

織物複合材料の分離型マルチスケール 損傷進展解析

Decoupled Multiscale Damage Propagation Analysis of Woven composites

三山賢真¹⁾, 志村行宣¹⁾, 松田哲也²⁾

Kenshin Miyama, Yukinobu Shimura and Tetsuya Matsuda

1) 筑波大学 大学院理工情報生命学術院 システム情報工学研究群 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: kenshin.miyama0914@gmail.com)

2) 博(工) 筑波大学 システム情報系 准教授 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: matsuda@kz.tsukuba.ac.jp)

In this study, damage propagation analysis of plain-woven carbon fiber-reinforced plastic (CFRP) composites is performed using a decoupling multiscale analysis method. First, numerical material tests based on a homogenization theory are conducted using a basic cell model of plain-woven CFRP to determine material parameters for a macroscopic constitutive model and a damage criterion. Then, using the obtained parameters, macroscopic damage propagation analysis of notched coupon specimen models of plain-woven CFRP with $[(0/90)]_8$ and $[(0/90)/(\pm 45)]_{2s}$ is conducted based on the finite element method. The analysis results successfully reproduce macroscopic damage propagation behavior of the plain-woven CFRP, showing that the present method can perform structural analysis of plain-woven CFRP at considerably low computational costs compared to the fully coupled multiscale scheme.

Key Words : Woven Composite, CFRP, Damage, Multiscale, Decoupled,

1. 緒言

織物複合材料は、繊維束を織った布状の強化材に樹脂等の母材を含浸させた材料であり、一般的な金属材料と比較して高比強度、高比剛性、高耐食性といった優れた特性を有する。このことから、航空・宇宙機器をはじめとする様々な工業製品に主要構造部材として使用されており、その変形挙動を精度良く解析する技術が求められている。

織物複合材料内部の繊維束は、外力が加わった際に、繊維破断や繊維/樹脂界面ではなく離れ、樹脂き裂のような複雑な損傷を生じる。複合材料では、これらのミクロスケールにおける損傷がマクロ構造の破壊につながるため[1]~[3]、ミクロ構造を考慮した解析が必要となる[4]。複合材料の解析手法として有用な手法に、マルチスケール解析理論[5]の一つである均質化理論[6]~[8]を用いたツースケール解析手法[9]~[12]がある。この手法は、内部にミクロ周期構造を有する材料の構造解析に対して有用であり、マクロ挙動とミクロ挙動を連成した解析が可能である。このような背景から本研究グループでは、均質化理論に基づくツースケール解析手法に損傷のクライテリアを導入することで、複合材料の損傷進展挙動を解析できるツースケール損傷進展解析手法の開発を行ってきた[13]。

上述の手法では、ミクロ解析に損傷のクライテリアとしてHoffman則[14]を組み込むことで、ミクロスケールにおける損傷を考慮した複合材料の損傷進展解析に成功している。しかしこの手法は、マクロモデルの応力評価点全

てにおいてミクロ問題を解く必要があるため、計算負荷が膨大となるという問題があった。このことから、内部に複雑なミクロ構造を有する織物複合材料の構造解析に用いることは現実的でない。

計算負荷を低減しつつマルチスケール構造解析を行う手法として、分離型マルチスケール解析手法[15]~[17]がある。分離型マルチスケール解析手法は、ミクロ構造の影響を考慮しながらも、ミクロ構造解析とマクロ構造解析を連成させずに解析する手法である。この解析手法では、マクロ構成則を事前に設定し、ミクロ構造に対する数値的なマルチスケール材料試験の結果から、設定したマクロ構成則に必要なパラメータを同定することで、マクロ構造解析とミクロ構造解析の分離を可能にしている。この手法を用いれば、連成型のツースケール損傷進展解析手法に比べて低い計算コストで織物複合材料のマルチスケール解析を実施できる可能性がある。

そこで本研究では、代表的な織物複合材料である平織炭素繊維強化プラスチック（平織CFRP）を対象に、分離型マルチスケール損傷進展解析を実施し、平織CFRPのマクロ損傷進展挙動について調査する。

2. 均質化理論に基づく分離型マルチスケール損傷進展解析手法

(1) 解析の流れ

分離型マルチスケール解析手法[15]~[17]は、数値材料

試験と呼ばれるマイクロ構造の事前解析，マクロ構造解析の流れで行われる．まず，平織CFRPのマクロ構造を等価な均質体としての物性をもつマクロ構造であるとしたとき，そのマクロ構造は直交異方性をもつ弾性体であると仮定する．マクロ構造の弾性剛性および強度を同定するため，数値材料試験として平織CFRPのマイクロ構造に対して均質化理論に基づく損傷進展解析を行う．さらに，数値材料試験の結果から同定した弾性剛性および強度を用いて，均質体を仮定した平織CFRPのマクロ構造に対して損傷進展解析を行う．

(2) 均質化理論

a) 問題設定

Fig.1に示すような微視的周期構造を有する平織CFRP Ω を考える．いま， Ω を構成する周期単位をFig.2に示すようなユニットセル Y とし， Ω の微視構造の最小構成単位として基本セル A を定義する．その境界を Γ_A とし， A に対して直交座標系 y_i を設ける．ここで A は， Y を単位とする内部構造の周期性 (Y -周期性) および点対称性 (C -対称性) を考慮することで定義されるものであり，ミクロスケールではこの A を解析領域として理論を展開する．

なお本論文では，総和規約を用いることとし，時間 t による微分を $(\dot{})$ ，直交座標系 y_i に関する偏微分を $()_{,i}$ と表すこととする．

b) 基礎式

まず， A における応力分布とひずみ分布をそれぞれ $\sigma_{ij}(\mathbf{y}, t)$ および $\varepsilon_{ij}(\mathbf{y}, t)$ と表し，以後マイクロ応力およびマイクロひずみと呼ぶことにする．このとき，マイクロ応力の釣合式は速度形で次のように書くことができる．

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad (1)$$

いま，微視的周期構造の各構成相は弾性体であり，その構成式は次のように表されるとする．

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (2)$$

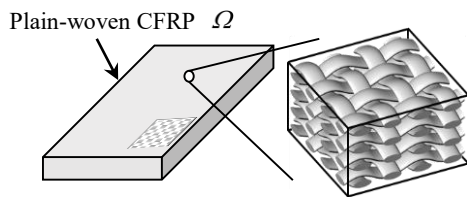


Fig.1 Macroscopic structure Ω with periodic microscopic structure of plain-woven CFRP.

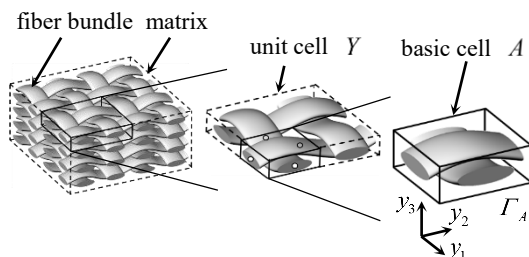


Fig.2 Unit cell Y and basic cell A .

ここで， c_{ijkl} は A における各構成相（繊維束および樹脂）の弾性剛性テンソルである．また， A 内のマイクロ変位速度 $\dot{u}_i(\mathbf{y}, t)$ は，マクロ一様変形のこう配を $F_{ij}(t)$ とし，次のように書ける．

$$\dot{u}_i(\mathbf{y}, t) = \dot{F}_{ij}(t) y_j + \dot{u}_i^\#(\mathbf{y}, t) \quad (3)$$

上式の $\dot{u}_i^\#(\mathbf{y}, t)$ は，マクロスケールにおける一様変形による変位からのずれ，すなわち擾乱変位を表し，基本セル A を単位として周期的に分布する．ここで，マイクロひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ は，

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{E}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij}^\# \quad (4)$$

と表され， \dot{E}_{ij} および $\dot{\varepsilon}_{ij}^\#$ はそれぞれマクロひずみ速度と擾乱ひずみ速度である．

c) 擾乱変位場に対する解

擾乱変位速度場 $\dot{u}_i^\#(\mathbf{y}, t)$ の任意の変分を $v_i(\mathbf{y}, t)$ とすると，マイクロ応力の釣合式(1)は，部分積分および発散定理を用いることで次の弱形式に変換される．

$$\int_A \dot{\sigma}_{ij} v_{i,j} dA - \int_{\Gamma_A} \dot{\sigma}_{ij} n_j v_i d\Gamma_A = 0 \quad (5)$$

ここで， n_j は境界 Γ_A の外向き単位法線ベクトルを表す．上式左辺第2項の境界積分項は，境界全体で零となる．これは，Fig.3のように， $\dot{\sigma}_{ij}$ および v_i が A の上下面において Y -周期性を，側面において C -対称性をそれぞれ満足する一方，単位法線ベクトル n_j が Y -周期性を満たす境界では向かい合う点で， C -対称性を満たす境界では対称な点でそれぞれ互いに逆向きであるためである．さらに，上式に式(2)および式(4)を代入することで，次式を得る．

$$\int_A c_{ijpq} \dot{u}_{p,q}^\# v_{i,j} dA = -\dot{E}_{kl} \int_A c_{ijkl} v_{i,j} dA \quad (6)$$

このとき，擾乱変位速度場 $\dot{u}_i^\#(\mathbf{y}, t)$ とマクロひずみ速度 $\dot{E}_{ij}(t)$ の線形関係から，上式は次のように解くことができる．

$$\dot{u}_i^\#(\mathbf{y}, t) = \chi_i^{kl}(\mathbf{y}) \dot{E}_{kl}(t) \quad (7)$$

ここで χ_i^{kl} は， A に対する境界値問題

$$\int_A c_{ijpq} \chi_{p,q}^{kl} v_{i,j} dA = -\int_A c_{ijkl} v_{i,j} dA \quad (8)$$

を解くことで得られる関数であり，特性関数と呼ばれる．

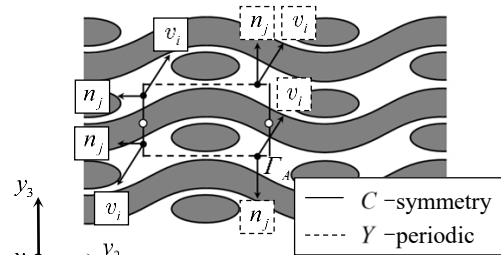


Fig.3 Arbitrary velocity field v_i and unit normal vector n_i on boundary Γ_A .

d) ミクロ応力式とマクロ関係式

式(4)および式(7)を式(2)に代入すると、次のミクロ応力速度とマクロひずみ速度の関係式が得られる。

$$\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}, t) = a_{ijkl}(\mathbf{y}) \dot{E}_{kl}(t) \quad (9)$$

ここで、 a_{ijkl} は、

$$a_{ijkl} = c_{ijpq} (\delta_{pk} \delta_{ql} + \chi_{p,q}^{kl}) \quad (10)$$

のように定義され、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。いま、 A に関する体積平均を次のように定義する。

$$\langle \# \rangle = \frac{1}{|A|} \int_A \# dA \quad (11)$$

ここで、 $|A|$ は A の体積である。上式を式(9)に適用することで、次のような速度形のマクロ構成式が得られる。

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \langle a_{ijkl} \rangle \dot{E}_{kl} \quad (12)$$

ここで、 $\langle a_{ijkl} \rangle$ は周期複合材料の均質化されたマクロ弾性剛性テンソルを表し、 $\dot{\Sigma}_{ij}$ はマクロ応力速度を表す。

以上のように、平織CFRPに均質化理論を適用することで、ミクロ挙動を考慮した解析が可能となる。本研究では、数値材料試験によって求まる $\langle a_{ijkl} \rangle$ を、マクロ構造解析において、均質体を仮定したマクロ構造の弾性剛性として用いる。

(3) 損傷判定

本研究では、数値材料試験およびマクロ構造解析のどちらの解析においても損傷判定にHoffman則[14]を用いる。次式に示す損傷パラメータ F を考え、 $F \geq 1$ のとき損傷していると判定する。

$$F = C_1 (\sigma_L - \sigma_T)^2 + C_2 (\sigma_T - \sigma_Z)^2 + C_3 (\sigma_Z - \sigma_L)^2 + C_4 \sigma_L + C_5 \sigma_T + C_6 \sigma_Z + C_7 \tau_{LT}^2 + C_8 \tau_{TZ}^2 + C_9 \tau_{ZL}^2 \quad (13)$$

ここで、 C_1, C_2, \dots, C_9 は次式で表されるパラメータであり、 L - T - Z 座標系は各主軸が損傷判定に用いる引張強度の方向と対応した局所座標系である。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_L^t F_L^c} + \frac{1}{F_T^t F_T^c} - \frac{1}{F_Z^t F_Z^c} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_T^t F_T^c} + \frac{1}{F_Z^t F_Z^c} - \frac{1}{F_L^t F_L^c} \right), \\ C_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_Z^t F_Z^c} + \frac{1}{F_L^t F_L^c} - \frac{1}{F_T^t F_T^c} \right), \\ C_4 &= \frac{1}{F_L^t} - \frac{1}{F_L^c}, C_5 = \frac{1}{F_T^t} - \frac{1}{F_T^c}, C_6 = \frac{1}{F_Z^t} - \frac{1}{F_Z^c}, \\ C_7 &= \left(\frac{1}{F_{LT}^s} \right)^2, C_8 = \left(\frac{1}{F_{TZ}^s} \right)^2, C_9 = \left(\frac{1}{F_{ZL}^s} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

F_{ij}^k は材料の強度であり、上付添字において t は引張、 c は圧縮、 s はせん断を示す。

3. 平織CFRPの基本セルに対する数値材料試験

(1) 解析条件

解析対象として、IM7/#8552 炭素繊維/エポキシ樹脂で構成される平織CFRPを考えた。解析モデルは、Fig.4に示す平織CFRPの基本セルモデルを用いた。なお、繊維方向が y_1 軸方向である繊維束をweft、 y_2 軸方向である繊維束をwarpと呼ぶこととする。繊維束体積率を63%として、8節点アイソパラメトリック要素により有限要素分割した。要素数および節点数は3360および4011である。

繊維束およびエポキシの材料定数は、文献[18]を参照してTable 1のように設定した。なお、繊維束中の繊維体積率は60%である。

負荷条件として、引張方向に一定のマクロひずみ速度 $\dot{E} = 1.0 \times 10^{-5} [\text{s}^{-1}]$ を与え、基本セルモデルの境界面には Y -周期境界条件および C -対称境界条件の内、適切な条件を課した。 y_1 、 y_2 、および y_3 軸方向への単軸引張解析と、 y_1 - y_2 、 y_2 - y_3 、および y_3 - y_1 面における単純せん断解析の計6種類の解析を行った。

(2) 解析結果

6種類の解析結果について、負荷条件と対応する成分の応力-ひずみ関係をFig.5に、最大応力をとった直後の応力低下時の基本セルモデルおよび基本セルモデル内の繊維束の損傷分布をFig.6に示す。ここで、本研究では損傷した

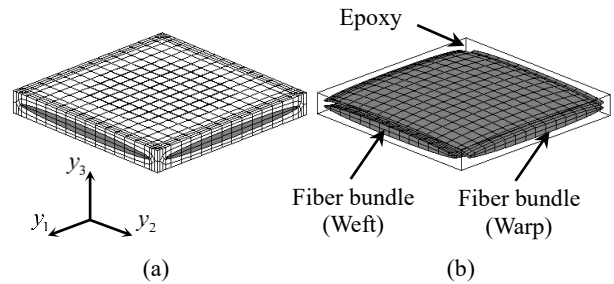


Fig.4 Basic cell A of plain-woven CFRP and finite element mesh; (a) full view and (b) fiber bundles (weft and warp) in basic cell.

Table 1 Material properties of fiber bundle and epoxy.

| Material | Fiber bundle | Epoxy |
|----------------------------|-----------------|------------|
| Young's modulus [GPa] | E_L 165 | E 4.08 |
| | E_T 9 | |
| Shear modulus [GPa] | G_{LT} 5.6 | G - |
| | G_{TZ} 0.5 | |
| Poisson's ratio [-] | ν_{LT} 0.34 | ν 0.38 |
| | ν_{TZ} 0.5 | |
| Tensile strength [MPa] | F_L^t 2560 | F^t 99 |
| | F_T^t 73 | |
| | F_Z^t 63 | |
| Compressive strength [MPa] | F_L^c 1590 | F^c 130 |
| | F_T^c 185 | |
| | F_Z^c 185 | |
| Shear strength [MPa] | F_{LT}^s 90 | F^s 57 |
| | F_{TZ}^s 57 | |

要素について、 L - T - Z 座標系での応力強度比を基に損傷モードを決定しており、損傷分布は損傷モードごとに色付けしている。数値材料試験において、 L 軸方向、 T 軸方向、および Z 軸方向は、繊維束要素においてはそれぞれ繊維方向、繊維直交方向、および板厚方向に、樹脂要素ではそれぞれ y_2 軸方向、 y_3 軸方向、および y_1 軸方向に対応している。

y_1 軸方向引張の解析結果について、Fig.5(a)より、マクロひずみ0.58%付近で最大応力およそ307 [MPa]をとり、その後急激に応力が低下していることがわかる。Fig.6(a)より、樹脂には端部にモード Z の損傷が発生しており、繊維束にはwarpの端部にモード T 、weftの繊維方向の境界付近にモード ZL の損傷が発生していることが確認できる。

y_2 軸方向引張の解析結果について、Fig.5(b)より、マクロひずみ0.58%付近で最大応力およそ307 [MPa]をとり、その後急激に応力が低下していることがわかる。Fig.6(b)より、樹脂には端部にモード L の損傷が発生しており、繊維束にはweftの端部にモード T 、warpの繊維方向の境界付近にモード ZL の損傷が発生していることが確認できる。

y_3 軸方向引張の解析結果について、Fig.5(c)より、マクロひずみ0.58%付近で最大応力およそ52.9 [MPa]をとり、その後急激に応力が低下していることがわかる。Fig.6(c)より、樹脂には損傷が発生しておらず、繊維束にはモード Z の損傷が発生していることが確認できる。

y_1 - y_2 せん断の解析結果について、Fig.5(d)より、マク

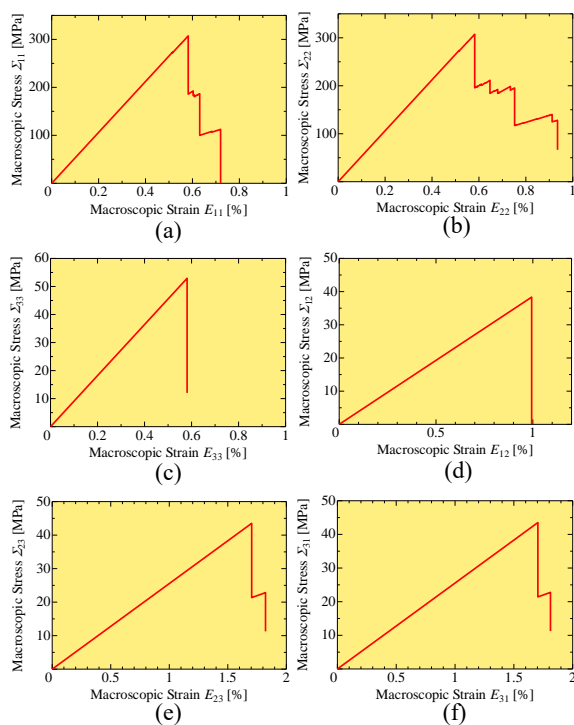


Fig.5 Macroscopic stress-strain relations of basic cell;
(a) y_1 tension, (b) y_2 tension, (c) y_3 tension, (d) y_1 - y_2 shear,
(e) y_2 - y_3 shear and (f) y_3 - y_1 shear.

ロひずみ0.99%付近で最大応力およそ38.3 [MPa]をとり、その後急激に応力が低下していることがわかる。Fig.6(d)より、樹脂には複雑なモードの損傷が発生しており、繊維束には全体にモード LT の損傷が発生していることが確認できる。

y_2 - y_3 せん断の解析結果について、Fig.5(e)より、マク

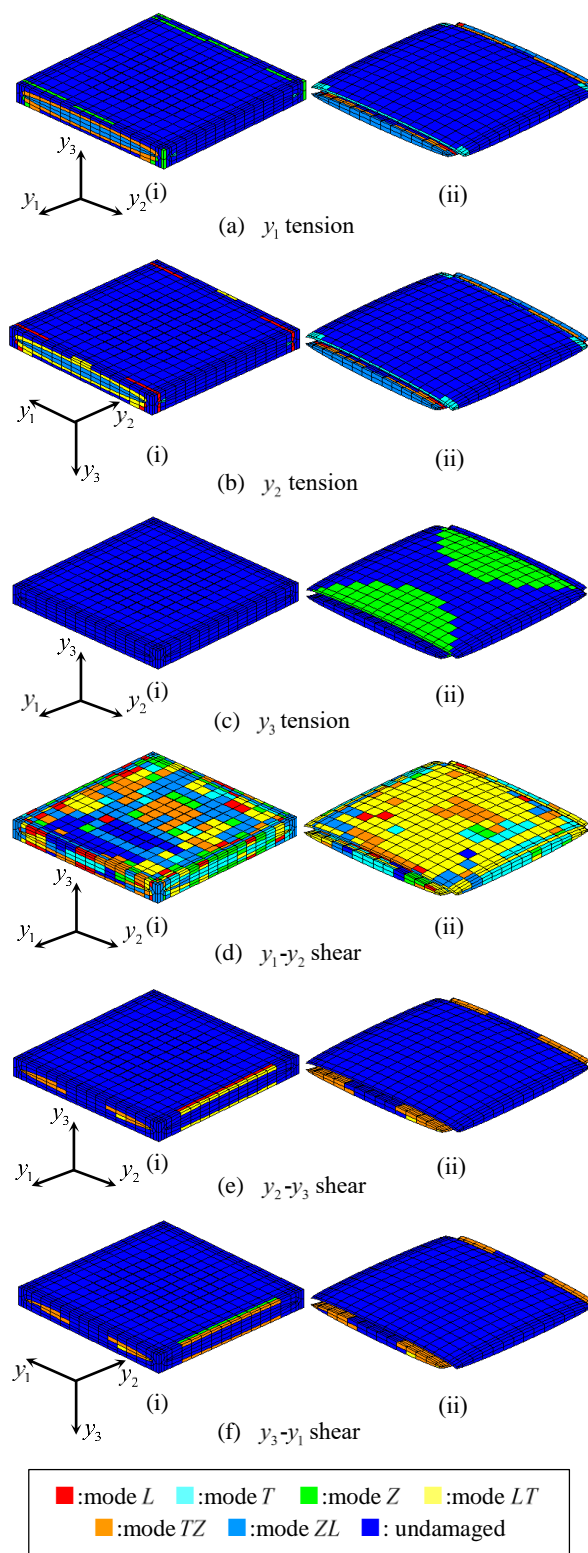


Fig.6 Damage distributions;
(i) full view and (ii) fiber bundles in basic cell.

ロひずみ1.70%付近で最大応力およそ43.5 [MPa]をとり、その後急激に応力が低下していることがわかる。Fig.6(e)より、樹脂には端部にモード L およびモード LT の損傷が発生しており、繊維束にはweftにモード TZ の損傷が発生していることが確認できる。

$y_3 - y_1$ せん断の解析結果について、Fig.5(f)より、マクロひずみ1.70%付近で最大応力およそ43.5 [MPa]をとり、その後急激に応力が低下していることがわかる。Fig.6(f)より、樹脂には端部にモード Z およびモード TZ の損傷が発生しており、繊維束にはwarpにモード TZ の損傷が発生していることが確認できる。

4. 平織CFRPのマクロ構造解析

(1) 解析条件

解析対象として、IM7/#8552 炭素繊維/エポキシ樹脂で構成される、8層積層の平織CFRPを考えた。解析モデルとして、Fig.7に示す厚さ2 [mm]、幅15 [mm]、長さ60 [mm]のノッチ付き試験片モデルを考え、8節点アイソパラメトリック要素により要素分割した。要素数および節点数は27520および32553である。また、積層構成として全てのプライを同一方向に積層した $[(0/90)]_8$ と疑似等方積層をした $[(0/90)/(\pm 45)]_{2s}$ の二つを考えた。ここで0/90プライは、基本セルモデル内のweftの繊維方向が x_1 軸方向と一致するようなプライを表す。

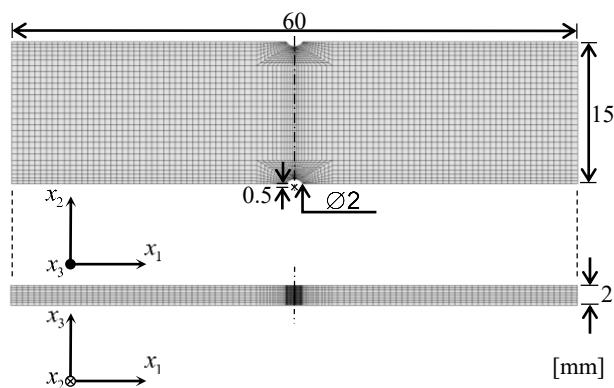


Fig.7 Finite element model of plain-woven CFRP.

Table 2 Macroscopic properties of plain-woven CFRP.

| Elastic properties | | Strength | |
|--------------------|------------|------------|------------|
| D_{1111} | [GPa] 56.6 | | |
| D_{1122} | [GPa] 7.41 | | |
| D_{1133} | [GPa] 5.69 | F_L^t | [MPa] 307 |
| D_{2211} | [GPa] 7.41 | F_T^t | [MPa] 307 |
| D_{2222} | [GPa] 56.6 | F_Z^t | [MPa] 52.9 |
| D_{2233} | [GPa] 5.69 | F_L^c | [MPa] 277 |
| D_{3311} | [GPa] 5.69 | F_T^c | [MPa] 277 |
| D_{3322} | [GPa] 5.69 | F_Z^c | [MPa] 79.4 |
| D_{3333} | [GPa] 10.1 | F_{LT}^s | [MPa] 38.3 |
| D_{1212} | [GPa] 3.86 | F_{TZ}^s | [MPa] 43.5 |
| D_{2323} | [GPa] 2.55 | F_{ZL}^s | [MPa] 43.5 |
| D_{3131} | [GPa] 2.55 | | |

各プライの材料定数は、3章の解析結果を基にTable 2のように設定した。なお、マクロ構造解析では L 軸方向がweftの繊維方向、 T 軸方向がwarpの繊維方向、 Z 軸方向が積層方向に対応している。

解析は、 x_1 軸方向を負荷方向とする単軸引張解析を実施した。境界条件として $x_1 = 0$ [mm]のモデル側面の変位を完全固定、 $x_1 = 60.0$ [mm]のモデル側面の x_2 、 x_3 軸方向の変位を固定した。負荷条件として、 $x_1 = 60.0$ [mm]のモデル側面の x_1 軸方向に一定変位速度 $\dot{u}_1 = 6.0 \times 10^{-4}$ [mm/s]を与え、 x_1 軸方向変位が $u_1 = 0.54$ [mm]に達するまで解析を行った。

(2) 解析結果

解析結果について、 x_1 軸方向の応力-ひずみ関係をFig.8に示す。なお本解析では、ひずみの増加による応力の変化がなくなった状態を破断状態とし、Fig.8において破断以降は描画していない。まず、 $[(0/90)]_8$ の解析結果について、Fig.8(a)より、ひずみ0.34%付近で破断が生じていることがわかる。また、最大応力はおおよそ162 [MPa]であった。ひずみ0.34%における x_1 軸方向の剛性低下率をFig.9に示す。Fig.9より、ノッチが存在するモデル中央に負荷方向と直交する損傷が直線的に発生していることが確認できる。

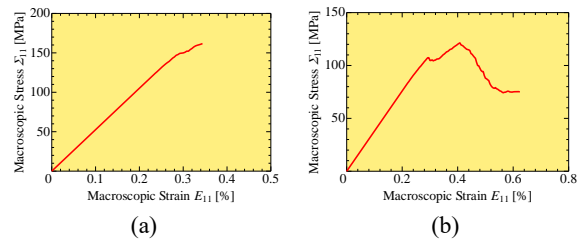


Fig.8 Stress-strain relations of plain-woven CFRP; (a) $[(0/90)]_8$ and (b) $[(0/90)/(\pm 45)]_{2s}$.

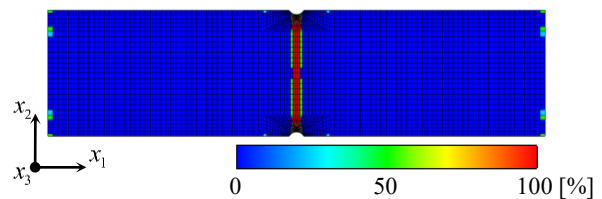


Fig.9 Stiffness reduction in x_1 -direction at 0.34% strain ($[(0/90)]_8$).

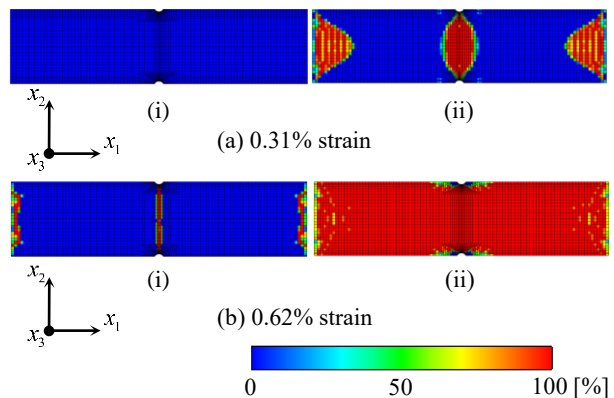


Fig.10 Stiffness reduction in x_1 -direction ($[(0/90)/(\pm 45)]_{2s}$; (i) 0/90 ply and (ii) ± 45 ply.

つづいて、 $[(0/90)/(\pm 45)]_{2s}$ の解析結果について、Fig.8(b)より、ひずみ0.31%付近で一度応力低下が生じるが、その後再び応力が上昇に転じ、最大応力およそ121 [MPa]を経て、ひずみ0.62%付近で破断したことがわかる。ひずみ0.31%およびひずみ0.62%における0/90プライおよび ± 45 プライそれぞれの x_1 軸方向の剛性低下率をFig.10に示す。Fig.10(a)より、 ± 45 プライにおいて、プライ中央および x_1 軸方向の両端部で損傷が生じることで応力低下が発生したことが確認できる。Fig.10(b)より、0/90プライにおいて、ノッチが存在するモデル中央に負荷方向と直交する損傷が直線的に発生していることが確認できる。また、 ± 45 プライにおいては、ひずみ0.31%で発生していた損傷がプライの大部分に進展していることがわかる。

以上の結果より、分離型マルチスケール損傷進展解析手法を用いることで、比較的低い計算コストでマイクロ構造を考慮した織物複合材料のマクロ損傷進展解析を実施できる可能性が示された。

参考文献

- [1] Kumagai, Y., Onodera, S., Salviato, M. and Okabe, T.: Multiscale analysis and experimental validation of crack initiation in quasi-isotropic laminates, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.193-194, pp.172-191, 2020.
- [2] Asp, L.E., Berglund, L.A. and Talreja, R.: A criterion for crack initiation in glassy polymers subjected to a composite-like stress state, *Composites Science and Technology*, Vol.56, pp.1291-1301, 1996.
- [3] Okabe, T., Nishikawa, M. and Toyoshima, H.: A periodic unit-cell simulation of fiber arrangement dependence on the transverse tensile failure in unidirectional carbon fiber reinforced composites, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.48, pp.2948-2959, 2011.
- [4] Hobbiebrunken, T., Hojo, M., Adachi, T., Jong, C.D. and Fiedler, B.: Evaluation of interfacial strength in CF/epoxies using FEM and in-situ experiments, *Composites Part A*, Vol.37, pp.2248-2256, 2006.
- [5] Crouch, R.D., Clay, S.B. and Oskay, C.: Experimental and computational investigation of progressive damage accumulation in CFRP composites, *Composites Part B*, Vol.48, pp.59-67, 2013.
- [6] Bensoussan, A., Lions, J.-L. and Papanicolau, G.: Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland Pub., 1978.
- [7] Sanchez-Palencia, E.: Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics 127. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1980.
- [8] Bakhvalov, N. and Panasenko, G.: Homogenization: Averaging processes in periodic media, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [9] 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊地昇: 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第1報, 定式化), 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.61, pp.2199-2205, 1995.
- [10] 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊地昇: 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第2報, 数値解析), 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.62, pp.2072-2079, 1996.
- [11] Matsui, K., Terada, K. and Yuge, K.: Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures, *Computers and Structures*, Vol.82, pp.593-606, 2004.
- [12] Asada, T., Tanaka, Y. and Ohno, N.: Two-scale and full-scale analyses of elastoplastic honeycomb blocks subjected to flat-punch indentation, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.46, pp.1755-1763, 2009.
- [13] Kohashi, T. and Matsuda, T.: Two-scale progressive damage analysis of CFRP laminates, *14th World Congress on Computational Mechanics and 8th European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering*, 2021.
- [14] Hoffman, O.: The brittle strength of orthotropic materials, *J. of Composite Materials*, Vol.1, pp.200-206, 1967.
- [15] Terada, K., Kato, J., Hirayama, N., Inugai, T. and Yamamoto, K.: A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials, *Computational Mechanics*, Vol.52, pp.1199-1219, 2013.
- [16] Terada, K., Hirayama, N., Yamamoto, K., Kato, J. and Kyoya, T.: Applicability of micro-macro decoupling scheme to two-scale analysis of fiber-reinforced plastics, *Advanced Composite Materials*, Vol.23, pp.421-450, 2014.
- [17] 寺田賢二郎, 平山紀夫, 山本晃司: 数値材料試験—有限要素法によるマルチスケール解析—, 丸善出版, 2021.
- [18] Kaddour, AS., Hinton, MJ., Smith, PA. and Li, S.: Mechanical properties and details of composite laminates for the test cases used in the third world-wide failure exercise, *J. of Composite Materials*, Vol.47, pp.2427-2442, 2013.