

流れの特徴量を用いた低次元モデルにおける 準定常流の安定性

Stability of quasi-steady flow in a reduced-order model composed of flow features

中村悠斗¹⁾ 佐藤慎太郎²⁾ 大西直文³⁾

Yuto Nakamura, Shintaro Sato, and Naofumi Ohnishi

¹⁾東北大工学研究科 航空宇宙工学専攻 博士後期課程 1 年

(〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻青葉 6-6-01, E-mail: yuto.nakamura.t4@dc.tohoku.ac.jp)

²⁾東北大工学研究科 航空宇宙工学専攻 助教

³⁾東北大工学研究科 航空宇宙工学専攻 教授

We investigate the stability of limit cycles in a reduced-order model (ROM) based on proper orthogonal decomposition (POD) for flow past a cylinder. Full-order numerical simulations yield a flow past a two-dimensional cylinder with a Reynolds number 100 and a flow past a three-dimensional cylinder with a Reynolds number 200. ROMs representing flow fields with Reynolds numbers 100 and 200 are constructed using the POD mode obtained by the flow fields obtained by the numerical simulation. The ROM for a cylindrical flow with a Reynolds number 100 indicated that the limit cycles formed by the top two POD modes become stable when more than four POD modes are used for the ROM. For cylindrical flows with a Reynolds number 200, six or more POD modes are required to form a stable limit cycle. Based on these investigations, it is suggested that the stronger the nonlinearity of the flow field, the greater the number of POD modes required to stabilize the limit cycle.

Key Words : Reduced-Order Model, Proper Orthogonal Decomposition, Periodic Flow

1. 諸言

自動車や航空機など工学における開発や研究において、数値流体力学は重要な役割を担っている。近年、数値計算技術の発達により、複雑な流れ場も数値的に求めることができてきている。しかし、実用的な流れ場を数値的に安定に計算するためには、現在においても膨大な計算資源が必要になることが多い。研究開発の場では、膨大な計算資源を費やして高忠実な結果を求める必要があることもあるが、大まかな流れ場を瞬時に求めたい場合もある。後者の場合、支配方程式を数値的に離散化して解く従来の数値計算モデルに代わり、大幅に次数の少ないモデルを解く低次元化モデル (Reduced-Order Model : ROM) [1] が有効である。

ROM はこれまでにさまざまなモデルが提案されている。固有直交分解 (Proper Orthogonal Decomposition : POD) [2][3] によって得られる POD モードを用いた ROM は、古くから研究されているモデルの 1 つである [4]。POD は流れ場のデータが与えられた際にデータの特徴を最もよく表現するモードを抽出する手法で、主成分分析 (PCA : Principal Component Analysis) [5] などの名称でも有名である。POD を流れ場の計算結果に適用し、抽出した POD モードの線形結合により流れ場を再構築することができる。再構築には、各モードに対応する結合係数を求める必要があり、この予測には Galerkin projection と呼ばれる手法がある [6]。

Galerkin projection は、流れ場の支配方程式である Navier-Stokes 方程式を POD モードによって張られる低次元の空間に射影する方法である。射影された方程

式は元の方程式に比べて大幅に少ない計算量で解くことができ、高速に流れ場を予測することができる。しかし、射影された支配方程式から得られる解は、POD モードによって張られる空間に制限されるため、低次元空間に用いるモードの数とその選び方によっては物理現象から大幅に逸脱した解が得られることがある。Deane ら [7] は、レイノルズ数 200 の円柱周り流れの二次元計算で得られる周期的なリミットサイクルを ROM で安定に計算するためには、6 つ以上の POD モードが必要であることを示した。しかし、彼らの検証は特定のレイノルズ数に限られており、他のレイノルズ数での検証は行われていない。本研究では、円柱周り流れを対象にいくつかのレイノルズ数で ROM を構築する。各 ROM において、安定なリミットサイクルを形成するために必要な POD モードの数を調査し、広い範囲のレイノルズ数において ROM を安定に計算することを目指す。

2. POD による ROM

(1) POD

POD の主な目的は流れ場の速度の時系列データ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) $\in \mathbb{R}^n$ が与えられた場合に、速度の変動成分を最もよく表現する基底 $\varphi_k(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ ($k = 1, 2, \dots, r, r \ll m$) を見つけることである。すなわち、流れ場の時系列データは平均場 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ と r 個の POD 基底

$\varphi_k(\mathbf{x})$ によって以下のように表せる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_j) \simeq \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r a_k(t_j) \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (1)$$

基底には対応する固有値 λ_k が存在し、固有値の大きさはその基底が流れ場の特徴をどれだけ捉えているかを表している。POD 基底で流れ場を再構築する場合、基底の数 r を設定し、固有値が大きい上位 r 個の基底を用いる。

(2) Galerkin projection

本研究では支配方程式を基底空間に射影して解く Galerkin projection[6] において、低次元空間における流れ場の安定性を調査する。式(1)のように速度場が表されると、非圧縮 Navier-Stokes 方程式は以下のように書き換えられる。

$$\frac{da_k}{dt} \varphi_k = -a_i a_j \nabla \cdot \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{\rho} \nabla p + a_i \nu \nabla^2 \varphi_i. \quad (2)$$

ここで ν は動粘性係数、 ρ は密度、 p は流体の圧力を表す。基底 φ_k との内積をとると POD 基底の正規直交性により

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= -a_i a_j \langle \nabla \cdot \varphi_i \varphi_j, \varphi_k \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \nabla p, \varphi_k \rangle + a_i \nu \langle \nabla^2 \varphi_i, \varphi_k \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

となる。右辺第二項の圧力項は十分に広い境界を持つ物体周り流れでは無視できる。詳細は文献[8]などを参照されたい。

したがって、支配方程式は以下のように係数 a_k の常微分方程式で記述される。

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_i a_j F_{ijk} + \sum_{i=1}^r a_i G_{ik}, \\ F_{ijk} &= \langle \nabla \cdot \varphi_i \varphi_j, \varphi_k \rangle, \\ G_{ik} &= \nu \langle \nabla^2 \varphi_i, \varphi_k \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

本研究では、 G_{ik} を Crank-Nicolson 法、その他の項を 2 次精度の Adams-Basforth 法によって時間積分し、係数の時間発展を予測する。係数の初期条件を流れ場から与える場合、以下のように流れ場を基底に射影して初期の係数を計算する。

$$a_j(0) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \varphi_j(\mathbf{x}) \rangle. \quad (5)$$

3. CFD による円柱周り流れの計算結果

(1) 数値計算法

支配方程式は非圧縮を仮定し、Le と Moin によって提案された Fractional Step 法[9]を一般座標系に拡張して数値計算を行った。時間積分は移流項に 3 段の Runge-Kutta 法、粘性項に Crank-Nicolson 法を用いた。また、物理変数をコロケート配置し、空間の微分は Leonard の QUICK 法[10]によって評価した。圧力方程式は Runge-Kutta 法における最終段でのみ解き、解法には BiCGSTAB 法を用いた。数値計算に用いた計算格子を図-1 に示す。円柱直径を D としたとき、計算格子の最小格子幅は $\Delta x = 10^{-3}D$ である。

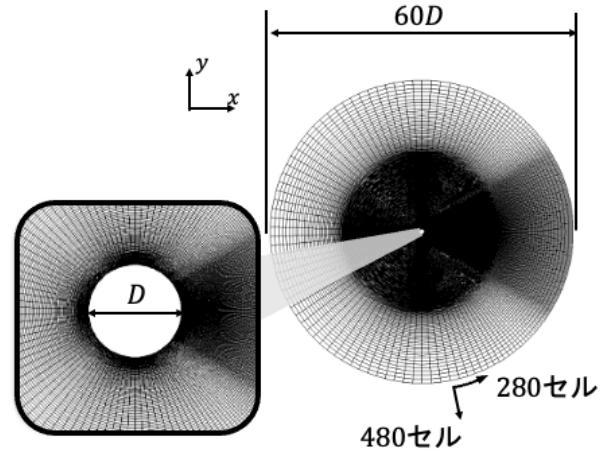


図-1 本研究における計算格子。

(2) レイノルズ数 100 の円柱周り流れ

ROM の検証に用いるレイノルズ数 100 の円柱周り流れの数値計算を行った。二次元の計算格子で十分長い時間計算し、準定常に達した流れ場を取得した。準定常に達した流れ場を図-2 に示す。レイノルズ数 100 の流れにおいては物体後方で周期的な渦が放出されることがわかる。

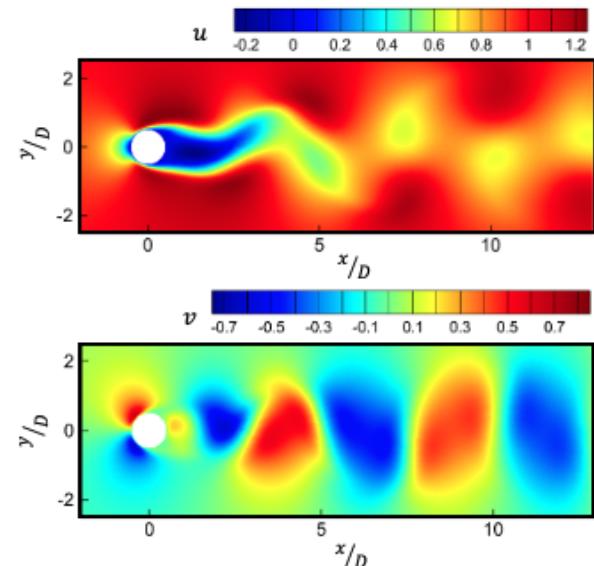


図-2 レイノルズ数 100 の円柱周り流れにおける x 方向速度 u と y 方向速度 v 。

準定常に達した流れ場を無次元時間で 1000 の間計算し、流れ場の時系列データを取得した。取得した流れ場の全ての格子点の時系列データに FFT を行い、得られた各格子点の周波数スペクトルの和をとり、場全体の周波数スペクトルを取得した。得られた周波数スペクトルを図-3 に示す。二次元の円柱周り流れでは、渦放出の周波数は 0.2 前後となることが知られており、レイノルズ数 100 では、0.164 で最大の値となった。また、この周波数を基準に 2 倍、3 倍の周波数でスペクトルがピークをとることがわかる。

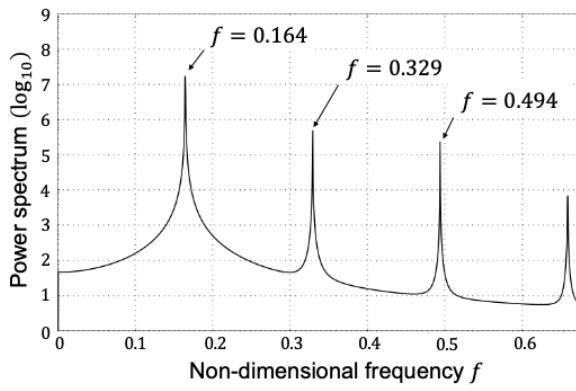


図-3 レイノルズ数 100 の円柱周り流れにおける周波数スペクトル.

4. レイノルズ数 100 での検証

(1) POD モードとリミットサイクル

数値計算によって取得したレイノルズ数 100 の円柱周り流れに POD を行なってモードを取得した. 得られた POD モードと平均場を図-4 に示す. POD モードは円柱後流で発生するカルマン渦列の空間構造を反映しており, 1st モードと 2nd モード, 3rd モードと 4th モード, 5th モードと 6th モードのように対となるモードが存在している. また, モードのランクが下がるとともに渦の空間スケールが小さくなっていることがわかる.

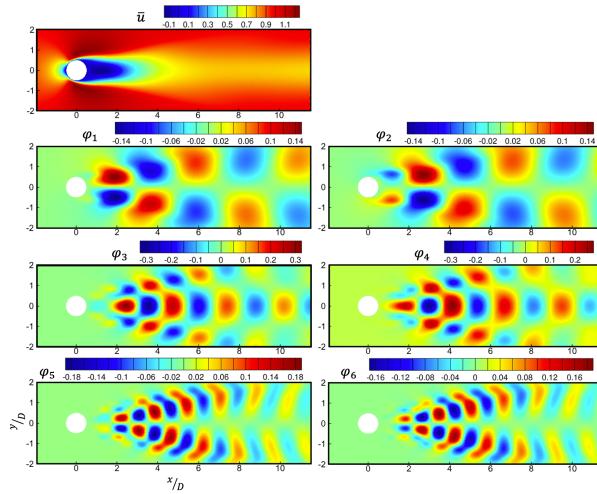


図-4 レイノルズ数 100 の円柱周り流れにおける主流方向速度の平均場と POD モードの主流方向成分.

POD モードによって張られる低次元空間に, 数値計算で得られた流れ場の時系列データを射影し, POD モードの係数の時系列データを取得した. 準定常な流れ場における各 POD モードに対応する係数の時間発展を図-5 に示す. POD モードの係数は, 周期的に振動していることがわかる. ランクの低い POD モードほど高い周波数で振動しており, それらの値は流れ場のピーク周波数に対応している. また, 1st モードと 2nd モードのように対応するモードの係数を見ると位相が 90 度ずれて

おり, 余弦波と正弦波のような関係になっていることがわかる.

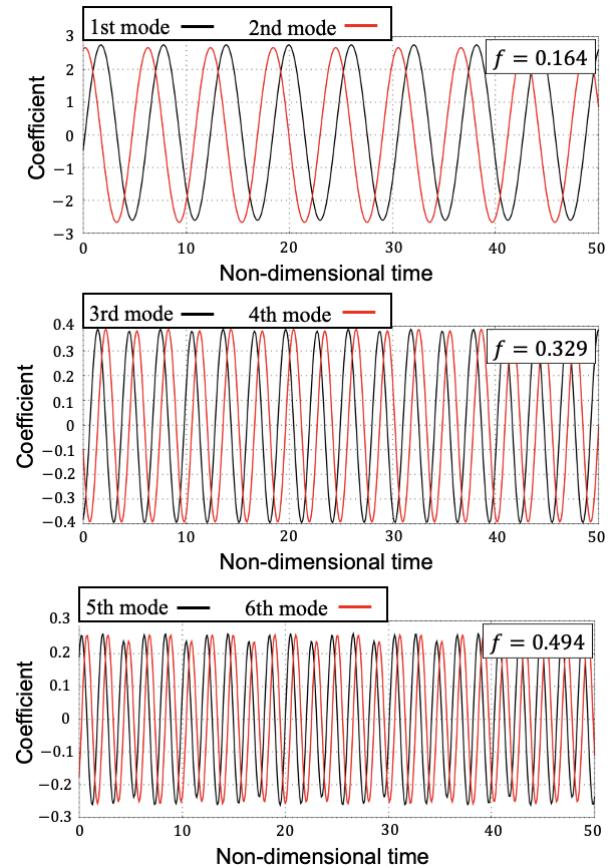


図-5 レイノルズ数 100 の円柱周り流れにおける POD モードの係数の時間発展.

図-6 に, 横軸を 1st モードの係数, 縦軸を 2nd モードの係数として POD モードの係数の時系列データをプロットしたものを示す. 対になるモードの係数では, リミットサイクルを形成し, その半径は一定に保たれている. このように常に一定の半径を保ちつづける場合, そのリミットサイクルは安定であるという. リミットサイクルの安定性を調べる場合, Poincare 写像が有効である. Poincare 写像はリミットサイクルにある断面をとり, その断面を通過した際の座標を調べる. これにより, 元のリミットサイクルに比べて小さい次元でリミットサイクルを表現できる. リミットサイクルが安定な場合, 断面の通過位置は常に一定となる. 本研究では y 軸が 0 かつ x 軸が正である面を Poincare 写像の断面に使用する.

(2) レイノルズ数 100 の ROM におけるリミットサイクルの安定性

ROM において POD モードの数を変え, Galerkin projection から得られる方程式によって係数を時間発展させ, リミットサイクルの安定性を調査する. モードの数を 2, 4, 6, 10, 30 とし, リミットサイクル上の一点から計算をはじめた時, 断面を通過した回数とその時の x 座標を図-7 に示す. モードの数が 2 の時, 断面を通過

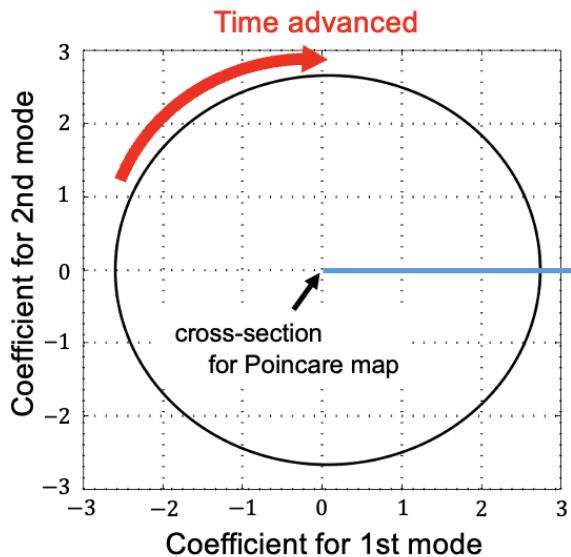


図-6 1st モードと 2nd モードの係数によって形成されるリミットサイクル。

するごとに数値計算でのリミットサイクルの位置より大きくなっている、数値計算でのリミットサイクルの位置付近では一定の値に収束していない。モードの数が 4 以上の時、数値計算でのリミットサイクルの位置とは異なるものの、一定の位置に収束している。すなわち、モードの数が 4 以上の時、ROM においても安定なリミットサイクルを形成することがわかる。この数は Deane ら [7] のレイノルズ数 200 の二次元の円柱周り流れにおける結果より小さい。この差はレイノルズ数の違いによるものと考えられる。また、モードの数を増やしても、数値計算で得られるリミットサイクルの半径を保つことができない。これは、Galerkin projection において圧力項の影響を無視していることや、離散化によって発生する誤差などが原因として考えられる。

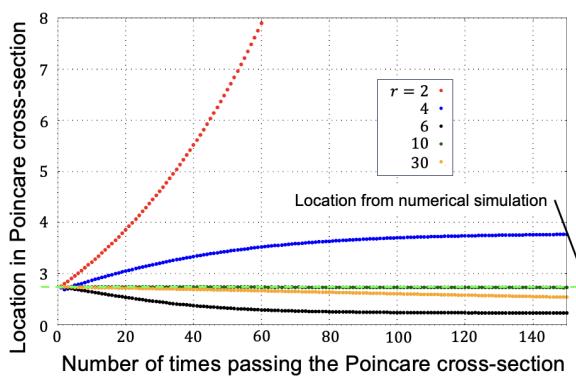


図-7 レイノルズ数 100 の円柱周り流れの ROM において Poincare 断面を通過した際の x 座標と通過回数。

5. レイノルズ数 200 での検証

レイノルズ数 200 の円柱周り流れでは、スパン方向に不均一な渦が円柱後流で生成され、三次元の流れ場を形成することが知られている。このような流れ場を

ROM で計算する場合のリミットサイクルの安定性を調べる。まず、POD モードを得るために、数値計算によってレイノルズ数 200 の流れ場を取得した。三次元の計算格子は二次元の計算格子をスパン方向に 120 セル生成し、円柱直径の 12 倍の領域となるように格子幅を設定した。スパン方向の境界条件には周期条件を課した。得られた流れ場を図-8 に示す。レイノルズ数 100 の流れ場と同様に、物体後方にカルマン渦列が生成されるが、スパン方向に不均一な構造を持っている。スパン方向には 3 つの周期的な構造が形成されており、波長の大きさは円柱直径の 4 倍となっている。

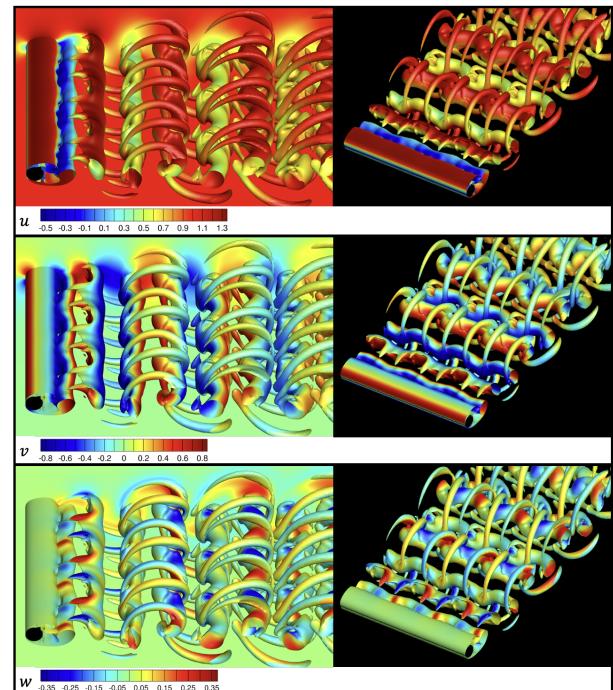


図-8 レイノルズ数 200 の円柱周り流れ。速度勾配テンソルの第二不変量の等値面を各方向の速度で色付けしている。

レイノルズ数 200 の円柱周り流れの時系列データに POD を行い、POD モードを取得した。得られた POD モードを図-9 に示す。レイノルズ数 100 の時と同様にモードは対になるモードを持っており、それらのモード同士でリミットサイクルを形成すると考えられる。

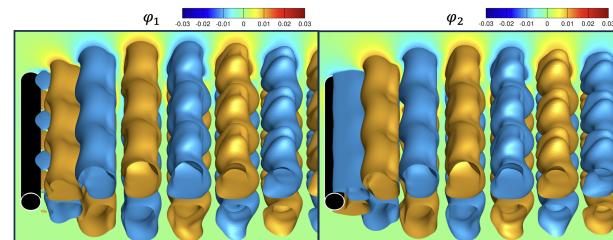


図-9 レイノルズ数 200 の円柱周り流れにおける POD モードの主流方向成分。等値面は主流方向成分の ± 0.01 を表す。

(1) レイノルズ数 200 の ROM におけるリミットサイクルの安定性

レイノルズ数 200 の ROM において POD モードの数を変え、Galerkin projection から得られる方程式によって係数を時間発展させ、リミットサイクルの安定性を調査する。モードの数を 2, 4, 6, 10, 30 とし、リミットサイクル上的一点から計算を始めた時、断面を通過した回数とその時の x 座標を図-10 に示す。モードの数が 2, 4 の時、断面を通過するごとに数値計算でのリミットサイクルの位置より大きくなっているが、一定のリミットサイクルに収束することがなかった。モードの数が 6 以上の時、数値計算でのリミットサイクルの位置とは異なるものの、一定の位置に収束している。すなわち、モードの数が 6 以上の時、ROM においても安定なリミットサイクルを形成することがわかる。Deane ら [7] はレイノルズ数 200 の二次元流れにおいてモードの数が 6 の時、安定なリミットサイクルを形成することを示している。本研究の結果は三次元流れにおいても同様のモード数でリミットサイクルが安定となることを示している。また、レイノルズ数 100 の時と比べて安定となるのに多くの POD モードが必要である。このことからレイノルズ数が上がり、非線形性が強くなるほど、より多くのモード数が必要になると考えられる。

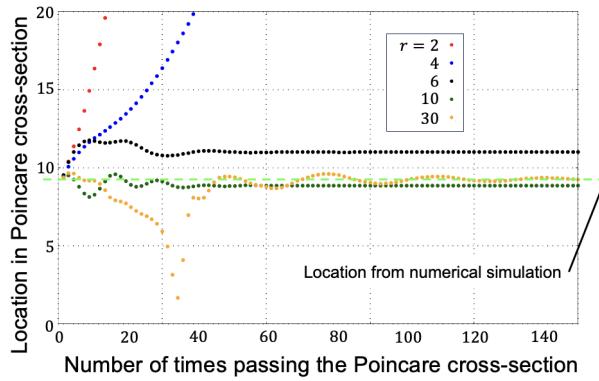


図-10 レイノルズ数 200 の円柱周り流れの ROM において Poincare 断面を通過した際の x 座標と通過回数。

6. 結言

本研究では、POD を利用した ROM において、POD モードの個数が流れ場の安定性に与える影響を調査した。レイノルズ数 100 と 200 の円柱周り流れを対象に 2 つの主要な POD モードで形成されるリミットサイクルを Poincare 写像を用いて解析した。レイノルズ数 100 の時、POD モードを 4 つ以上用いると一定のリミットサイクルに収束することがわかった。モードの数を増加させても、従来の数値計算で得られるリミットサイクルと完全に一致することはなく、ROM において POD における次数削減の影響とは異なる要因の誤差が存在することがわかった。また、レイノルズ数 200 の三次元流れでは、POD モードを 6 つ用いることで一定のリミットサイクルに収束し、レイノルズ数 100 に比べて多くのモードを必要とすることがわかった。今後、より高いレイノルズ数で同様の検証を行い、レイノルズ

数とリミットサイクル安定化に必要なモード数の関係をより詳細に調査する予定である。

謝辞: 本研究の数値計算は、東北大学流体科学研究所未来流体情報創造センターの次世代融合研究システム (AFI-NITY) を用いて行った。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114 の支援を受けたものである。本研究は、日本科学協会の笹川科学研助成による助成を受けて実施された。

参考文献

- [1] D. J. Lucia, P. S. Beran, W. A. Silva, Reduced-order modeling: new approaches for computational physics, *Prog. Aerosp. Sci.* 40 (2004) 51–117.
- [2] J. L. Lumley, The structure of inhomogeneous turbulent flows, In *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, eds. A. M. Yaglom and V. I. Tatarski, Nauka (1967) 166–178.
- [3] K. Taira, S. L. Brunton, S. T. M. Dawson, C. W. Rowley, T. Colonius, B. J. McKeon, O. T. Schmidt, S. Gordeyev, V. Theofilis, L. S. Ukeiley, Modal analysis of fluid flows: An overview, *AIAA J.* 55 (2017) 4013.
- [4] K. Lu, Y. Jin, Y. Chen, Y. Yang, L. Hou, Z. Zhang, Z. Li, C. Fu, Review for order reduction based on proper orthogonal decomposition and outlooks of applications in mechanical systems, *Mech. Syst. Signal Process.* 123 (2019) 264–297.
- [5] H. Hotelling, Analysis of a complex of statistical variables into principal components, *J. Educ. Psychol.* 24 (1933) 417–441.
- [6] K. Kunisch, S. Volkwein, Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems, *Numerische Mathematik* 90 (2001) 117–148.
- [7] A. E. Deane, I. G. Kevrekidis, G. E. Karniadakis, S. A. Orszag, Low-dimensional models for complex geometry flows: Application to grooved channels and circular cylinders, *Phys. Fluids* 3 (1991) 2337.
- [8] B. R. Noack, P. Papas, P. Monkewitz, The need for pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows, *J. Fluid Mech.* 523 (2005) 339–365.
- [9] H. Le, P. Moin, An improvement of Fractional step methods for the incompressible Navier–Stokes equations, *J. Comp. Phys.* 92 (1991) 369–379.
- [10] B. P. Leonard, A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 19 (1979) 59–98.
- [11] H. Jiang, L. Cheng, S. Draper, H. An, F. Tong, Three-dimensional direct numerical simulation of wake transitions of a circular cylinder, *J. Fluid Mech.* 801 (2016) 353–391.