

超弾性体ミクロ構造のカーブ フィッティングトポロジー最適化とその安定化

Curve-fitting topology optimization of
hyperelastic microstructures and its numerical stabilization

島田知明¹⁾ 干場大也²⁾ 奥田裕也³⁾ 西口浩司⁴⁾ 加藤準治⁵⁾
Tomoaki Shimada, Hiroya Hoshiba, Yuya Okuda, Koji Nishiguchi and Junji Kato

¹⁾名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: shimada.tomoaki.a9@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

²⁾名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻 助教 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: hiroyahoshiba@nagoya-u.jp)

³⁾ヤマハ発動機 (株) (〒 438-8501 静岡県磐田市新貝 2500, E-mail: okudayu@yamaha-motor.co.jp)

⁴⁾名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻 准教授 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: kojinishiguchi@civil.nagoya-u.ac.jp)

⁵⁾名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻 教授 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: junjikato@civil.nagoya-u.ac.jp)

The present study addresses a curve-fitting topology optimization to reproduce the desired stress-strain curve for hyperelastic microstructures. Topology optimization considering finite deformations has a problem that numerical instability occurs in finite elements severely deformed, resulting in computational failure. In this study, a numerical stabilization scheme based on the method of Wang et al. (2014) is applied for the problem of micro structure, and the performance of the curve-fitting is examined.

Key Words : Topology optimization, Curve-fitting, Hyperelastic microstructures, Numerical stabilization scheme

1. はじめに

エネルギー吸収ダンパーのように、大きな変形が生じることを前提とする構造部品においては、しばしば構造の幾何学的非線形領域における所望の荷重-変位曲線の経路に追従するような設計が要求される。この設計プロセスはカーブフィッティングと呼ばれる。このような高度な設計を可能にするために、コンピュータを利用した高度な材料設計法が注目されている。特に力学に基づいて材料の最適構造(最適形状)を決定するトポロジー最適化は有効な設計ツールである。トポロジー最適化は、多くの場合、巨視的構造に焦点が当てられてきたが、材料の微細構造の設計にも活用され、材料の性能と機能性を改善することができる。近年、このような材料微細構造を持つ構造体の製造が技術的に可能になってきていることから、微細構造におけるカーブフィッティングのためのトポロジー最適化を行うことは有意義である。しかし、幾何学的非線形性を考慮し、カーブフィッティングを目的としたトポロジー最適化の研究については、スナップスルー現象を利用したステントの設計に関する研究 [1] があるだけで、ほとんど行われていないのが現状である。また、大変形を考慮したトポロジー最適化では、低剛性領域における過大なひずみに由来する数値不安定性がしばしば発生することが知られており、その数値安定化スキームが必要とされる。

このような背景から、本研究では超弾性材料を取り上げ、所望の応力-ひずみ曲線に追従する性能を示す材料微細構造のトポロジー最適化手法を提案する。上述の不

安定な現象を安定化させるために、Wang ら [2] が開発したエネルギー補間スキームを微細構造のトポロジー設計に導入した。本研究では、いくつかの数値シミュレーションを通じて、提案手法の性能を検証する。

2. 数値安定化を導入した大変形有限要素解析

(1) 超弾性体構成式

本研究では、超弾性体構成則として圧縮性 Neo-Hookean モデルを用いる。圧縮性 Neo-Hookean モデルのひずみエネルギー密度関数 ϕ^{NL} は次式で表される。

$$\phi^{\text{NL}} = \frac{\mu}{2}(I_C - 3 - 2\log J) + \frac{\lambda}{2}(J - 1)^2 \quad (1)$$

ただし、

$$I_C = \text{tr} \mathbf{C} \quad (2)$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad (3)$$

である。ここで、 I_C は右 Cauchy-Green 変形テンソル \mathbf{C} の第一不変量、 J はヤコビアン、 \mathbf{F} は変形勾配テンソル、 \mathbf{C} は右 Cauchy-Green 変形テンソルで、 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ と表される。また、 μ および λ はラメ定数と呼ばれる。また、第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} はひずみエネルギー密度関数 ϕ^{NL} を Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} で微分することにより、最終的に次式が得られる。

$$\mathbf{S} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda(J^2 - J)\mathbf{C}^{-1} \quad (4)$$

ただし、 \mathbf{I} は単位テンソルである。

(2) 数値不安定性

有限変形を考慮した密度法に基づくトポロジー最適化では、空隙要素が大きく変形しメッシュが崩壊することで、Newton-Raphson 法が収束しなくなる数値不安定の問題が生じる。この原因は、空隙要素が大きく変形したとき、変形勾配テンソル \mathbf{F} のヤコビアンが負となるためである。このとき、正しい接線剛性が計算できず、Newton-Raphson 法の収束計算において、空隙要素が振動し、解を見つけることができなくなる。

(3) Wang ら [2] の数値安定化手法

空隙要素で生じる数値不安定性を回避するために、Wang らが提案した式 (5) で表されるひずみエネルギー関数 $\phi(\mathbf{u}_e)$ を用いる。この手法は、空隙要素の構成則を線形弾性体置き換えることで安定化をはかるものである。これは、線形弾性体では幾何学的な変形を考慮しないため、数値不安定性が起きないこと、空隙要素は剛性が極めて低いため、これに置き換えても固体要素の変形に対する影響は少ないことを利用している。

$$\phi(\mathbf{u}_e) = \{\phi^{\text{NL}}(\gamma_e \mathbf{u}_e) - \phi^{\text{L}}(\gamma_e \mathbf{u}_e) + \phi^{\text{L}}(\mathbf{u}_e)\} \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{u}_e は要素 e の節点変位ベクトル、 $\phi^{\text{L}}(\cdot)$ は以下に示される線形弾性体のひずみエネルギー密度関数である。

$$\phi^{\text{L}}(\mathbf{u}_e) = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon^2 + \mu \varepsilon \varepsilon \quad (6)$$

また、 γ_e はパラメーターで値が 1 のとき、式 (5) は

$$\phi(\mathbf{u}_e) = \phi^{\text{NL}} \quad (7)$$

となり構成則は超弾性体を表す。 γ_e が 0 のとき

$$\phi(\mathbf{u}_e) = \phi^{\text{L}} \quad (8)$$

となり線形弾性体を表す。従って、パラメータ γ_e の値に 0 または 1 をとることで使用される構成則を区別できる。しかし勾配法に基づく最適化では微分を用いるため、 γ_e は連続でなければならない。そこで次式で表される平滑化ヘビサイド関数を用いて γ_e を連続的に 0-1 に分ける。

$$\gamma_e = \frac{\tanh(\beta \bar{\rho}) + \tanh\{\beta(\rho_e - \bar{\rho})\}}{\tanh(\beta \bar{\rho}) + \tanh\{\beta(1 - \bar{\rho})\}} \quad (9)$$

ここで、 ρ_e は要素の密度、 $\bar{\rho}$ は密度の閾値、 β は閾値における関数の傾きの度合いを表し、この値が大きいほど急勾配となる。

式 (5) の構成則の要素内力ベクトル $\mathbf{F}_e^{\text{int}}(\mathbf{u}_e)$ は最終的に次式のように導出できる。

$$\mathbf{F}_e^{\text{int}}(\mathbf{u}_e) = \gamma_e \mathbf{F}_{\text{int}}^{\text{NL}}(\gamma_e \mathbf{u}_e) + (1 - \gamma_e^2) \mathbf{F}_{\text{int}}^{\text{L}}(\mathbf{u}_e) \quad (10)$$

また、要素接線剛性 $\mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e)$ は最終的に

$$\mathbf{K}_e(\mathbf{u}_e) = \gamma_e^2 \mathbf{K}^{\text{NL}}(\gamma_e \mathbf{u}_e) + (1 - \gamma_e^2) \mathbf{K}^{\text{L}} \quad (11)$$

となる。ただし、 $\mathbf{F}_{\text{int}}^{\text{NL}}(\gamma_e \mathbf{u}_e)$ 、 $\mathbf{K}^{\text{NL}}(\gamma_e \mathbf{u}_e)$ は超弾性体の要素内力および要素接線剛性、 $\mathbf{F}_{\text{int}}^{\text{L}}(\mathbf{u}_e)$ 、 \mathbf{K}^{L} は線形弾性体の要素内力および要素接線剛性である。

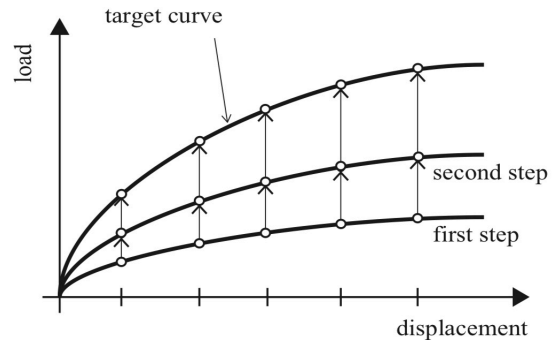


図-1 1 ステップ法の概要

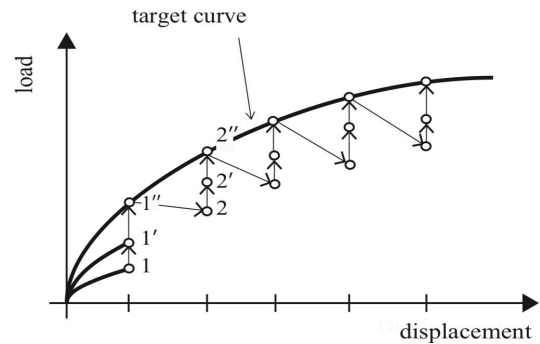


図-2 マルチステップ法の概要

3. カーブフィッティングのアルゴリズム

カーブフィッティングの問題においては、図-1 で示した 1 ステップ法と呼ばれる手法がある。これは一度、最終荷重ステップまで載荷した上で、それぞれの変位点において同時にフィッティングするものである。しかし、線形問題の場合はこの手法で問題ないが、幾何学的非線形問題の場合は節 2.(2) で述べたような数値不安定性問題が生じ易い。

そこで本研究では、Sekimoto ら [5] が提案したマルチステップ法を導入する。図-2 に示すようにマルチステップ法においては、まず最初の荷重ステップのみで最適化を行い、その後は荷重ステップを増やす毎に、最適化を実行することを繰り返す。これにより、最初の荷重ステップで最適化した段階で、変形が生じやすい箇所の要素は密度が概ね 1.0 となって材料剛性が最大値をとり、要素に過度な変形が生じにくい状態となる。すなわち、この手法を用いることで、数値的に弱点となる部分が当初より補強されているために、1 ステップ法に比べて計算の安定性が大きく高まるという利点がある。

4. トポロジー最適化

本研究では勾配基本法に基づくトポロジー最適化を用いる。また、最適化アルゴリズムには数値計画法のひとつである移動漸近法 (Method of Moving Asymptotes: MMA)[3] を用いる。また、ヤング率の補間方法として SIMP 法 (Solid Isotropic Material with Penalization)[4] を用いる。

(1) 最適化問題の定式化

本研究では、超弾性マイクロ構造の応力-ひずみ曲線のフィッティングを対象として、各荷重ステップ n における目的関数 $f^{(n)}$ を次式のように設定する。

$$f^{(n)}(s) = \sum_{p,q=1}^m \omega_{(p,q)} \left\{ \Sigma_{(p,q)}^{(n)*} - \Sigma_{(p,q)}^{(n)} \right\}^2 \quad (12)$$

ここで、 s はマイクロ要素の材料密度を表す設計変数である。 $\Sigma_{(p,q)}^{(n)}$ は n 番目のフィッティング点において数値材料試験で得られる p, q 成分のマクロ応力テンソルであり、 $\Sigma_{(p,q)}^{(n)*}$ はその点におけるマクロ応力テンソルの目標値である。 p, q はそれぞれテンソルの行数と列数を表しており、 $\omega_{(p,q)}$ は行列においてどの成分のマクロ応力を一致させるかを表す行列演算子である。また、制約条件として、以下で表される R に関する釣り合い式と、マイクロ構造に対する体積制約条件 $g(s)$ を用いる。

$$R = F^{\text{int}}(u, \gamma) - F^{\text{ext}} = 0 \quad (13)$$

$$g(s) = \int_Y \rho(s_l) dy - V_0 \leq 0 \quad (14)$$

$$0 \leq s_l \leq 1 \quad (15)$$

ここで、 $\rho(s_l)$ は l 番目のマイクロ要素の設計変数に依存する密度である。

(2) 感度解析

勾配基本法に基づくトポロジー最適化では、目的関数および制約関数の設計変数に対する勾配を用いて最適化を行う。目的関数の勾配は、密度フィルターを用いるため、連鎖律から

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial s_i} = \sum_{j \in \mathbb{E}} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial s_i} \quad (16)$$

と表せられる。ここで、 \mathbb{E} は要素 i にフィルターとして作用する要素の集合である。また、

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial s_i} = \frac{w_{ij}}{\sum_{k \in \mathbb{S}} w_{jk}} \quad (17)$$

となる。ただし、集合 \mathbb{S} は要素 j 周辺のフィルターとして作用する要素、 w_{jk} はそれに対する重みである。次に、 $f^{(n)}$ に対する密度の微分 $\partial f^{(n)} / \partial \rho_j$ に対する感度を、随伴法に基づき求める。最終的な感度は随伴ベクトル λ を用いて表すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \rho_j} &= 2 \sum_{p,q=1}^m \omega_{(p,q)} \left\{ \Sigma_{(p,q)}^{(n)*} - \Sigma_{(p,q)}^{(n)} \right\} \\ &\quad \left\{ -\frac{\partial \Sigma_{(p,q)}^{(n)}}{\partial \rho_j} + \lambda^T \left(\frac{\partial F^{\text{int}}}{\partial \rho_j} + \frac{\partial F^{\text{int}}}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \rho_j} \right) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、それぞれの項は、

$$\frac{\partial F^{\text{int}}}{\partial \rho_j} = A_{\text{elem}=j} \left[\left\{ \gamma_j F_{\text{int}}^{\text{NL}}(\gamma_j u_j) + (1 - \gamma_j^2) F_{\text{int}}^{\text{L}}(u_j) \right\} \frac{E'(\rho_j)}{E(\rho_j)} \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial F^{\text{int}}}{\partial \gamma_j} = A_{\text{elem}=j} \left[\left\{ F_{\text{int}}^{\text{NL}}(\gamma_j u_j) + K^{\text{NL}}(\gamma_j u_j) u_j \gamma_j - 2 \gamma_j F_{\text{int}}^{\text{L}}(u_j) \right\} \right] \quad (20)$$

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial \rho_j} = \frac{\beta \text{sech}^2(\beta(\rho_j - \bar{\rho}))}{\tanh(\beta \bar{\rho}) + \tanh(\beta(1 - \bar{\rho}))} \quad (21)$$

となる。ただし、

$$E'(\rho_j) = \frac{\partial E(\rho_j)}{\partial \rho_j} \quad (22)$$

である。ここで、 $A_{\text{elem}=j}$ は要素 j で計算した値のみ全体系にアセンブルする作用子である。

5. まとめ

本研究では、有限変形解析特有の数値不安定問題を回避するための超弾性マイクロ構造のカーブフィッティングトポロジー最適化を開発した。これらの数値計算例を発表で紹介する。

参考文献

- [1] James, K.A., Smith, C.C., Waisman, H.: Topology Optimization of a Bi-Stable Cardiovascular Stent with Snap-Through Response, *17th AIAA/ISSMO Multi-disciplinary Analysis and Optimization Conference*, AIAA2016-3516, 2016.
- [2] Wang, F., Lazarov, B.S., Sigmund, O., Jensen, J.S.: Interpolation scheme for fictitious domain techniques and topology optimization of finite strain elastic problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 276, pp. 453-472, 2014.
- [3] K, Svanberg.: The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, pp.359-373, 1997.
- [4] Bensøe, M.P.: Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 193-202, 1989.
- [5] T. Sekimoto and H. Noguchi: Homologous Topology Optimization in Large Displacement and Buckling Problems, *JSME International Journal*, Series A, Vol. 44, No.4, 2001.