

# 離散体解析手法を用いたトポロジー最適化

## Topology optimization using a discontinuous element-based approach

石渡玲子<sup>1)</sup>, 山本佳士<sup>2)</sup>, 加藤 準治<sup>3)</sup>

Ryoko Ishiwata, Yoshihito Yamamoto and Junji Kato

1) 法政大学 デザイン工学研究科 (〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-33, E-mail: ryoko.ishiwata.4i@stu.hosei.ac.jp)

2) 博(工) 法政大学 デザイン工学部 教授 (〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-33, E-mail: y.yamamoto@hosei.ac.jp)

3) Dr.-Ing. 名古屋大学大学院 工学研究科 教授 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町,  
E-mail: junjikato@civil.nagoya-u.ac.jp)

In recent years, 3D printing technology using high-performance fiber-reinforced mortar has made it possible in the construction field to build structures of any shape in a shorter time and with less labor than was possible with conventional construction methods. With the improvement of 3D printing technology, topology optimization is also being applied in practice. However, topology optimization in the structural field generally uses the finite element method (FEM) for discretization, which is based on continuum mechanics, making it difficult to reproduce discontinuous behavior such as cracking. Therefore, research on topology optimization considering material nonlinearity in mortar and concrete has not progressed sufficiently. Therefore, this study attempts to develop a topology optimization method based on the Rigid-Body-Spring Model (RBSM), which is good at reproducing discontinuous behavior such as cracking. As a fundamental step in the application of RBSM, a topology optimization method for compliance minimization assuming an elastic body was developed, and its applicability was verified. As a result of verification, we obtained an optimal solution using RBSM that is almost the same as the previous results derived using FEM in the elastic range.

**Key Words :** topology optimization, discontinuous element-based approach, RBSM

### 1. はじめに

近年、土木・建築分野では、高性能繊維補強モルタルを用いた3Dプリンティング技術により、従来工法では困難だった自由な形状の構造物を、短期間かつ少ない労力で建設することが可能になってきている。また、3Dプリンティング技術の向上に伴って、実務においてもトポロジー最適化が応用されつつある。

トポロジー最適化の適用事例としては、軽量・高剛性構造設計問題や、固有振動数の設計問題などがある。土木・建築分野では、耐震安全性という観点から、剛性や強度だけでなく、塑性変形を許容してエネルギーを吸収する性能である、変形性能、靱性、ダクティリティと呼ばれる性能の考慮が設計において特に重要である。一方、一般的に構造設計問題におけるトポロジー最適化ではその離散化に有限要素法(FEM)が用いられる。FEMは連続体力学に基づく離散化手法であるため、ひび割れ等の不連続挙動の再現が難しく、モルタルやコンクリートの材料非線形性を考慮したダクティリティ最大化を目的とするトポロジー最適化に関する研究は十分に進展していないのが現状である。

そこで、本研究ではひび割れ等の不連続挙動の再現を得意とする剛体バネモデル(RBSM)を基本としたトポロジー最適化手法の開発を試みる。本研究ではRBSMの適用の基礎的な段階として、弾性体を仮定したコンプライアンス最小化を目的とするトポロジー最適化手法を開発し、

その適用性を検証した。

### 2. RBSMを用いたトポロジー最適化手法

#### (1) RBSMの概要

本研究では、トポロジー最適化で適用する、つり合い方程式の離散化手法として一般的なFEMの代わりにRBSMを用いる。ここでは、まず、RBSMについて説明する。RBSMは、Kawai[1]により提案された離散体解析手法の一つであり、対象を剛体要素とバネの集合体としてモデル化し、要素間に分布するバネのエネルギーを評価することにより、対象の力学的挙動を追求する手法である。バネに非線形構成モデルを導入することで、ひび割れ、すべり等の不連続挙動を簡便に表現することができる。また、RBSMは、Voronoi分割を用いたランダム形状要素の導入(図-1)により、ひび割れ性状の予測が可能になるなど、性能が大きく向上した[2,3,4]。本研究でも、Voronoi分割を

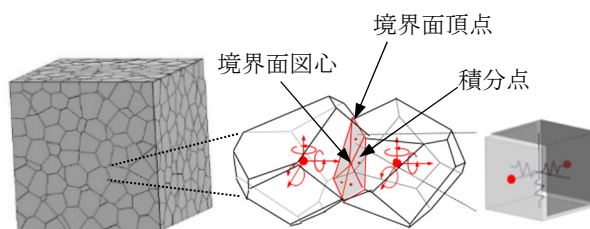


図-1 Voronoi 分割を用いた RBSM の概要

用いたランダム形状要素の適用を前提としている。

RBSMでは、図-1に示すように、要素の代表点（要素重心あるいはVoronoi母点）に並進3自由度および回転3自由度の計6自由度の変位ベクトルが設定される。また、要素境界面上の積分点には垂直バネ1つおよびせん断バネ2つが配置され、それぞれの要素には剛体変位場が仮定される。2つの要素の計12自由度の変位ベクトルと剛体変位関数から、要素境界面上の積分点における要素間相対変位を計算し、バネのひずみを評価する。さらに、バネのひずみから材料の構成式により応力を計算する。すなわち、2要素変位ベクトルとバネのひずみ関係式、バネの応力-ひずみ関係式を、線形化した増分系の仮想仕事式に代入し、増分系の接線剛性方程式を導出して、ニュートンラプソン法により、つり合い解を算定する。なお、本研究では、前述のようにRBSMの適用の基礎的な段階として、弾性体を仮定し、コンプライアンス最小化を目的としたトポロジー最適化手法の構築を試みる。したがって、本研究では、線形のRBSMを用いる。

以上のように、RBSMは、剛体要素とバネの集合として材料を離散化する離散体解析手法ではあるが、FEMと同様に、要素剛性方程式を導出し、それをアセンブリングして、対象領域を離散化する手法であり、要素剛性マトリクスの中身が異なるだけで、計算の過程はFEMと同様である。また、Toi[5]は、線形ティモシェンコはり要素（梁軸方向の積分点が1点のみ、低減ティモシェンコはり要素ともよぶ）において、積分点が要素節点のちょうど中心に位置する場合、その要素剛性マトリクスは、2つのRBSM要素間の剛性マトリクスと完全に一致することを示している。一方、Voronoi分割の定義より、Voronoi面は必ず2つの隣接するVoronoi母点の中心に位置する。したがって、RBSMにVoronoi分割を用いたランダム多面体要素を適用し、その要素の自由度設定点にVoronoi母点を選択する場合、Toiが示した線形ティモシェンコはり要素との等価性の条件を満たすことになる（図-2）。すなわち、Voronoi分割を用いたRBSMは、Voronoi母点を節点とし、Voronoi境界面を断面とする、線形ティモシェンコはり要素のネットワークと等価になる。以降に示すように、本研究では、RBSMと線形ティモシェンコはり要素FEMとの等価性を利用して、トポロジー最適化を行う。

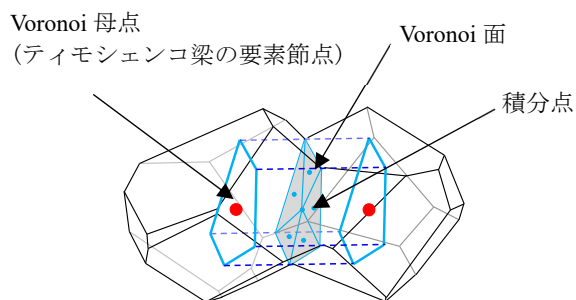


図-2 RBSM および線形ティモシェンコはり要素の関係

(2) コンプライアンス最小化を目的とするトポロジー最適化

2. (1)で示したように、RBSMのトポロジー最適化手法への適用では、まず、RBSMを、Voronoi母点を節点とし、Voronoi境界面に積分点を持つ、線形ティモシェンコはり要素のランダムネットワークと考える。はり要素FEMを用いたトポロジー最適化については、例えば、西脇ら[6]がSIMP法（Solid Isotropic Material with Penalization）を用いた手法を提案しているが、本研究では同様の方法を用いた。以下に手法の概要を説明する。

SIMP法を用いたトポロジー最適化では、まず、固定設計領域を設け、荷重条件や固定条件の設定を行う。本研究では、それぞれの線形ティモシェンコはり要素に割り当てられる正規化された密度を設計変数 $s_i$ と定義する。ここで $i$ は要素番号であり、設計変数 $s_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ )は以下のように書ける。

$$s_i = \frac{r_i}{r_0} \quad 0 \leq s_i \leq 1 \quad (1)$$

ここで、 $r_i$ は $i$ 番目の要素の最適化後の体積であり、 $r_0$ は $i$ 番目要素の元々の体積である。

SIMP法を用いたコンプライアンス最小化問題の目的関数と制約条件は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \min \quad & l(\mathbf{s}) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{s}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & \frac{V(\mathbf{s})}{V_{total}} - V_f = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $l(\mathbf{s})$ はコンプライアンス、 $\mathbf{f}$ は既知の節点荷重ベクトル、 $\mathbf{u}$ は節点変位ベクトル、 $\mathbf{K}(\mathbf{s})$ は設計変数 $s_i$ を反映した線形ティモシェンコはり要素のVoronoiネットワークにより得られた全体剛性マトリクスである。また、 $V_{total}$ は固定設計領域の体積、 $V(\mathbf{s})$ は設計変数 $s_i$ を反映した固定設計領域の体積、 $V_f$ は体積制約である。

要素の弾性係数 $E_i$ と設計変数 $s_i$ の関係式は以下のように定義する。

$$E_i(s_i) = (E_0 - E_{min})s_i^p + E_{min} \quad (3)$$

ここで、 $p$ はペナルティパラメータ、 $E_0$ は適用した材料の弾性係数、 $E_{min}$ はFEM解析において数値的不安定性を回避するために与える弾性係数の下限であり、 $E_0$ と比較して十分に小さい値を与える[7]。

コンプライアンス $l(\mathbf{s})$ に対する設計変数 $s_i$ の感度は以下の式で計算できる。

$$\frac{\partial l}{\partial s_i} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \quad (4)$$

この感度にはチェッカーボードパターンの回避等を目的としてフィルタリングが実施され、平滑化が行われる[7]. 本研究では、線形ティモシェンコはり要素の midpoint を各要素の代表点とし、その点を基準として、設定したフィルタリング半径によりフィルタリングを実施した(図-3). 算定された感度に基づいて各種最適化法により、設計変数が更新されるが、本研究では、最適性基準法 (optimality criteria method, OC法) を用いて設計変数の更新を行った. この一連のフローを、収束基準を満たすまで繰り返すことで最適解が得られる.

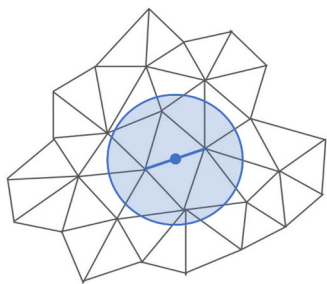


図-3 RBSM と等価な梁要素ネットワークにおけるフィルタリング範囲

### 3. 提案手法を用いた最適化例

提案手法を用いて、図-4および図-5に示す条件を設定し、コンプライアンス最小化を目的としたトポロジー最適化を行った. 体積制約は50%とした. また、ここでは、要素寸法  $h$ , フィルタリング半径  $r_{fu}$ , およびVoronoi要素分割パターンを変化させて最適化を実施した. 図-6に、

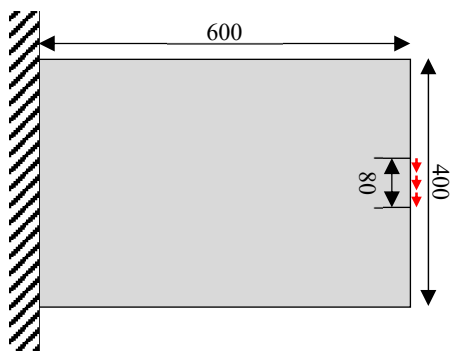


図-4 最適化例 1

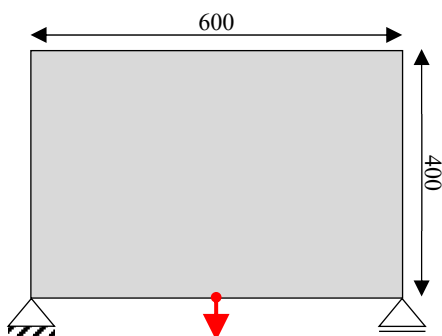
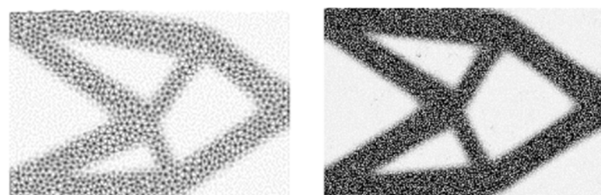


図-5 最適化例 2

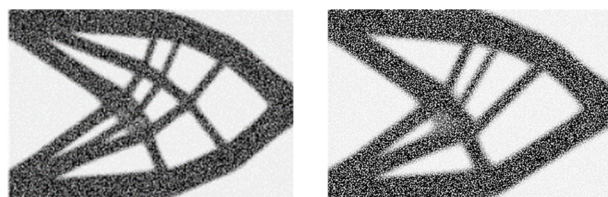
最適化例1の条件で、RBSMの平均要素寸法(線形ティモシェンコはり要素の平均長さ)を変化させた時の最適解を示す. 検証した範囲では、要素寸法を変化させても最適解に大きな変化は見られなかった. 図-7に、最適化例1の条件で、フィルタリング半径を変化させた時の最適解を



$h = 10$

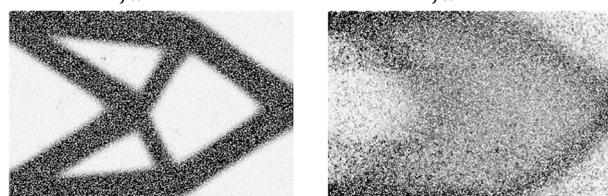
$h = 4$

図-6 要素寸法の影響(最適化例 1)



$r_{fu} = 8$

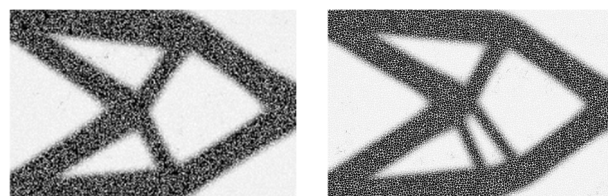
$r_{fu} = 12$



$r_{fu} = 16$

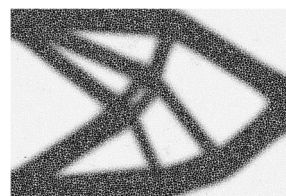
$r_{fu} = 30$

図-7 フィルタリング半径の影響(最適化例 1)



Case1

Case2



Case3

図-8 要素分割パターンの影響(最適化例 1)



$h = 10$

$h = 4$

図-9 要素寸法の影響(最適化例 2)

示す。RBSMではランダムで非対称な要素分割を用いたため、非対称な最適解が得られたが、既往のFEMで得られているような、フィルタリング半径の影響が見られた[7]。

図-8に、最適化例1の条件で、同一平均要素寸法で要素分割パターンを変化させた場合の最適解を示す。初期配列パターンの影響を受け、異なる最適解に収束している。

図-9に、最適化例2の条件で、要素寸法  $h$  を変化させた時の最適解を示す。要素寸法を小さくすると、载荷位置から放射状に伸びる部材が多数現れた。

#### 4. 結論

本研究では、ひび割れ等の破壊の再現を得意とするRBSMを用いたトポロジー最適化手法の確立の基礎的な段階として、弾性体を仮定しコンプライアンス最小化を目的とするトポロジー最適化手法を提案し、実装した。さらに、簡単な最適化例を示した。結果として、既往のFEMを用いた結果とほぼ同様な最適解を探索していることが分かった。今後は、ひび割れの発生、進展を表現するひずみ軟化等の非線形構成モデルを導入し、ダクティリティ最大化等を目的としたトポロジー最適化手法の開発を行う予定である。

#### 参考文献

- [1] Kawai, T.: New discrete models and their application to seismic response analysis of structures. Nuclear Engineering and Design, 48, pp.207-229, 1978.
- [2] 竹内則雄, 上田真稔, 上林厚志, 鬼頭広明, 樋口晴紀: ボロノイ分割を用いたRBSMによる無筋コンクリート梁の寸法効果解析, 構造工学論文集, 40A, 519-527, 1994.
- [3] Bolander, J. E. and Saito, S.: Fracture analysis using spring network with random geometry, Engineering Fracture Mechanics, Vol.61, pp.569-591, 1998.
- [4] Yamamoto, Y., Nakamura H., Kuroda I. and Furuya N.: Crack propagation analysis of reinforced concrete wall under cyclic loading using RBSM, European Journal of Environmental and Civil Engineering, 18(7), 780-792, 2014.
- [5] Toi, Y.: Shifted Integration Technique in One-Dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.31, pp.1537-1552, 1991.
- [6] 西脇眞二, 西垣英一, 鶴見康昭, 小島芳生, 菊池昇: はり要素を用いたトポロジー最適化 (第1報, 静的な剛性の最大化の場合), 日本機械学会論文集 (C編), 67巻, 662号, pp.3069-3077, 2001.
- [7] 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池 昇: トポロジー最適化, 丸善出版, 2013