

グラフ構造に基づく B-spline 重合メッシュ法の 領域分割型並列流体解析

Graph Based Domain Decomposition Parallel Fluid Analysis
Using B-spline S-Version of Finite Element Method

馬込望¹⁾ 森田直樹²⁾ 金子栄樹³⁾ 三目直登⁴⁾

Nozomi Magome, Naoki Morita, Shigeki Kaneko and Naoto Mitsume

¹⁾筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail:
magome.nozomi.sw@alumni.tsukuba.ac.jp)

²⁾博(環境) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: nmorita@kz.tsukuba.ac.jp)

³⁾博(工) 名古屋工業大学大学院工学研究科 助教 (〒 466-0061 愛知県名古屋市昭和区御器所町, E-mail:
kaneko.shigeki@nitech.ac.jp)

⁴⁾博(工) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

We aim to analyze a flapping-wing motion of a free-flight insect and have developed a new framework of s-version of finite element method (SFEM) called B-spline SFEM (BSFEM), which achieves both localized high accuracy and low computational cost. To analyze a large-scale problem such as a flapping free flight, distributed memory parallel computers are often used. In this study, we achieve parallel computing using BSFEM based on the graph structure representing the interactions between computational nodes. To evaluate its parallel performance, strong scaling tests are performed on a 3D incompressible viscous fluid solver.

Key Words : S-version of finite element method, Mesh superposition method, B-spline basis functions, Parallel computing, Fluid analysis

1. 序論

昆虫の羽ばたき自由飛行は、その飛行性能の高さからメカニズム解明およびそれを応用した高効率な微小飛行ロボット実現に向け注目を集めている。一方で、羽ばたき自由飛行の数値解析のためには、昆虫周囲の局所的な流体構造連成解析と、昆虫の大域的な自由飛行解析というスケールギャップの大きい二者を両立すること、局所高解像領域を昆虫に合わせて移動させることなどが必要であり、その解析手法は未だ確立されていない。この問題の解決のため、著者らは重合メッシュ法 (s-version of finite element method: SFEM)[1] に着目した。重合メッシュ法は、有限要素法の枠組みにおいて解像度の異なる複数のメッシュを任意に重ねることで局所高解像と低計算コスト、メッシングの簡便さを両立する手法であり、これまで積層複合材料の応力解析[2]~[5] や亀裂解析[6]~[9] など多様な構造力学問題に応用してきた。一方で、従来の重合メッシュ法は、数値積分精度[1,6,7] と行列計算における収束性[1,3,8,10] に課題があった。これら課題の根本的な解決のため、これまで著者らは B-spline 基底関数と Lagrange 基底関数の両方を導入した B-spline 重合メッシュ法を提案し、高精度化および収束性の大幅な向上を達成してきた。詳細については文献[11,12]を参照されたい。

重合メッシュ法は局所高解像と低計算コストを両立可能な手法であるが、羽ばたき自由飛行などの 3 次元複雑現象解析では重合メッシュ法を用いてもなお計算が大規模化し、計算時間の増大や計算機のメモリ容量

の制約が解析の障壁となる。このような問題に対する有効な解決方法として、message passing interface (MPI) および分散メモリ型並列計算機を利用した並列計算が挙げられる。重合メッシュ法の数理的基盤である有限要素法においては、多くの場合、領域分割型並列計算が実施してきた。領域分割法とは、解析対象を複数の領域に分割し、領域ごとに並列して計算を行う手法である。事前に解析データを分割し、各プロセッサで異なるデータを保持して計算するため分散メモリ型並列計算機に適している。重合メッシュ法に関しては、共有メモリ型並列化は実施してきた[13]ものの、分散メモリ型並列計算機を利用した領域分割型並列計算を実施し、さらに並列性能までも議論した研究は非常に少なく、それらの並列化手法もメッシュ毎にプロセッサに割り当てるなどのアドホックなものであったり[14]、Lagrange 基底関数以外への適用性に欠けている[15]などの課題があった。筆者らは、重合メッシュ法の領域分割型並列化の障壁の一つを以下のように考察した。古典的な有限要素法では 1 枚のメッシュを用いて解析対象を離散化するが、重合メッシュ法では複数のメッシュを重ねて離散化する。ゆえに、古典的な有限要素法では、同一メッシュ上の節点同士の情報の受け渡しを考慮するのみで十分であるが、重合メッシュ法では、異なるメッシュ上の節点同士の情報の受け渡しをも考慮する必要がある。すなわち、重合メッシュ法では、いずれの節点間で情報の受け渡しが生じるかが非常に複雑になる。この問題を、本論文中ではメッシュ構造の複

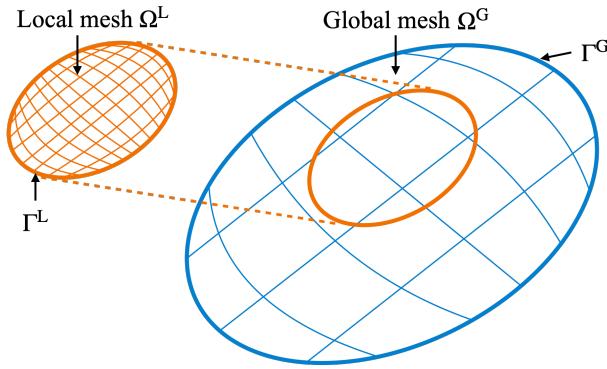


Fig.1 Global and local meshes defined in SFEM.

雑さと呼ぶ。

本研究では、このようなメッシュ構造の複雑さによる並列アルゴリズムの複雑化を回避し、任意のメッシュ上の節点同士の情報の受け渡しを統一的に取り扱うことを目的に、重合メッシュ法のメッシュ構造をグラフと呼ばれる数理的なデータ構造に一般化する。構築されたグラフに対して事前のデータ分割や線形代数演算を実施し、領域分割型並列計算を達成する。本手法は、メッシュ構造をグラフへと一般化して取り扱うことにより、メッシュ構造の複雑さによる困難を回避し、さらに任意の基底関数を用いた有限要素法への適用を可能とする汎用性をも獲得する。また、このような汎用的なフレームワークの実現はプログラムの保守性も向上させる。本論文では、3次元非圧縮性粘性流体解析において、提案する並列計算手法を B-spline 重合メッシュ法ソルバーに適用し、ストロングスケーリングテストによってその並列性能を評価する。

2. B-spline 重合メッシュ法

本章では、重合メッシュ法について概説した後、筆者が過去研究において提案してきた B-spline 重合メッシュ法について述べる。B-spline 重合メッシュ法の詳細については、文献 [11,12] を参照されたい。

重合メッシュ法は、Fig.1 のように解像度の異なる複数のメッシュを重ねて対象を離散化する手法である。本論文では 2 枚のメッシュを用いて離散化する。解析対象領域 Ω に対し、領域全体（グローバル領域 Ω^G ）を粗く離散化するメッシュをグローバルメッシュ、局所領域（ローカル領域 Ω^L ）を精緻に離散化するメッシュをローカルメッシュと呼ぶ。重合メッシュ法において、物理空間上の関数解 $u(\mathbf{x})$ は式 (1) で表される。

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^G(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega^G \setminus \Omega^L \\ u^G(\mathbf{x}) + u^L(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega^L \end{cases} \quad (1)$$

$$u^G(\mathbf{x}) \simeq \sum_i N_i^G(\mathbf{x}) u_i^G, \quad u^L(\mathbf{x}) \simeq \sum_j N_j^L(\mathbf{x}) u_j^L$$

$u^G(\mathbf{x})$ および $u^L(\mathbf{x})$ はそれぞれグローバルメッシュ、ローカルメッシュにおける関数解であり、グローバルメッシュとローカルメッシュが重なるローカル領域 Ω^L での解は、グローバルメッシュにおける関数解と、ローカル

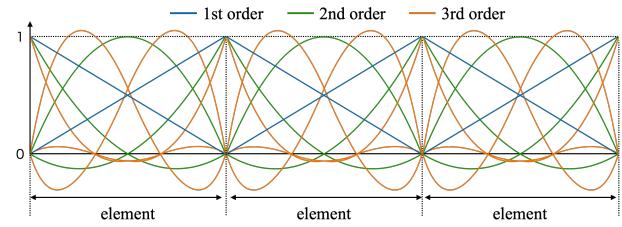


Fig.2 Linear, quadratic, and cubic Lagrange basis functions.

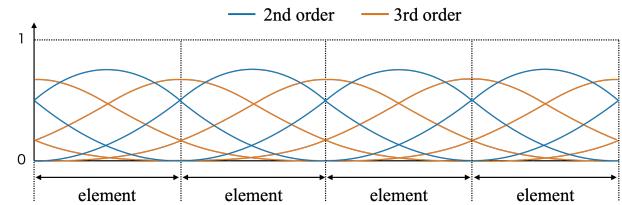


Fig.3 Quadratic and cubic B-spline basis functions for uniform knot vectors.

メッシュにおける関数解の和で表現される。また、各メッシュの関数解はそれぞれ有限要素基底関数により離散化され、各メッシュの基底関数はそれぞれ独立に定義される。グローバル領域 Ω^G の境界 Γ^G には、解析領域 Ω に課される境界条件と同一の境界条件を課す。また、ローカル領域 Ω^L の境界 Γ^L に対しては Γ^L 上での関数解 $u(\mathbf{x})$ の連続性を保証するため、式 (2) で表される Dirichlet 境界条件を課す。

$$u^L(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } \Gamma^L \quad (2)$$

対象とする支配方程式が線形である場合、式 (1), (2) を、支配方程式の重み付き残差方程式に代入することで、解くべき連立一次方程式 (3) が導出される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{GG} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^G \\ \mathbf{u}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{bmatrix} \quad (3)$$

式 (3)において、上付き文字 G, L はそれぞれグローバルメッシュ、ローカルメッシュに関連することを示す。行列 $\mathbf{K}^{GG}, \mathbf{K}^{LL}$ はそれぞれグローバルメッシュおよびローカルメッシュで定義される従来の有限要素法の係数行列と同一である。一方、行列 $\mathbf{K}^{GL}, \mathbf{K}^{LG}$ は 2 つのメッシュの相互作用を表し、被積分関数には $N^G(\mathbf{x})$ と $N^L(\mathbf{x})$ の両方が含まれる。

筆者らが過去研究 [11,12] において提案してきた B-spline 重合メッシュ法では、グローバルメッシュに B-spline 基底関数を適用し、ローカルメッシュに Lagrange 基底関数を適用する。以下では、Lagrange 基底関数および B-spline 基底関数について概説する。

まず、Lagrange 基底関数を概説する。Fig.2 に 1 次、2 次、3 次の Lagrange 基底関数の一例を示している。1 次元の正規要素 $\tilde{\Omega}^e$ における Lagrange 補間関数は式 (4) で与えられる。

$$l_i^p(\tilde{\xi}) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j}{\tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_j} \quad (4)$$

ここで, $i = 1, 2, \dots, p + 1$ は要素内基底番号, p は関数の次数, $\hat{\xi}$ は正規要素座標, $\hat{\xi}_i$ は節点 i の正規要素座標である. また, 要素内の節点数は $p + 1$ 個であり, 正規要素 $\hat{\Omega}^e$ の区間が $[-1, 1]$ で定義されることから $-1 = \hat{\xi}_1 \leq \hat{\xi}_2 \dots \leq \hat{\xi}_{p+1} = 1$ となる. p 次の Lagrange 基底関数は, p 次の Lagrange 補間関数 l_i^p から構成される.

次に, B-spline 基底関数について説明する. Fig.3 に, ノット幅が一様なノットベクトルで定義される 2 次および 3 次の B-spline 基底関数を示している. B-spline 基底関数はノットベクトルによって定義される. 1 次元のノットベクトル Ξ は式(5)で表されるように, パラメータ空間における座標の非減少な集合である.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_k}\} \quad (5)$$

このとき, $\xi_i \in \mathbb{R}$ は i 番目のノット, n_k はノットベクトル中のノットの数であり $n_k = n_c + p + 1$ と表される. p は B-spline 基底関数の次数, n_c は B-spline 基底関数の数である. 与えられたノットベクトルに対して, B-spline 基底関数は 0 次の区分定数で始まる漸化式として定義される. 区分定数の関数の定義を式(6)に示す.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6)$$

次数 $p = 1, 2, 3, \dots$ において, パラメトリック区間 $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ で定義される p 次 B-spline 基底関数 $N_{i,p}(\xi)$ は, Cox-de Boor の漸化式(7)で表される.

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

B-spline 基底関数の一階微分値は式(8)で与えられる.

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (8)$$

要素は相異なるノットの区間として定義される. B-spline 基底関数を用いる有限要素法も, 古典的な有限要素法と同様にアイソパラメトリック構造が適用可能であり, 幾何形状も未知数同様に B-spline 基底関数の線形結合で表現される. 幾何形状を離散化した結果得られる計算点はコントロールポイントと呼ばれるが, 多くの場合コントロールポイントは幾何形状の表面には存在しない. そこで本研究では, コントロールポイント座標を求めるために, Otoguro et al. [16] のメッシュ生成手法を採用した. また, 本研究ではオープンノットベクトルを採用しており, B-spline 基底関数は区間の両端で補間特性を満たす. 一方で, B-spline 基底関数は内部のノットでは補間特性を満たさないため, 本研究では Dirichlet 境界に属するコントロールポイント値を定数として, Dirichlet 境界条件を課す. 一般に, p 次 B-spline 基底関数は, 内部ノット ξ_i で定義される要素境界で $p - m_i$ 次の連続性を持つ. m_i はノット ξ_i におけるノットの多重度である.

本研究では, すべての内部要素境界において C^{p-1} 連続となるよう, 全ての内部ノットにおいて多重度を 1 とする. なお, いずれの基底関数においても, 多次元パラメトリック基底関数は, 1 次元パラメトリック基底関数のテンソル積として定義される.

3. グラフ構造に基づく B-spline 重合メッシュ法の領域分割型並列化

本章ではメッシュ構造のグラフへの一般化およびその領域分割と, グラフに基づく線形代数演算について示す. グラフとは, ノード集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ とノードを結ぶエッジ集合 $E = \{e_{i,j} \mid v_i, v_j \in V\}$ を用いて, グラフ $G = (V, E)$ と表される. ここで, m はノード数, エッジ $e_{i,j}$ はノード v_i とノード v_j を結ぶ辺である. グラフ G に 2 つのノード v_i, v_j を結ぶエッジ $e_{i,j}$ が存在するとき, ノード v_i と v_j は隣接している (adjacent) という. すなわちグラフは, いくつかの対象物とその間の関係性を示す抽象的なデータ構造である. また, グラフは行列によって表現することができ, グラフ G に対しノード v_i と v_j を結ぶエッジの本数を ij 要素とする $m \times m$ 行列を隣接行列と呼ぶ. 隣接行列の非零構造について, ノード v_i, v_j が隣接しているとき隣接行列の ij 要素は非零の値を持ち, 逆に v_i, v_j が隣接していないとき ij 要素は零である. なお, 本論文中で定義されるグラフは全て向きのない無向グラフとする.

本研究では, 有限要素メッシュに対し, 節点同士の隣接関係を表す節点グラフと, 要素と節点間の隣接関係を表す要素コネクティビティグラフの 2 つのグラフを考慮する. 詳細については文献 [17] を参照されたい.

(1) 節点グラフの定義

以下では, 有限要素法の枠組みにおけるメッシュ構造からグラフへの変換について述べる.

1 次元空間における節点グラフ構築の模式図を Fig.4 に示す. まず, 有限要素メッシュ上の節点をグラフのノードとみなす. メッシュ上の節点 v_i に対応する基底関数を $N_i(\mathbf{x})$ とすると, 2 つの基底関数の積 $N_i(\mathbf{x})N_j(\mathbf{x})$ が非零の値を取る点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ が存在する場合, すなわち

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}, N_i(\mathbf{x})N_j(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (9)$$

が成り立つ場合, これら 2 つの基底関数に対応する 2 節点 v_i, v_j はエッジ $e_{i,j}$ で結ばれているとする. 言い換えると, 2 つの基底関数 $N_i(\mathbf{x}), N_j(\mathbf{x})$ が非零の値を持つ領域が一部でも重複している場合, 2 節点 v_i, v_j を結ぶエッジ $e_{i,j}$ が存在すると考える. 本論では, 上記の定義に基づき構築されるグラフを節点グラフと呼び, $G^{\text{node}} = (V, E)$ と表す. なお V は全てのメッシュを含む全節点の集合とし, E はノード集合 V を結びつける全エッジ集合とする. 節点グラフ G^{node} を隣接行列で表現した場合, 2 節点 v_i, v_j を結ぶエッジ $e_{i,j}$ が存在するならば, 節点グラフ G^{node} の隣接行列の ij 要素は非零の値が入る.

一方, 有限要素離散化の結果得られる連立一次方程式の係数行列を考えると, 係数行列の ij 要素が非零となりうるのは, 基底関数 $N_i(\mathbf{x}), N_j(\mathbf{x})$ もしくはその一階微分値 $\nabla N_i(\mathbf{x}), \nabla N_j(\mathbf{x})$ からなる被積分関数の領域積

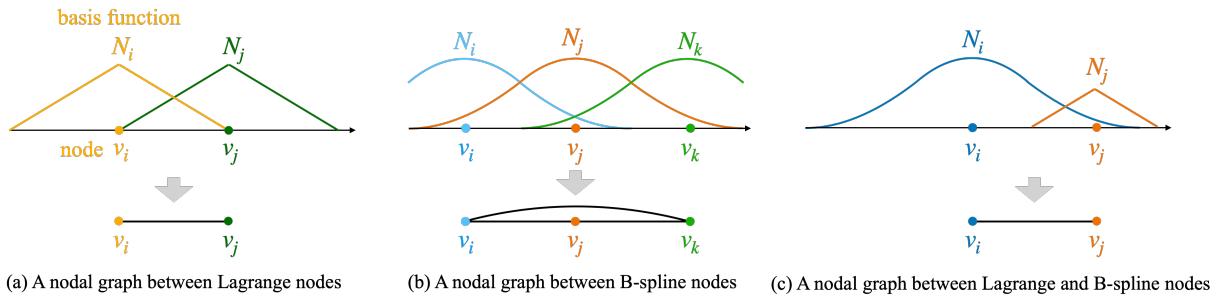


Fig.4 Schematic view of nodal graphs.

分が非零の場合のみである。ゆえに、ある有限要素メッシュに対し上記の定義により構築される節点グラフの隣接行列の非零構造と、同一のメッシュにより支配方程式を離散化して得られる連立一次方程式の係数行列の非零構造は等価である。したがって、行列計算の並列化において必要となる非零構造の情報は節点グラフから取得でき、節点グラフが得られたあとは、この節点グラフに対して領域分割を行う。

これは、古典的な有限要素法のみでなく、より複雑なメッシュ構造を持つ重合メッシュ法でも同様に成立する。第2.節で述べたように、筆者らが提案するB-spline重合メッシュ法は、B-spline基底関数を用いた有限要素メッシュとLagrange基底関数を用いた有限要素メッシュを使用する。本手法の係数行列は、B-spline基底関数同士の積を考慮する K^{GG} 、Lagrange基底関数同士の積を考慮する K^{LL} 、B-splineおよびLagrange基底関数の積を考慮する K^{GL}, K^{LG} の4つの部分行列に分けられる。よって、B-spline節点同士の隣接関係、Lagrange節点同士の隣接関係、B-spline節点とLagrange節点の隣接関係を考慮する必要がある。これらいずれの場合も、Fig.4に示すように、式(9)が成り立つ場合に2節点 v_i, v_j は隣接していると考えられる。

(2) 節点グラフの領域分割

2領域での節点グラフの分割の模式図をFig.5に示す。Fig.5左上に示すように節点グラフを分割することを考える。領域分割においては、並列計算の高効率化のために、各計算ノードの計算量均一化およびデータ分割によって生じる計算ノード間の通信量最小化が要求される。これはグラフの制約付き最小カット問題とみなされ、本研究ではそのライブラリとしてMETIS[18]を使用する。この操作により n 個に分割されたグラフのノード集合 $V_k (k = 1, 2, \dots, n)$ は他の領域と重複のない集合であり、この集合を内部ノード集合と呼ぶ。ノードが重複なく分割された節点グラフの様子を、Fig.5左下に示す。

一方で、数値計算においては常に周囲節点、すなわちエッジで結ばれた他のノードの情報を必要とするため、自身から伸びるエッジが分割されているノードにおける計算には、そのエッジの先にある他領域内のノードの情報が必要である。ここで、分割後の内部ノード集合 V_k に属するノード v_i と隣接する（エッジで結ばれている）他領域 $l (l \neq k)$ 内のノードの集合を $\text{Adj}(v_i) =$

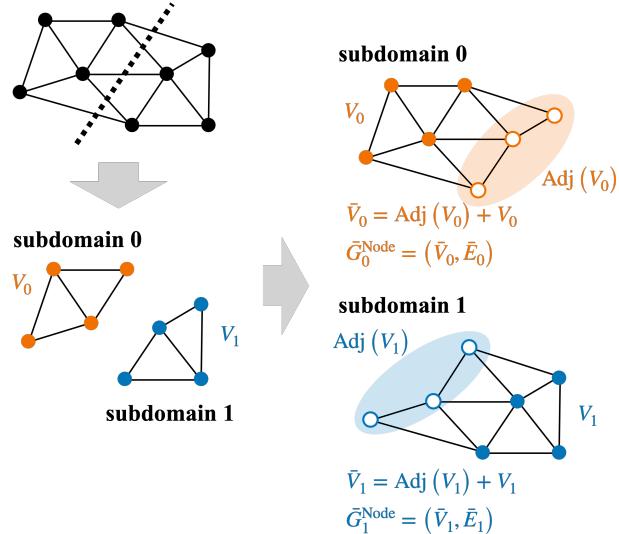


Fig.5 Domain decomposition for a nodal graph.

$\{v_j \in V_l \mid e_{i,j} \in E\}$ と表し、分割後の内部ノード集合 V_k に属するノードのいずれかに隣接するノードの集合を隣接ノード集合と呼び $\text{Adj}(V_k)$ と表す。Fig.5右上に、領域0の内部ノード集合 V_0 に対する隣接ノード集合 $\text{Adj}(V_0)$ をオレンジ色の網掛け領域として示し、Fig.5右下に、領域1の内部ノード集合 V_1 に対する隣接ノード集合 $\text{Adj}(V_1)$ を青色の網掛け領域として示している。そしてこの隣接ノード集合 $\text{Adj}(V_k)$ と内部ノード集合 V_k の和集合を $\bar{V}_k = \text{Adj}(V_k) + V_k$ 、 \bar{V}_k で構成されるエッジの部分集合を \bar{E}_k と表す。このとき、領域 k において節点グラフ $\bar{G}_k^{\text{Node}} = (\bar{V}_k, \bar{E}_k)$ を考慮することで、情報の不足なく数値計算を実施することができる。

なお、上記の手法を用いて、Lagrange基底関数を用いた古典的な有限要素法を領域分割すると、その結果は、従来の領域分割手法においてoverlap層を1層とするoverlapping型領域分割による分割結果と一致する。その他並列計算において必要な情報は、この分割された節点グラフ \bar{G}_k^{Node} に基づきデータ分割する。

(3) 要素コネクティビティグラフの定義

有限要素法ベースの手法は、各要素において要素に属する局所節点の同士の基底関数およびその一階微分値の積を計算、要素剛性行列を構築し、要素剛性行列を全要素でアセンブルすることで全体剛性行列を作成

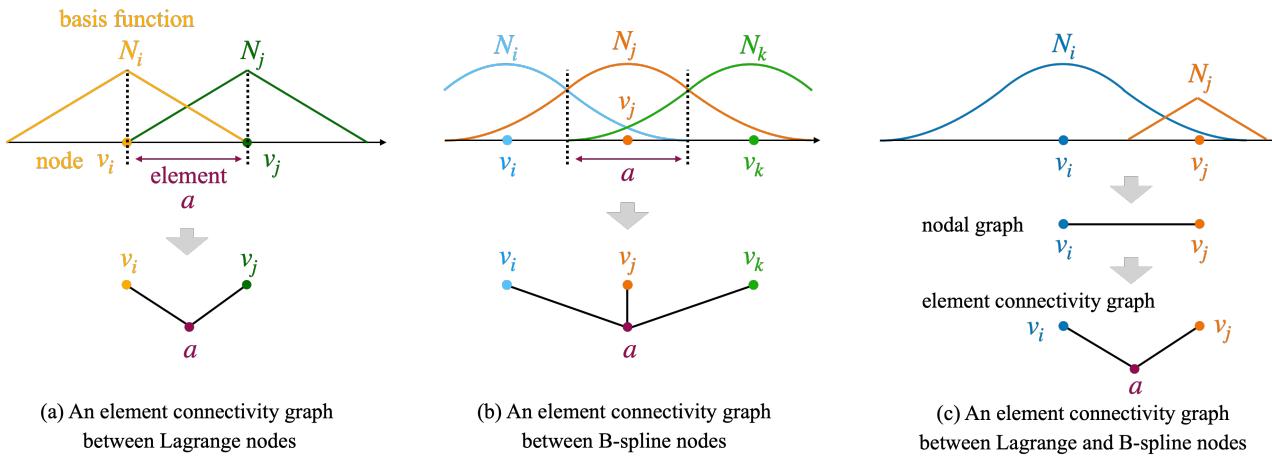


Fig.6 Schematic view of element connectivity graphs.

する。このようなアルゴリズムの成立には、各要素上でいずれの節点の基底関数を計算すべきかを示すデータが必要であり、本論文ではこのようなデータを要素コネクティビティデータと呼ぶ。本研究では一般的なデータ分割の実現のため全てのデータをグラフデータで統一的に扱っている。要素コネクティビティデータをグラフに一般化したものを要素コネクティビティグラフと呼び、任意の要素 a における要素コネクティビティグラフを G_a^{Elem} と表す。要素コネクティビティデータは各要素上でいずれの節点の基底関数を計算すべきかを示すデータであるため、要素コネクティビティグラフは「要素」と「要素に属する各局所節点」との結びつきを表現すると考える。よって、要素 a における要素コネクティビティグラフ G_a^{Elem} は、要素 a および各局所節点をグラフのノードとし、要素ノードと各局所節点ノードがエッジで結ばれたグラフ構造と考える。

本研究では、要素コネクティビティグラフの構築について、同一メッシュ上にある節点のみを局所節点として考慮する場合と、異なるメッシュ上にある節点と共に局所節点として考慮する場合に分けて考える。1次元空間における模式図を Fig.6 に示す。まず、同一メッシュ上にある節点のみを局所節点として考慮する場合の要素コネクティビティグラフの定義を示す。ある要素 a とある節点 v_i について、節点 v_i に対応する基底関数 $N_i(\mathbf{x})$ が要素 a 上で非零の値を取る場合、要素 a と節点 v_i はエッジ $f_{a,i}$ で結ばれているとする。要素 a に隣接する全ての節点（局所節点）の集合を V_a ($\subseteq V$) とし、エッジ集合を F_a と表す。次に、異なるメッシュ上にある節点と共に局所節点として考慮する場合の要素コネクティビティグラフの定義を示す。これは、複数のメッシュを用いる重合メッシュ法において、異なるメッシュ同士の連結性を表す情報である。節点グラフ G^{Node} において、異なるメッシュ上にある 2 節点 v_i, v_j がエッジ $e_{i,j}$ で結ばれている場合、その 2 節点 v_i, v_j のみを局所節点とする要素 a が存在すると考え、局所節点集合 $V_a = \{v_i, v_j\}$ および、各局所節点 v_i, v_j と要素 a とを結ぶエッジ集合 $F_a = \{f_{a,i}, f_{a,j}\}$ を定義する。

本論では、上記の定義に基づき構築される任意の要素 a に対する要素コネクティビティグラフを $G_a^{\text{Elem}} =$

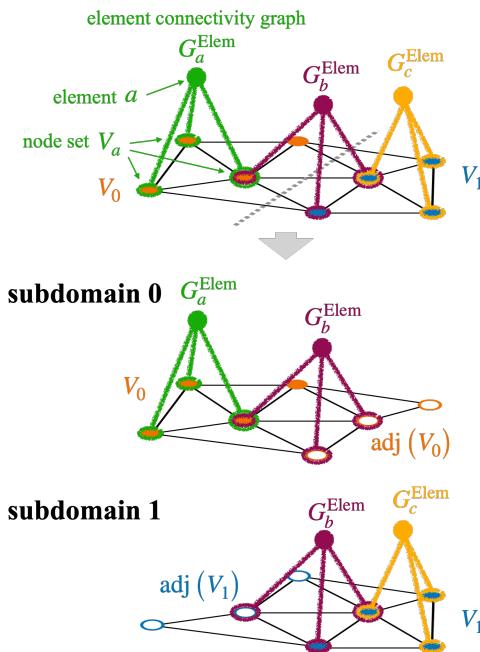


Fig.7 Domain decomposition for an element connectivity graph.

(W_a, F_a) と表す。ここで、 W_a は要素コネクティビティグラフ G_a^{Elem} のノード集合であり $W_a = \{a\} + V_a$ と表せる。

(4) 要素コネクティビティグラフの領域分割

有限要素法の特徴である要素ごとの行列生成アルゴリズムを並列計算でも実施するためには、上記で示した要素コネクティビティグラフを領域ごとに情報の過不足なく分割する必要がある。各節点の情報がいずれの領域で保持されているかは節点グラフの分割によって決定されるため、各要素に対する要素コネクティビティグラフは、分割された節点グラフに基づき、節点情報の過不足がないように各領域に振り分けられる。

2 領域での要素コネクティビティグラフの分割の模

式図を Fig.7 に示す。ある領域 k で任意の要素 a における要素剛性行列を作成する場合、要素 a に隣接する局所節点集合 V_a の情報が必要となる。よって、情報の過不足なく計算するためには V_a に含まれる全ての節点の情報が領域 k で保持されている必要がある。すなわち、局所節点集合 V_a に属する全ての節点は、節点グラフ G_k^{node} で定義される節点集合 \bar{V}_k に含まれている必要がある。したがって、要素 a の局所節点集合 V_a と領域 k での節点集合 \bar{V}_k に関して、 $V_a \subseteq \bar{V}_k$ が成り立つ場合、要素 a に対する要素コネクティビティグラフ G_a^{Elem} は領域 k に属すると定義される。上記の定義は、第(3)項で定義される任意の要素コネクティビティグラフに適用可能であり、古典的な有限要素法のみでなく、重合メッシュ法および任意の基底関数の有限要素法に対しても拡張することができる。

4. B-spline 重合メッシュ法を適用した流体の安定化有限要素定式化

紙面が足りないため省略し、口頭発表にて詳述する。

5. 妥当性検証および数値計算例

提案手法を用いた計算例は口頭発表にて紹介する。

6. 結論

本研究では、B-spline 重合メッシュ法に対し、分散モリ型並列環境での並列計算を実施するために、グラフに基づく領域分割型並列化手法を示した。その上で、3 次元非圧縮性粘性流体解析において、提案する並列計算手法を B-spline 重合メッシュ法ソルバーに適用し、ストロングスケーリングテストによってその並列性能を評価した。

謝辞: 本研究は、JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S および JSPS 科研費 23K24857, 23H00475, 22H00242 の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- [1] Fish, J., The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, **43**-3, 1992, pp. 539–547.
- [2] Reddy, J.N., An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates. *Composite Structures*, **25**-1, 1993, pp. 21–35.
- [3] Angioni, S.L., Visrolia, A. and Meo, M., Combining X-FEM and a multilevel mesh superposition method for the analysis of thick composite structures. *Composites Part B: Engineering*, **43**-2, 2012, pp. 559–568.
- [4] Chen, X., Li, Z. and Wang, H., Progressive Failure Analysis of an Open-Hole Composite Laminate by Using the S-Version Finite-Element Method. *Mechanics of Composite Materials*, **50**-3, 2014, pp. 279–294.
- [5] Jiao, Y. and Fish, J., On the equivalence between the s-method, the XFEM and the ply-by-ply discretization for delamination analyses of laminated composites. *International Journal of Fracture*, **191**-1, 2015, pp. 107–129.
- [6] Fish, J. and Markolefas, S., Adaptive s-method for linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **104**-3, 1993, pp. 363–396.
- [7] Okada, H., Endoh, S. and Kikuchi, M., On fracture analysis using an element overlay technique. *Engineering Fracture Mechanics*, **72**-5, 2005, pp. 773–789.
- [8] Fan, R. and Fish, J., The rs-method for material failure simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **73**-11, 2008, pp. 1607–1623.
- [9] He, T., Mitsume, N., Yasui, F., Morita, N., Fukui, T. and Shibanuma, K., Strategy for accurately and efficiently modelling an internal traction-free boundary based on the s-version finite element method: Problem clarification and solutions verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **404**, 2023, p. 115843.
- [10] Ooya, T., Tanaka, S. and Okada, H., On the linear dependencies of interpolation functions in s-version finite element method. *Journal of Computational Science and Technology*, **3**-1, 2009, pp. 124–135.
- [11] 馬込望, 三目直登, B-spline 関数を導入した高精度重合メッシュ法. 日本計算工学会論文集, **2022**, 2022, p. 20220015.
- [12] Magome, N., Morita, N., Kaneko, S. and Mitsume, N., Higher-continuity s-version of finite element method with B-spline functions. *Journal of Computational Physics*, **497**, 2024, p. 112593.
- [13] Sun, W., Fish, J. and Guo, C., Parallel PD-FEM simulation of dynamic fluid-driven fracture branching in saturated porous media. *Engineering Fracture Mechanics*, **274**, 2022, p. 108782.
- [14] 八反田大介, 岡田裕, 104 重合メッシュ法プログラムの並列化に関する研究(計算力学, 環境工学). 中国四国支部総会・講演会 講演論文集, **2008**.**46**, 2008, pp. 7–8.
- [15] 集路幸正, 三目直登, 柴沼一樹, 森田直樹, 並列重合メッシュ法による静的構造解析の負荷分散手法の検討. 理論応用力学講演会 講演論文集 第 66 回理論応用力学講演会, 2022, p. 7.
- [16] Otoguro, Y., Takizawa, K. and Tezduyar, T. E., Space–time VMS computational flow analysis with isogeometric discretization and a general-purpose NURBS mesh generation method. *Computers & Fluids*, **158**, 2017, pp. 189–200.
- [17] 馬込望, 森田直樹, 三目直登, グラフ構造に基づく B-spline 重合メッシュ法の領域分割型並列解析. 日本計算工学会論文集, **2024**-1, 2024, pp. 20241001–20241001.
- [18] Karypis, G. and Kumar, V., A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **20**-1, 1998, pp. 359–392.