 1 に様々な積分手法に関するスペクトル半径を示す．横軸は周期に対する時間ステップの比率である。スペクトル半径 $\rho(A)$ が 1 より小さければ，数値減衰が生じ，1 より大きいと解は発散する．

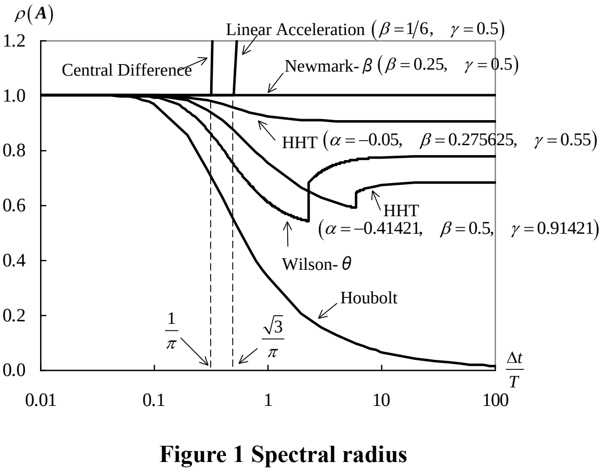

Figure 1 Spectral radius

4.　弾性棒の衝突解析

解析対象モデルを図 2 に示す．相反する方向へ初期速度が与えられた 2 本の弾性棒の速度変化を求める．

ここで，弾性棒のみの固有値は

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{M}}=\sqrt{\frac{1000}{10\times1\times1\times0.001}}=316.22$$

となるので，周期は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.02$$

となる．この解析モデルに対して，いくつかの時間積分パラメータについて検討する．固定時間刻みとして $\Delta t=5\times10^{-5}$ と $\Delta t=8\times10^{-4}$ の 2 種類を適用する．

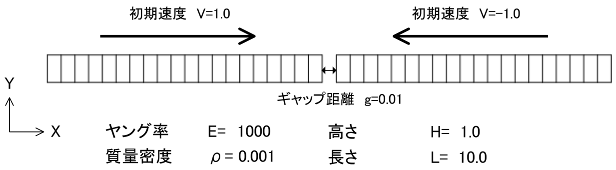

Figure 2 Impact of two elastic bar

5. 解析結果

(1) 純粋なNewmark-β

いわゆる無条件安定，数値減衰のない時間積分手法であり，$\alpha=0.0$，$\beta=0.25$，$\gamma=0.5$ を適用した結果を図3に示す．時間増分に拘わらず，妥当な結果を得ることはできず，特に $\Delta t=5\times10^{-5}$ では不適切な速度応答となった．

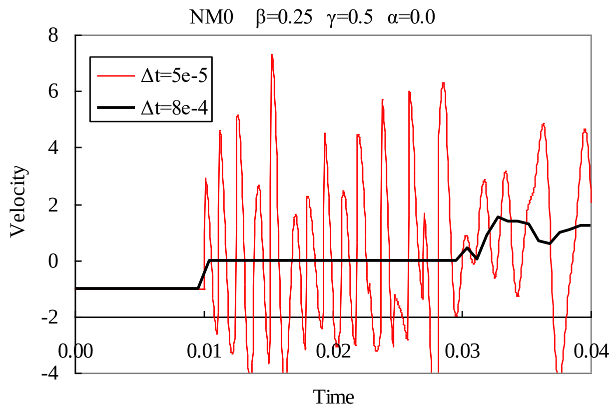

Figure 3 Representative Newmark

(2) 接触に対するNewmark-β

接触を含む問題に対して，望ましいとされているパラメータが式(5)，(6)であり，数値計算による減衰が含まれる．結果を図 4 に示す．このパラメータにおいても妥当な結果を得ることはできない．

$$\beta=\frac{4}{\left(\sqrt{2}+2\right)^{2}}=0.34314 \tag{5}$$

$$\gamma=\frac{6-\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}+2\right)}=0.67157 \tag{6}$$

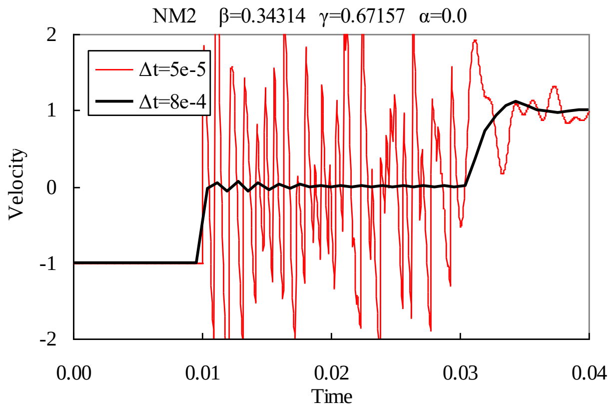

Figure 4 Newmark for Contact

(3) 適度な散逸手法

$\alpha=1-\sqrt{2}=-0.41421$ とする手法であり，

$$\beta=\frac{1}{4}(1-\alpha)^{2}=0.5 \tag{7}$$

$$\gamma=0.5-\alpha=0.91421 \tag{8}$$

となる．文献[2]において，推奨されている値である．図 5 に示す結果から，$\Delta t=5\times10^{-5}$ では，接触時にスパイクが出ているが，良好な結果が得られた．

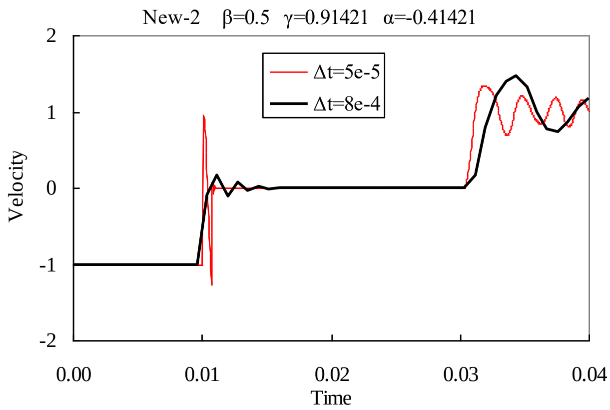

Figure 5 HHT(moderate dissipation)

(4) 忠実な時間積分手法

高周波成分に対する減衰効果を与えて，実現象に対して，ほぼ忠実に解を得る手法であり，$\alpha=-0.05$ として

$$\beta=\frac{1}{4}(1-\alpha)^{2}=0.275625 \tag{9}$$

$$\gamma=0.5-\alpha=0.55 \tag{10}$$

となる．これらのパラメータを用いることで、図 6 に示すように接触時でのスパイクは見られない．しかし，この結果は使用した FEM プログラム[3]の機能として，接触時において小さい時間増分を取ることで接触領域での速度と加速度を適合させた結果であり，接触が発生した場合での反復計算回数が多くなり計算時間が増大する．

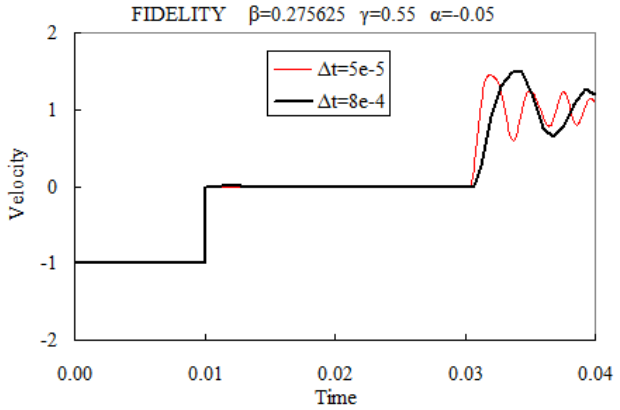

Figure 6 HHT(transient fidelity)

6. 結論

単純な衝突問題で，各時間積分手法について確認を行った．本例で示した単純形状のモデルのように 1 回の接触のみが発生する問題であれば，忠実な時間積分手法（TRANSIENT FIDELITY）を用いることで，スパイクの発生なく良好な結果を得られた．しかし，この手法では接触領域で速度と加速度を適合させる処理が入るため，実用的なモデルでは計算時間がかかることが予想される．

規模の大きい接触問題では，適度な散逸手法（MODERATE DISSIPATION）を用いて，高周波成分を除去することが最も効率的と判断される．

参考文献

[1] Hilber, H. M., T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, **5**, (1977), pp. 283–292

[2] Czekanski, A., N. El-Abbasi, S. A. Meguid, *Comm. Num. Methods Eng.*, **17**, (2001), pp. 379–384

[3] Abaqus Analysis User’s Manual 2016, (2016)