

粘弹性複合材料を想定したマルチスケールトポロジー最適化の感度解析手法に関する検討

Study on Sensitivity Analysis Method
for Multiscale Topology Optimization Assuming Viscoelastic Composites

松尾麟¹⁾干場大也²⁾西口浩司³⁾加藤準治⁴⁾

Rin Matsuo, Hiroya Hoshiba, Koji Nishiguchi and Junji Kato

¹⁾名古屋大学大学院 工学研究科 (〒 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: matsuo.rin.k5@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

²⁾博(工) 名古屋大学大学院 工学研究科 助教 (〒 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail:

hiroyahoshiba@civil.nagoya-u.ac.jp)

³⁾博(工) 名古屋大学大学院 工学研究科 准教授 (〒 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail:

kojinishiguchi@nagoya-u.ac.jp)

⁴⁾Dr.-ing. 名古屋大学大学院 工学研究科 教授 (〒 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: junjikato@civil.nagoya-u.ac.jp)

Viscoelastic materials have many engineering applications due to their properties, but existing materials have limited performance. Therefore, this study aims to establish an optimal topology design method based on the homogenization method that takes into account viscoelastic behavior to further improve the performance of materials. In general, parameter identification of nonlinear material constitutive laws is complex, and sensitivity analysis requires localization analysis at all integration points of the macrostructure. In this study, we propose a sensitivity analysis method that eliminates localization analysis by simplifying parameter identification.

Key Words : Topology Optimization, Homogenization, Multi-scale analysis, Viscoelasticity

1. はじめに

ゴムやプラスチックに代表される高分子材料は弾性と粘性を併せ持つ粘弹性材料である。粘弹性材料はエネルギーを熱として散逸する特性があり、これを活用した衝撃吸収や振動低減性能に優れた製品の開発は盛んに行われている。一方で、設計上の形状や材料の制約のために力学的性能に大きな向上が見られない状況が続いているが、近年では異なる種類のゴム材料を細密に組み合わせられる 3D プリンタが登場し、自由度の高いゴム製品の設計が可能になりつつある。

非線形弾性材料におけるマルチスケールトポロジー最適化の例として、加藤ら [1] は分離型マルチスケール解析手法を有限変形理論に基づき超弾性材料に応用し、マクロ構造とミクロ構造の両方を同時に最適化する手法を提案した。また、干場ら [2] は分離型マルチスケール解析手法を弾塑性材料に応用しミクロ構造を最適化する手法を提案した。これらの手法ではマクロ構成則が非線形であるために、局所化解析によって感度解析をする必要がある。それにより計算コストが増大するという課題があり、特に変形履歴に依存する後者では全増分ステップにおいて計算する必要性からその計算コストは莫大となるため実用性に欠ける。これは、マクロ材料構成則の均質化物性を求めるために、数値材料試験のマクロ応力を基に複雑なパラメータ同定アルゴリズムを用いていることに起因する。粘弹性材料に対するマルチスケールトポロジー最適化に関連して、Kyeong-Soo ら [3] は粘弹性多孔質材料における動

的マルチスケールトポロジー最適化を提案した。しかし、これは粘弹性多孔質材料の場合はユニットセルの空間的な非周期性のみを考慮しても良い精度が得られることを利用して均質化を行なっているため、粘弹性複合材料には適用できない。また、Kyeong-Soo ら [4] は粘弹性複合材料に対して応力緩和を測定する数値材料試験を行い、所望のマクロ応力緩和を得るミクロ構造最適化を提案した。しかし、これはマクロ構造の挙動を考慮していない。

本研究では均質化法に基づき、粘弹性挙動を考慮したトポロジー最適設計（マルチスケールトポロジー最適化）法を確立し、材料のさらなる性能向上を図る。簡素なパラメータ同定アルゴリズムを含む均質化解析法に基づいて解析的感度を求めてことで、局所化解析を避けた感度解析手法について検討する。

2. 最適化のための粘弹性分離型マルチスケール解析

(1) 材料構成則

ミクロ材料構成則、マクロ材料構成則共に一般化 Maxwell モデルを用いる。このとき、応力-ひずみ関係は次の通りである。

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t C_{(t-s)} \frac{d\epsilon(s)}{ds} ds \quad (1)$$

$$C_{(t)} = C^\infty + \sum_{i=1}^{\alpha} C^i \exp\left(-\frac{t}{\tau^i}\right) \quad (2)$$

時刻 t のときの、応力を $\sigma(t)$ 、ひずみを $\epsilon(t)$ 、緩和弾性テンソルを $\mathbb{C}_{(t)}$ とする。また、純弾性成分の弾性テンソルを \mathbb{C}^∞ 、マクスウェル要素数を α 、 i 番目のマクスウェル要素の弾性テンソルを \mathbb{C}^i 、緩和時間を作とする。

ミクロ材料幾何を構成する二つの材料については、各バネ要素の弾性テンソルに等方性平面ひずみを仮定する。また、マクスウェル要素数と緩和時間については2材料間で共通とする。

マクロ構造幾何を構成する均質体については、各バネ要素の弾性テンソルに完全異方性を仮定する。また、マクスウェル要素数と緩和時間についてはミクロ材料の有する値から不变と仮定する。

(2) 数値材料試験

本研究では寺田ら [5] の解析手法に倣って行う。ユニットセルに対して、初期時間ステップで単位マクロひずみ $\mathbf{E}^{(q)}$ を与えてマクロ変形を固定し、マクロ応力緩和を測定する。ただし、 (q) は voigt 表記におけるマクロひずみの方向を表しており、本研究では二次元問題を想定しており、その場合次式に示す3通りである。

$$\mathbf{E}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\Sigma(t) = \mathbb{C}^{\text{H}\infty} + \sum_{i=1}^{\alpha} \mathbb{C}^{\text{Hi}} \exp\left(-\frac{t}{\tau^i}\right) \quad (4)$$

$\Sigma(t)$ は時刻 t におけるマクロ応力、 $\mathbb{C}^{\text{H}\infty}$ は純弾性成分の弾性テンソル、 \mathbb{C}^{Hi} は i 番目のマクスウェル成分の弾性テンソルである。このとき、(1)、(2) に注目すると、この数値材料試験により計測できるマクロ応力は(4)に示すように均質化緩和弾性テンソルの値そのものを測定していることが確認できる。ただし、voigt 表記を用いて、以下のように各ひずみパターンで取得できるマクロ応力に対応する緩和弾性テンソルの成分が求められている点に注意が必要である。

$$\mathbb{C}^N = \begin{bmatrix} C_{11}^N & C_{12}^N & C_{13}^N \\ C_{21}^N & C_{22}^N & C_{23}^N \\ C_{31}^N & C_{32}^N & C_{33}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{(1)} & \Sigma_1^{(2)} & \Sigma_1^{(3)} \\ \Sigma_2^{(1)} & \Sigma_2^{(2)} & \Sigma_2^{(3)} \\ \Sigma_3^{(1)} & \Sigma_3^{(2)} & \Sigma_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 C_{pq}^N は数値材料試験によって得られる pq 成分の緩和弾性テンソルの値であるが、離散的な値であり、後に同定する均質化緩和弾性テンソルと区別するために数値材料試験 (Numerical Material Testing) の添え字 N をついている。また、 $\Sigma_p^{(q)}$ は (q) 方向の数値材料試験を行ったときの p 成分のマクロ応力である。また、時間ステップの変数であることを示す表記は省略している。緩和弾性テンソルの値そのものを得られることが本手法の利点であり、そのことが簡素なパラメータ同定につながる。

(3) 同定解析

同定する均質化物性を未知数とした均質化緩和弾性テンソルの二乗誤差関数 χ_{pq} について最小値問題を求解することで同定する。

$$\chi_{pq} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(C_{pq}^H(t) - C_{pq}^N(t) \right)^2 \quad (6)$$

ここで、 $C_{pq}^H(t)$ は時刻 t におけるマクロ均質材料 pq 成分の緩和弾性テンソル、 $C_{pq}^N(t)$ は時刻 t における数値材料試験 pq 成分の緩和弾性テンソルである。停留条件を満たす C_{pq}^H が求める解であり、行列の形式で下記のように書き下すことができる。

$$\begin{bmatrix} C^{\text{H}0} \\ \vdots \\ C^{\text{Hi}} \\ \vdots \\ C^{\text{H}\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T g_t^0 g_t^0 & \dots & \sum_{t=1}^T g_t^0 g_t^\alpha \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^T g_t^i g_t^j & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \text{Sym.} & \sum_{t=1}^T g_t^\alpha g_t^\alpha & \sum_{t=1}^T g_t^\alpha C^N(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T g_t^0 C^N(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T g_t^i C^N(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T g_t^\alpha C^N(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

pq は省略している。 g_t^i は下記のように定義する。

$$g_t^i \equiv \begin{cases} \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) & \text{if } i = 1, 2, \dots, \alpha \\ 1 & \text{else } i = 0 \end{cases} \quad (8)$$

3. 材料表現法および感度解析

(1) SIMP 法

周期的ミクロ構造を構成する有限要素に対して、Zhou·Rozvany[6]によるSIMP法 (Solid Isotropic Microstructure with Penalization of intermediate densities) を用いて設計変数を内挿する。すなわち、 N 個の有限要素メッシュの e 番目の要素について設計変数 s_e ($e = 1, 2, \dots, N$) を $0 \leq s_e \leq 1$ の範囲で定義する。このときの一般化マクスウェルモデルの純弾性成分、マクスウェル成分の各バネ要素それぞれに対して以下のように定義する。

$$E^\infty(s) = E_1^\infty + \rho_e(s)^\eta (E_2^\infty - E_1^\infty) \quad (9)$$

$$E^i(s) = E_1^i + \rho_e(s)^\eta (E_2^i - E_1^i) \quad (10)$$

設計変数 s の時の純弾性成分のヤング率を $E^\infty(s)$ 、マクスウェル成分のヤング率を $E^i(s)$ 、その要素の材料密度 $\rho_e(s)$ とする。ミクロ構造を構成する2材料をそれぞれ材料1および材料2として、材料1の純弾性成分ヤング率を E_1^∞ 、材料2の純弾性成分ヤング率を E_2^∞ 、材料1のマクスウェル成分ヤング率を E_1^i 、材料2のマクスウェル成分ヤング率を E_2^i とする。本研究の設定においては、緩和時間が2材料で共通のために設計変数に依存しない。そのため、このように単純にヤング率について内挿すれば良い。

(2) 均質化物性の2スケール境界値問題に基づく記述

均質化物性とは、本研究では、マクロ材料構成則の各バネの弾性テンソルを指す。これについて、(7)の関係を基に整理する。2材料間で緩和時間は同一と仮定しているので、 g_t^i は設計変数に依存しない。したがって、均質化パラメータ C_{pq}^{Hi} の解析的感度は、 $C_{pq}^N(t)$ の解析的感度 ($\frac{dC_{pq}^N(t)}{ds_e}$) の線形和を取ることで求められる。ここで、 $C_{pq}^N(t)$ は voigt 表記を用いて、(q) 方向の数値材料試験を行ったときの p 成分の応力を $\sigma_p^{(q)}(t)$ と表記すると下記のように展開できる。

$$C_{pq}^N(t) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_p^{(q)}(t) dY \quad (11)$$

$$= \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{E}^{(p)\top} \boldsymbol{\sigma}^{(q)}(t) dY \quad (12)$$

$$= \frac{1}{|Y|} \int_Y (\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{*(p)})^\top \boldsymbol{\sigma}^{(q)}(t) dY \quad (13)$$

$$= \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)\top} \boldsymbol{\sigma}^{(q)}(t) dY \quad (14)$$

2スケール境界値問題に基づいた(11)の関係式を、数値材料試験のマクロひずみを用いて(12)のように応力をベクトルとする形式に書き直した。その後マクロひずみとミクロひずみの関係に従って書き下し、周期境界条件と仮想仕事式より、擾乱ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{*(p)}$ の項が消えることを用いて(14)を導いた。更に応力について、空間離散化および時間離散化を行うと最終的に(15)となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{pq}^N(t_T) = \frac{1}{|Y|} \mathcal{A}_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \hat{\mathbf{w}}_e^{(p)}(t_T)^\top \mathbf{B}_e^\top \boldsymbol{\sigma}_e^{(q)}(t_T) dV_e \\ \boldsymbol{\sigma}_e^{(q)}(t_T) = \mathbb{C}^\infty \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T) + \\ \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{U=1}^T \mathbb{C}^i \tau^i \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{\Delta t_T}{\tau^i} \right) \right\} \\ \exp \left(-\frac{t_T - t_U}{\tau^i} \Delta t_T \right) \mathbf{B}_e \frac{\Delta \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{\Delta t_T} \\ \Delta t_T = t_T - t_{T-1} \\ \Delta \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T) = \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T) - \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_{T-1}) \end{array} \right. \quad (15)$$

ここで、 N_e は有限要素数、 $\mathcal{A}_{e=1}^{N_e}$ は要素同士を結合するアゼンブリング演算子、 t_T は T ステップ時の時刻、 $\hat{\mathbf{w}}_e^{(p)}$ は(p) 方向の数値材料試験時の要素接点変位ベクトルである。以上の議論より、均質化物性 C_{pq}^{Hi} の解析的感度を求めるために、 $\frac{dC_{pq}^N(t_T)}{ds_e}$ を求めれば良いことになる。設計変数に依存するのは結局、 $\frac{d\mathbb{C}^\infty}{ds_e}$ 、 $\frac{d\mathbb{C}^i}{ds_e}$ 、 $\frac{d\hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{ds_e}$ の 3 項であり、このうち $\frac{d\mathbb{C}^\infty}{ds_e}$ 、 $\frac{d\mathbb{C}^i}{ds_e}$ については設計変数の定義から陽に求まる。

(3) 随伴変数法に基づく感度解析

次に $\frac{d\hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{ds_e}$ を求めることを考える。これは陰的な項であるため、随伴変数法を用いて求める。これは、[9]に倣って行う。 t_T ステップ目の変位は、粘弾性材料の時間に伴う変形の履歴に依存する性質から、それ以前の増分ステップ 1, 2, ..., t_T ステップの変位歴に依存する。そこで各ステップの力の釣り合い式を導入して変

位の陰的項を消去する。力の釣り合い式の係数 $\lambda_U^{(q)}$ を随伴ベクトルと呼び、任意の値を取れることを利用して、各ステップにおける 0 となる随伴ベクトルを求める。

$$\hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_T) = \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_T) + \sum_{U=1}^T \lambda_U^{(q)\top} \mathbf{R}_U^{(q)} \quad (16)$$

ここで、残差 $\mathbf{R}_T^{(q)}$ を以下に記す。

$$\mathbf{R}_T^{(q)} = F_{int}^{(q)}(t_T) - F_{ext}^{(q)}(t_T) \quad (17)$$

$$= \int_{V_e} \mathbf{B}_e^\top \mathbb{C}^\infty \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T) +$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{U=1}^T \mathbf{B}_e^\top \mathbb{C}^i \mathbf{B}_e \tau^i \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{\Delta t_T}{\tau^i} \right) \right\}$$

$$\exp \left(-\frac{t_T - t_U}{\tau^i} \Delta t_T \right) \frac{\Delta \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{\Delta t_T} dV_e - F_{ext}^{(q)}(t_T) \quad (18)$$

(16) を設計変数で微分し、整理する。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_T)}{ds_e} &= \sum_{U=1}^T \lambda_U^{(q)\top} \frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial s_e} + \left(1 + \lambda_T^{(q)\top} \frac{\partial \mathbf{R}_T^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_T)} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_T)}{\partial s_e} \\ &+ \sum_{U=1}^{T-1} \left(\sum_{V=U}^T \lambda_V^{(q)\top} \frac{\partial \mathbf{R}_V^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)} \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)}{\partial s_e} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

(19) では、最終ステップとそれ以外に分けている。第二項と第三項が 0 となるように随伴ベクトルを定め、その随伴ベクトルを用いて第一項を計算する。まず、第二項が 0 となるような最終ステップにおける随伴ベクトルは下記の方程式を解けば求まる。

$$\frac{\partial \mathbf{R}_T^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_T)} \lambda_T^{(q)} = -1 \quad (20)$$

その後、第三項の各項が 0 となるような随伴ベクトルを求める。(21) のように U ステップ目の随伴ベクトルはそれ以降のステップの随伴ベクトルに依存する。従って、最終ステップから順に遡って随伴ベクトルが求まる。

$$\frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)} \lambda_U^{(q)} = - \sum_{V=U+1}^T \lambda_V^{(q)\top} \frac{\partial \mathbf{R}_V^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)} \quad \text{for } U = T-1, T-2, \dots, 1 \quad (21)$$

$\frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{R}_V^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)}$ を導く。これは、(18) を用いる。まず、 $\frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)}$ については、結果としてコンシスティント接線係数を用いた接線剛性そのものとなる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)} &= \mathcal{A}_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \mathbf{B}_e^\top \mathbb{C}^\infty + \\ &\sum_{i=1}^{\alpha} \mathbb{C}^i \frac{\tau^i}{\Delta t_U} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t_U}{\tau^i} \right) \right) \mathbf{B}_e dV_e \end{aligned} \quad (22)$$

次に $\frac{\partial \mathbf{R}_V^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)}$ の項を導く。これも同じように式展開すると、応力更新式を加味して結論は下記のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_V^{(q)}}{\partial \hat{\mathbf{w}}^{(q)}(t_U)} &= \mathcal{A}_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \mathbf{B}_e^\top \sum_{i=1}^{\alpha} \mathbb{C}^i \frac{\tau^i}{\Delta t_V} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_V}{\tau^i}\right) \right) \\ &\quad \left(\exp\left(-\frac{V-U}{\tau^i} \Delta t_V\right) - \exp\left(-\frac{V-(U+1)}{\tau^i} \Delta t_V\right) \right) \\ &\quad \mathbf{B}_e dV_e \end{aligned} \quad (23)$$

よって、各時間ステップにおける随伴ベクトルを用いて、 $\frac{\partial \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_I)}{\partial s_e}$ は (24) となる。

$$\frac{d\hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{ds_e} = \sum_{U=1}^T \lambda_U^{(q)\top} \frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial s_e} \quad (24)$$

ただしここで、 $\frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial s_e}$ については、設計変数の定義から簡単に求まる。

$$\frac{\partial \mathbf{R}_U^{(q)}}{\partial s_e} = \mathcal{A}_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \mathbf{B}_e^\top \frac{\partial \sigma_e^{(q)}(t_U)}{\partial s_e} dV_e \quad (25)$$

であり、 $\frac{\partial \sigma_e^{(q)}(t_U)}{\partial s_e}$ については、下記である。

$$\frac{\partial \sigma_e^{(q)}(t_U)}{\partial s_e} = \frac{\sigma^\infty(t_U)}{E^\infty} \frac{\partial E^\infty}{\partial s_e} + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{\mathbf{h}^i(t_U)}{E^i} \frac{\partial E^i}{\partial s_e} \quad (26)$$

以上の議論より、 $\frac{dC_{pq}^N(t_T)}{ds_e}$ を求める準備が整った。(15) の第一式において、 $\hat{\mathbf{w}}_e^{(p)}(t_T)^\top$ の微分は (13) において周期境界条件と仮想仕事式から $\boldsymbol{\epsilon}^{*(p)}$ が消去できるのと同様に消去できる。したがって、 $\sigma_e^{(q)}(t_T)$ を微分すれば良い。

$$\begin{aligned} \frac{dC_{pq}^N(t_T)}{ds_e} &= \frac{1}{|Y|} \mathcal{A}_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} (\hat{\mathbf{w}}_e^{(p)}(t_T))^\top \mathbf{B}_e^\top \frac{d\sigma_e^{(q)}(t_T)}{ds_e} dV_e \\ \frac{d\sigma_e^{(q)}(t_T)}{ds_e} &= \frac{d\mathbb{C}^\infty}{ds_e} \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T) + \mathbb{C}^\infty \mathbf{B}_e \frac{d\hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{ds_e} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{U=1}^T \frac{d\mathbb{C}^i}{ds_e} \tau^i \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_T}{\tau^i}\right) \right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{t_T - t_U}{\tau^i} \Delta t_T\right) \mathbf{B}_e \frac{\Delta \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{\Delta t_T} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{U=1}^T \mathbb{C}^i \tau^i \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_T}{\tau^i}\right) \right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{t_T - t_U}{\tau^i} \Delta t_T\right) \mathbf{B}_e \frac{\Delta \frac{d\hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T)}{ds_e}}{\Delta t_T} \end{aligned}$$

$$\Delta t_T = t_T - t_{T-1}$$

$$\Delta \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T) = \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_T) - \hat{\mathbf{w}}_e^{(q)}(t_{T-1})$$

(27)

(27) より、 $\frac{dC_{pq}^N(t_T)}{ds_e}$ を用いて、(7) の微分は以下となる。

$$\begin{pmatrix} \frac{dC^{H0}}{ds_e} \\ \vdots \\ \frac{dC^{Hi}}{ds_e} \\ \vdots \\ \frac{dC^{Ha}}{ds_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T g_t^0 g_t^0 & \cdots & \sum_{t=1}^T g_t^0 g_t^\alpha \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^T g_t^i g_t^j & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \sum_{t=1}^T g_t^\alpha g_t^\alpha & \ddots & \sum_{t=1}^T g_t^\alpha \frac{dC^N(t)}{ds_e} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T g_t^0 \frac{dC^N(t)}{ds_e} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T g_t^i \frac{dC^N(t)}{ds_e} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T g_t^\alpha \frac{dC^N(t)}{ds_e} \end{pmatrix} \quad (28)$$

4. 数値解析例

(1) 粘弾性分離型マルチスケール解析の妥当性検証

感度解析の検討に先駆けて、本研究における粘弾性分離型マルチスケール解析の妥当性検証を行う。本節では材料 1 と材料 2 の物性について、それぞれ固いゴム材料、柔らかいゴム材料を想定して解析する。解析モデルには 4 節点四角形要素を用いて、要素数は 256 × 256 要素とする。材料物性について、ポアソン比は 2 材料共に 0.49、一般化マクスウェルモデルの各ヤング率と緩和時間は表-1 に記載の通りである。これは実際の物性を想定した物性値である、時間ステップは対数スケールで等間隔な 10^{-10} から 10^1 s までを 29 ステップで解析する。検証に用いたユニットセルのミクロ構造は図-1 である。ここで、深緑色で表されるのは材料 1 であり、薄緑色で表されるのは材料 2 である。検証形状は、線形弾性体におけるマルチスケールトポロジー最適化で導かれた結果の一例であり、最適化で導かれ得る形状を想定している。



図-1 検証に用いたユニットセルのミクロ構造

表-1 2 材料それぞれの材料物性値

ヤング率 [Pa]		緩和時間 [s]
材料1	材料2	
3.0139422×10^4	8.1056894×10^3	—
2.1745964×10^6	3.5310010×10^5	3.1831015×10^{-3}
2.9737963×10^5	0.0000000×10^0	1.3162712×10^{-2}
2.3759505×10^5	1.6909690×10^4	5.4430242×10^{-2}
8.4960322×10^4	6.5939460×10^3	2.2507909×10^{-1}
2.7428741×10^4	1.9710868×10^3	9.3074355×10^{-1}
2.6029126×10^4	1.9770047×10^3	3.8487962×10^0

解析の結果を図-2 に示す。数値材料試験により得られたミクロ構造のマクロ応答を「・」で表記し、実際に同定した均質化物性による均質化緩和弾性テンソルを

「-」で表記する。均質化緩和弾性テンソルは、voigt表記で 3×3 の正方行列で表現できる。また、対称行列であることを踏まえて独立な6成分について、図-2にまとめて記載する。この結果について、「・」で示されるミクロ構造のマクロ応答と、「-」で示される同定した均質化物性がよく一致していれば妥当であるといえる。実際に図-2を見るとよく一致しており妥当性が確認できた。また、検証形状を変えて検証を行ったが、いずれの結果も高精度であった。

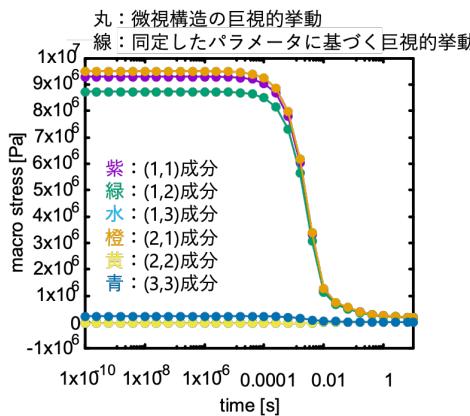


図-2 実在するゴム物性を想定した妥当性検証

5. 結論

- トポロジー最適化を行うことを念頭に置いた、先行研究を基礎とする粘弾性複合材料を想定した均質化解析により、均質化物性の感度解析時に局所化解析を省くことが可能となる、解析的感度を導ける形式での定式化を提案した。

- 提案手法の均質化解析について数値的に検討し、高い精度で均質化解析が可能なことを確認した。
- 簡単な最適化問題について、最適化計算例を用いて検討を行った。また、本手法の有用性について検討した。

参考文献

- [1] 加藤準治, 谷地大舜, 西澤峻祐, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史(2015) : 超弾性複合材料の分離型マルチスケールトポロジー最適化, 日本計算工学会論文集, 2016卷, p20160001.
- [2] 干場大也, 小川峻, 加藤準治, 京谷孝史(2018) : 複合材料の弾塑性挙動を考慮したマルチスケールトポロジー最適化, 日本計算工学会論文集, 2018卷, p20180015.
- [3] Kyeong-Soo, Y., Sung-Kie, Y. (2018) : Microstructural topology optimization of viscoelastic materials of damped structures subjected to dynamic loads, Int. J. Solids Struct., Vol. 147, pp. 67-79.
- [4] Kyeong-Soo, Y., Sung-Kie, Y. (2022) : Topology optimization of periodic microstructures for prescribed relaxation moduli of viscoelastic composites, Int. J. Solids Struct., Vol. 257, 111630
- [5] 寺田賢二郎, 濱名康影, 平山紀夫(2009) : 繊維強化プラスチックの粘弾性マルチスケール解析手法, 日本機械学会論文集A編, 2009 75卷 760号, p1674-1683.
- [6] Zhou, M. Rozvany, G.I.N. (1991) : The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 89, pp. 309-336.