

# (キーノート講演) モード合成技術からインタラクティブ 固有周波数制御に至る高速・高精度解析技術の開発

(Keynote lecture) Development of High-speed, High-precision Analysis Technology  
from Mode Superposition Method to Interactive Plural Eigen-frequencies Control

萩原一郎<sup>1)</sup>

Ichiro Hagiwara

工博 明治大学 研究特別教授 (〒101-8301 東京都千代田区神田駿河台1-1)

E-mail:ihagi@meiji.ac.jp

Here structural-noise coupled problem for a large scale model is discussed. In this phenomena, the FEM matrix is unsymmetric so that left and right eigen vectors are different each other where the mode method is difficult to be used. But we have discovered the relationship between left and right eigenvectors with which eigenmode sensitivity of the coupled problem can be expressed explicitly. Now they use broadly the mode acceleration method where the loss of precision caused by omitting higher eigenmodes can be compensated. But it is clear that Ma-Hagiwara mode method is superior to the mode acceleration one. And as far as mode synthesis method based on mode method which is necessary for a large scale model, Ma-Hagiwara method is superior to Super element of MSC/NASTRAN which is based on mode acceleration one. Moreover it is possible for us to get a faster and higher precision system with our response surface optimal method, interactive energy density topology change method and Ma-Hagiwara mode method.

**Key Words :** Vehicle Interior Noise, Ma-Hagiwara mode method, MPOD, Eigen mode sensitivity, Mode superposition method, Vibration-Noise coupled problem, Strain Energy Distribution, Kinetic Energy Distribution, Control for Plural Eigen Frequencies,

## 1. はじめに

多くの雇用を提供することから、自動車産業の国際競争は熾烈を極めるものとなる。衝突実験車は1億円程度し、繰り返しの実験ができないことから、計算科学は大いに期待され、衝突シミュレーションの成功[1]により、クレイモデルは三次元CADへ、試作車は解析モデルへ、実験は解析シミュレーションへと開発スタイルの変革がなされ、開発期間の大幅な短縮が得られたことは周知のとおりである[2]。トレードオフの関係にある多くの性能を同時に満たす必要があることから、有限要素法と最適化の組合せも他の産業より遅くなされた。本稿で扱う騒音振動分野は、衝突とは異なり、開発過程で切ったり貼ったりの対策も可能なため、様々な実験法の開発がなされ、計算科学の方は当初は衝突程の期待はなされなかった。しかし、GM社から発せられたビルディング・ブロックアプローチ[3]は刺激となりモード解析技術の大きな発展が得られた[4]。ここでは、馬一萩原のモード法[5]が最も汎用性のあるものであることを想い出したい。室内騒音は、構造-音場連成問題となり、非対称行列を扱うことは困難であったが、右固有ベクトルと左固有ベクトルの関係式が得られた[6]ことは特筆すべきことであることも想いだしたい。また均質化法を用いた位相最適化の誕生[7]も大きな発展となり関連の多い数の論文の誕生となった。これに関してはやや我田引水ではあるが著者らのインタラクティブエネルギー密度位相変更法[8]も実用的には画期的な手法と考える。あわせて、ニューラルネットワーク関数をベー

スとする応答曲面法などにも注目すべきである。その代表としてMPOD (Most Probable Optimal Design) [9]がある。ここでは、計算科学の黎明期から今日までの騒音振動に関する解析技術について述べ、るべき姿についての考察を行う。

## 2. 音響振動の基盤となる解析技術

### (1) モード合成技術

音響振動応答値は固有モードの重ね合わせで決まることから、モード合成技術は音響振動の最も基盤となる技術である。固有値解析法には非常に多くの手法が開発されているが、固有値、固有モードのうちどちらを先に求めるかで手法は大別される。更に、低周波、高周波のどちらから先に求めるかで大別すると計4種類に大別される。いずれも、興味のある周波数領域の固有値・固有モードだけを求めることが不可で、全てを求める必要がある。この手法だと大規模構造物への適用は困難である。サブスペース法の発見によって、必要な領域の固有値・固有モードだけが算出できるようになったことは大きな福音であった。構造全体の曲げや捩りモード等は低周波で現れ高周波になればなるほど局部に集中した変形モードとなる。そのため、低周波の方が重要ということで、低周波の精度がより良い逆反復法など低周波から求める固有値解法が実用上利用される。それを使用し、低次の固有モード

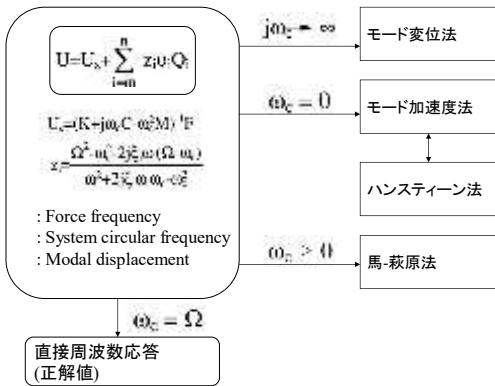


図1 馬—萩原のモード合成法  
従来のモード合成法との関係

だけを使用して応答値を求めるモード変位法は、19世紀から利用されている。応答変位の1階あるいは2階の微分で得られる音圧や応力などは、応答変位より精度は下がることもあり、省略する高次のモードを補正するモード加速度法が1945年に開発され[10]、これが、MSC/NASTRANやANSYSなどの汎用ソフトに利用されている。これで満足であろうか。車両開発でよく言われることは車体の箱が決まれば60Hz周辺あるいは120Hz周辺等、特に下げたい周波数帯域が決まる。たとえそれが60Hz周辺だとしても、自動車車両モデルとなると、60Hzまでに、すでに100以上の固有モードが存在することになる。このような問題にモード加速度法を適用すると、1番目の固有モードから正確に求める必要があり現実的でない。サブスペース法のように興味のある周波数帯域だけ正確に求め、あとは補正することができれば相当の効率が得られる。そこで開発されたのが馬—萩原のモード法[5]である。図1で $U_s$ は補正項で固有モード $\phi_i$ は $m$ 次から $n$ 次まで求めればよい。 $Q_i = \frac{\phi_i^T F}{\omega_i^2 + 2j\omega_i\omega_c - \omega_c^2}$ である。K, C, Mはそれぞれ剛性・減衰・質量行列、 $\Omega$ は入力の周波数、 $\omega_i = \sqrt{\mathbf{k}_i / \mathbf{m}_i}$ は $i$ 次の固有角振動数、 $\xi_i = \mathbf{c}_i / (2\mathbf{m}_i\omega_i)$ は $i$ 次のモード減衰比、 $j = \sqrt{-1}$ 、 $\mathbf{k}_i, \mathbf{c}_i, \mathbf{m}_i$ はそれぞれ $i$ 次の等価剛性・減衰・質量、 $\omega_c$ はある与えられた角振動数で、通常は $\omega_c = (\omega_m + \omega_n)/2$ である。同図で、 $m=1$ 、 $\omega_c \rightarrow \infty$ とすると、馬—萩原法はモード変位法に等しくなり、 $m=1$ 、 $\omega_c = 0$ とすると馬—萩原法はモード加速度法になるなど、パラメータを変更するだけで従来の技術に一致する意味で馬—萩原法は最も汎用的なもので、文献[5]などには、低次を省略すると、モード加速度法はモード変位法よりかえって精度が悪くなること、モード加速度法が得意な高次モードを省略する場合も馬—萩原法の精度はモード加速度法に勝ることが示されている[5]。

## (2) 構造音場連成問題

車室内騒音は車室を囲むパネルの振動で生ずる固体伝搬音が主である。車室を囲む鋼板と空気とでは剛性はけた違いに鋼板が高く通常はパネルが振動して音になるが、空

気音圧がパネル振動にも逆に影響を与える所謂音—構造振動の連成現象である。この場合、剛性、質量行列は  $K = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sa} \\ 0 & K_{aa} \end{bmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} M_{ss} & 0 \\ M_{as} & M_{aa} \end{bmatrix}$  のように非対称となり

運動方程式  $M\ddot{u} + Ku = f$  は

$$M_{ss}\ddot{u}_s + K_{ss}u_s + K_{sa}u_a = f_s$$

$$M_{as}\ddot{u}_s + K_{ss}\ddot{u}_a + K_{aa}u_a = 0$$

となる。一般固有値問題

$$K\phi = \lambda M\phi, \quad K^T\phi = \mu M^T\phi$$

あるいは同じことであるが、左固有ベクトルを求める一般化固有値問題  $\phi^T K = \mu \phi^T M$  を考える。ここで  $M_{ss}$  は正定値である(a)。 $M_{as}$  は長方形行列で、 $M_{ss}$  と  $K_{ss}$  は  $N_s$  次正方形行列、 $M_{aa}$  と  $K_{aa}$  は  $N_a$  次正方形行列である。一般に  $N_s$  次の複素縦ベクトルを  $\phi_s$ 、 $N_a$  次の複素縦ベクトルを  $\phi_a$  などと示すと、条件(a)は  $\phi_s$  が零ベクトルでなければ  $(M_{ss}\phi_s, \phi_s) > 0$  となる。

ここで、つぎのような複素内積を用いる。

$$(\phi_s, \psi_s) = \sum_{j=1}^{N_s} \phi_s(j) \bar{\psi}_s(j),$$

$$\phi_s = \{\phi_s(j)\}_{1 \leq j \leq N_s}, \quad \psi_s = \{\psi_s(j)\}_{1 \leq j \leq N_s}$$

まず、一般固有値問題  $K\phi = \lambda M\phi, \quad K^T\phi = \mu M^T\phi$  は同じ固有値を有することに注意しよう。実際、KとMは実行列で、それぞれの固有方程式において  $\det(K - \lambda M) = \det(K^T - \lambda M^T)$  となる。さらに次の命題を得ることによって、連成系でのモード合成法の適用が可能となった

(命題1) 右および左固有値問題のすべての固有値および固有ベクトルはつねに実数。

(命題2) 左固有ベクトル  $\psi^T = (\psi_s^T, \psi_a^T)$  は、右固有ベクトル  $\phi^T = (\phi_s^T, \phi_a^T)$  によって次式で求めらる。

$$\psi^T = (\phi_{si}^T, \frac{1}{\lambda_i} \phi_{ai}^T) \quad (1)$$

(命題3) 連成系の直交条件

$\psi_i^T M \phi_j = 0, \quad \psi_i^T K \phi_j = 0 \quad (\text{for } i \neq j)$  は式(1)を用いると、次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_{si}^T K_{ss} \phi_{sj} + \phi_{si}^T K_{sa} \phi_{aj} + \frac{1}{\lambda_i} \phi_{ai}^T K_{aa} \phi_{aj} &= 0 \\ \phi_{si}^T M_{ss} \phi_{sj} + \frac{1}{\lambda_i} (\phi_{ai}^T M_{as} \phi_{sj} + \phi_{ai}^T M_{aa} \phi_{aj}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{for } i \neq j) \quad (2)$$

(命題4) 右固有ベクトルの質量に関する正規化条件

$$\psi_i^T M \phi_i = 1$$

$$\phi_{si}^T M_{ss} \phi_{si} + \frac{1}{\lambda_i} (\phi_{ai}^T M_{as} \phi_{si} + \phi_{ai}^T M_{aa} \phi_{ai}) = 1 \quad (3)$$

で表される。本方法により、これまでこの連成系の解析の主流であったマクニールらによる手法[11]のように、自由度数を二倍にすることなく、係数行列を対称化することが可能となった。これにより、固有モードの感度係数の表現が可能となった。

## 3. 音響振動の重要な解析技術への展開

### (1) 固有値・固有モード感度解析

つぎのような構造系の固有値問題を考える。

$$(K - \lambda_j M) \phi_j = 0 \quad (4)$$

ここに、 $\lambda_j$  は系の固有値、 $\phi_j$  は固有ベクトル、K, M はそれぞれ系の剛性行列と質量行列。単なる構造の場合には、系の固有ベクトルについて

$$\phi_i^T K \phi_j = 0, \quad \phi_i^T M \phi_j = 0 \quad (\text{for } i \neq j) \quad (5)$$

の直交条件と、

$$\phi_i^T M \phi_i = 1 \quad (6)$$

の正規化条件が成立する。系の設計変数を  $\alpha_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) とし、式(4), (6)を設計変数  $\alpha_k$  で偏微分すると、

$$-\lambda_j' M \Phi_j + (K - \lambda_j M) \Phi_j' = -(K' - \lambda_j M') \Phi_j \quad (7)$$

$$\Phi_j^T M \Phi_j' = -\frac{1}{2} \Phi_j^T M' \Phi_j \quad (8)$$

が得られる。ここに、 $\lambda_j'$ 、 $\Phi_j'$ はそれぞれ固有値 $\lambda_j$

固有モード $\Phi_j$ の設計変数 $\alpha_k$ に関する感度である。式(7)に $\Phi_j$ の転置を左から乗じ、かつ、 $\Phi_j^T (K - \lambda_j M) = 0$ を利用すれば、固有値感度

$$\lambda_j' = E_{jj} \quad (9) \quad E_{jj} = \Phi_j^T (K' - \lambda_j M') \Phi_j \quad (10)$$

である。ただし、 $\Phi_j^T M \Phi_j = 1$ とする。

固有モード感度については式(7)が、つぎのように通常の線形方程式に書けることを用いて求められる。

$$A_j \Phi_j' = b_j \quad (11)$$

$$A_j = K - \lambda_j M, \quad b_j = \lambda_j' M \Phi_j - (K' - \lambda_j M') \Phi_j \quad (12)$$

しかし、式(11)の係数行列 $A_j$ は特異行列なので、そのままでは解が得られない。従来から次の方法が提案されてきている。

### (a) フォックスらのモード法[12]

モード変位法では、固有ベクトル感度 $\Phi_j'$ は次のように展開することができる。

$$\Phi_j' = \sum_{i=1}^n \Phi_i C_{ij}^0 \quad (13)$$

式(13)を式(7)に代入してさらに $\Phi_i^T$ を左から乗じ、かつ直交条件式(5)を用いれば

$$C_{ij}^0 = \frac{-1}{\lambda_i - \lambda_j} E_{ij} \quad (\text{for } i \neq j) \quad (14)$$

が得られる。ここに、

$$E_{ij} = \Phi_i^T (K' - \lambda_j M') \Phi_j \quad (15)$$

である。また、式(8)を用いると、係数 $C_{ii}^0$ は

$$C_{ii}^0 = -\frac{1}{2} \Phi_i^T M' \Phi_i \quad (16)$$

である。フォックスらの感度解析では、高次モードの省略により感度の精度が悪くなることがある。そのため、より正確な固有ベクトル感度を得るには、より多くのモードを計算してそれを感度解析に用いることが必要となる。これは基本的にはモード変位法の欠点によって生じたことで、フォックスらの方法の限界といえる。これに對して、1976年ネルソンにより提案された手法は、より効率的な手法であると評価されている。

### (b) ネルソンの方法[13]

ネルソンの方法とフォックスらの方法の違いは、前者では、展開式(13)を使わず、式(11)と(8)から直接固有ベクトルの感度 $\Phi_j'$ を求める点にある。系の全体自由度を $N$ とすれば、式(11)の係数行列は $N$ 階の特異行列である。問題の解を得るために、ネルソンの方法ではまず次のような非特異方程式の解 $X_j^0$ を求める。

$$\bar{A}_j X_j^0 = \bar{b}_j \quad (17)$$

ここに、 $\bar{A}_j$ は係数行列 $A_j$ の第 $k$ 行と第 $k$ 列のすべての要素を零に置き換え、そして $k$ 番目の対角項を1にした行列で、 $\bar{b}_j$ は $b_j$ の $k$ 番目の要素を零にしたベクトルである。また番号 $k$ は $\Phi_j$ の絶対値最大の成分の番号によって決める。そして、固有ベクトルの感度を

$$\Phi_j' = X_j^0 + C_j \Phi_j \quad (18)$$

とし、上式を式(11)に代入すると、

$$C_j = -\Phi_j^T M X_j^0 - \frac{1}{2} \Phi_j^T M' \Phi_j \quad (19)$$

が得られる。 $K'$ と $M'$ が厳密に得られると、ネルソンの方法により厳密な感度係数が得られる。ところがネルソンの方法では、一度に複数の固有モード感度係数が得られず非効率である。

### (c) 萩原一馬のモード法[14]

まず、式(11)の解はつぎのように得られる。

$$\Phi_j' = X_j + \sum_{i=m}^n \Phi_i C_{ij} \quad (20)$$

ここに、 $X_j$ はつぎの線形方程式

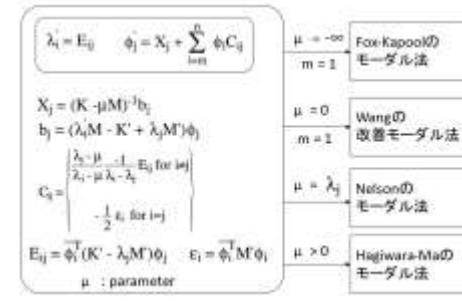


図2 萩原一馬の感度解析式と従来の感度解析式との関係

$$(K - \mu M) X_j = b_j \quad (21)$$

の解で、

$$C_{ij} = \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_i - \mu} \frac{\Phi_i^T b_j}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (22)$$

である。式(12)の $b_j$ を式(22)に代入すれば

$$C_{ij} = \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_i - \mu} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} E_{ij} \quad (\text{for } i \neq j) \quad (23)$$

が得られる。ここに、式(22)により分母が0となるので $C_{ii}$ は不定となる。ところが、従来のように、式(20)を正規化条件式(8)に代入すれば

$$C_{ii} = -\Phi_i^T M X_j - \frac{1}{2} \Phi_i^T M' \Phi_i \quad (24)$$

が求められる。一般の場合( $\mu = \lambda_j$ の場合を除く)には、次のような式が得られる。

$$\Phi_i^T M X_j = 0 \quad (25)$$

そして $C_{ii} = C_{ii}^0$ となる。特別な $\mu$ を与えることによつて、萩原一馬のモード法は従来の感度解析手法に退化することができる。すなわち、もし、 $\mu \rightarrow -\infty$ とすれば、式(21)により $X_j \rightarrow 0$ となり、また式(23)の $C_{ij}$ は

$$C_{ij} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} E_{ij} = C_{ij}^0 \quad (\text{for } i \neq j) \quad (26)$$

となる。従つて、萩原一馬のモード法はフォックスらのモード法に退化する。もし $\mu = \lambda_j$ とすれば式(23)によつて $C_{ij}$ ( $\text{for } i \neq j$ )は零となり、式(20)は

$$\Phi_j' = X_j + C_{ij} \quad \Phi_j = X_j^0 + C_j \Phi_j \quad (27)$$

となる。したがつて、萩原一馬のモード法はネルソンの方法に退化する。またもし $\mu = 0$ とすれば式(63)の $C_{ij}$ は

$$C_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} E_{ij} \quad (\text{for } i \neq j) \quad (28)$$

となり萩原一馬のモード法はモード加速度法をベースとするヴァングの改善モード法[15]に退化する。以上の関係を図2に示す。

### (2) 部分構造合成法（区分モード合成法）

大規模で複雑な構造の振動騒音問題に対する有力な解法の一つに、区分モード合成法とか部分構造合成法などと称される手法がある。計算機の内部記憶容量などの制約から、構造全体を一度には解くことができないような大規模問題でも、構造をいくつもの小さな分系に分割ことにより解析を可能にする。部分構造合成法では、解析対象をいくつかの分系と称される部分構造に一旦分割し、分系内部の自由度をモード座標の導入などにより消去し、自由度を縮小したあとに再び合成する、という解析過程をとる。その利点は、少ない記憶容量で大規模問題を取り扱えることに加え、一部の構造変更に対して始めから解きなおす必要が

ないこと、実験で得られるモードモデルを直接利用できること、などにある。もともと部分構造合成法は、構造の低次振動においては、各部分の振動形状は非常に単純になるため、これをいくつかの区分モードなどの適当な関数で近似して応答を表現しようとしたものといえ、従来の研究は比較的低周波の応答解析が中心となっていた。しかし本題の、例えば車室内騒音に代表される構造一音場連成問題では、低次のモードも省略できることの重要さはすでに述べた通りである。これに対して従来の部分構造合成法ではその自由度縮小の過程において、高次モードは省略できても低次モードは省略できないため、解析の対象が高次振動になればなるほど解析に必要なモード数が増加し解析モデルの詳細化と相俟って解析効率の大幅な低下を招いている。そこでここでは、低次と高次のモードの省略可能な馬一萩原のモード合成法を基に、構造一音場連成問題の部分構造合成法による定式化を行うことにより高周波領域の応答でも少ないモード数で解析できることを示す。

#### (a) 部分構造合成法の定式

$$\begin{bmatrix} M_{sl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{sk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{sc} & 0 \\ M_{sa} & M_{skc} & M_{scs} & M_{sa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{sl} \\ \ddot{u}_{sk} \\ \ddot{u}_{sc} \\ \ddot{u}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{sl} & 0 & K_{sc} & K_{sa} \\ 0 & K_{sk} & K_{skc} & K_{sca} \\ K_{sc} & K_{sk} & K_{sc} & K_{sa} \\ 0 & 0 & 0 & K_{sa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sl} \\ u_{sk} \\ u_{sc} \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_a \end{bmatrix} \quad (29)$$

複数の構造の分系と音場で構成される系を考える。その運動方程式は集中質量を用い、分系内部に荷重が作用しないものとすれば次のように表せる。

ここに、係数行列の添字  $i (=1, 2, \dots, k)$  は分系の番号を、 $c$  は分系相互の結合部分の自由度に対応することを示す。式(29)より一つの構造の分系 I 内部に関する運動方程式を取り出すと、外部との相互作用に関する項を右辺に置いて、次のように書き表すことができる。

$$[M_{si}]\{\ddot{u}_{si}\} + [K_{si}]\{u_{si}\} = -[K_{sic}]\{u_{sic}\} - [K_{sia}]\{u_{sia}\} = \{f\} \quad (30)$$

ここで分系内部の変位  $\{u_{si}\}$  は、モード座標を用いれば次のように表すことができる。

$$\{u_{si}\} = \sum_{i=1}^{N_i} \{\Phi_{si}\} q_{si} \quad (31)$$

ここに、 $\{\Phi_i\}$  は分系の区分（拘束）モードを表し、 $N_i$  は分系内部の自由度数を示す。式(30)、(31)に対してモード合成法を適用し、高次、低次のモードを省略して  $m (> 1)$  から  $n (< N_i)$  次を用いるものとすれば、次式が得られる。

$$\{u_{si}\} = [\Phi_{si}]\{q_{si}\} + [G_i]\{u_{sc}\} + [G_{sia}]\{u_a\} \quad (32)$$

ここに、

$$[\Phi_{si}] = [\Phi_{sm}, \dots, \Phi_{sn}] \quad (33)$$

$$[G_i] = -\left( (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} - \sum_{i=1}^{N_i} \frac{\{\Phi_{sj}\} \{\Phi_{sj}^T\}}{\omega_i^2 - \omega_c^2} \right) [K_{sic}] \quad (34)$$

$$[G_{sia}] = -\left( (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} - \sum_{i=1}^{N_i} \frac{\{\Phi_{sj}\} \{\Phi_{sj}^T\}}{\omega_i^2 - \omega_c^2} \right) [K_{sia}] \quad (35)$$

式(34)、(35)の  $\omega_c$  は馬一萩原のモード合成法のパラメータである一定の角振動数である。音圧ベクトル  $\{u_a\}$  もモード座標に変換し、 $k$  次までのモードを用いるものとすればつぎのように表せる。

$$\{u_a\} = \sum_{i=1}^k \{\Phi_a\} q_a \quad (36)$$

式(35)、(36)をまとめて、次の変換関係式を得る。

$$\begin{bmatrix} u_{sl} \\ u_{sk} \\ u_{sc} \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{sl} & \cdots & 0 & G_{skc} & G_{sia} \\ 0 & \cdots & \Phi_{sk} & G_{skc} & G_{sia} \\ 0 & \cdots & 0 & I & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \Phi_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{sl} \\ q_{sk} \\ q_{sc} \\ q_a \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (37)$$

式(37)を式(29)に代入し、変換行列の転置を前からかけることにより、つぎの縮小された全体系の運動方程式を得ることができる。

$$[M] \{ \ddot{\tilde{u}} \} + [K] \{ \tilde{u} \} = \{ \tilde{f} \} \quad (38)$$

式(38)の自由度数は、境界部分の自由度数+分系内部の区分モード数であり、もとの運動方程式(30)に比べて、大幅に自由度数を縮小した方程式である。式(38)の係数行列は、構造一音場連成問題では依然として非対称であるが、左右の固有モードを導入することにより解き進めることができる。ここで例題で確認してみましょう。

#### (b) 実車両客室の構造一音場連成周波数応答解析例

図3に車両の構造振動一音場連成問題に区分モード合成法を利用する際の概念図を示す。図4は、4ドアセダン車両の(1)構造モデル、(2)客室音響モデルを示す。構造は部分構造数18に分割する。室内音場の部分構造数は1である。フロントサスペンション右用のショックアブソーバーを、振動入力点とする問題を取り上げる。構造モデルの節点数は3638、要素数5391、音場モデルの節点数728、要素数557と、かなり大きなモデルである。このように、車体形状が決まると、問題となる(室内騒音を特に下げたい)周波数帯域が決まる。ここでのそれは、200Hz - 400Hzである。馬一萩原のモード合成法では、高次に加えて、低次の固有モードも省略できるため、使用するモードの周波数範囲を100Hz~600Hz、 $\omega_c = 300\text{Hz}$ とし、全モードを利用する正解値と評価できる成果が得られている。



図3 構造振動一音場連成システムの区分モード合成法概念図



図4 車体構造振動（左）及び音場モデル（右）

ここでまず、計算時間を定評ある MSC/NASTRAN のスーパーエレメント法(SE法)と馬一萩原の方法とで表1に比較する。馬一萩原法による区分モード合成法はSE法に比し、精度が格段に優れているうえ、計算時間はSE法の4割程度である。

表1 馬一萩原法の区分モード合成法と  
スーパー要素法(SE法)との計算時間比較

CPU(秒)	提案手法	スーパー エレメント 法(NASTRAN)
物理座標でのFEM方程式の生成	8	8
CMSを使っての全構造の自由度数の削減	141	89
縮約構造の固有値解析	301	1044
縮約された方程式の求解と物理座標への再変換	34	52
トータル	484	1193

#### 4. 音響振動に有用な最適化解析技術

ここでは、MPOD(Most Probable Optimal Design)[9]及びインタラクティブエネルギー密度位相変更法[8]の概要を述べ、解析例は当日示す。

##### (1) 応答曲面法に拠る最適化 MPOD 法

MPOD法は2つのステップからなっている。ステップ1では、全設計領域から最適解が有りそうな領域を探査し、次のステップ2では、その領域の近似精度を向上させる。今回、基底関数として用いたホログラフィックニューラルネットワーク(以下、HNNと略記)は、入力データと出力データを複素平面上に写像することにより、その入出力関係を線形に表すことができる[17]。実数設計変数データ  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  を変換関数を用いて複素データへ変換する。

$$\phi_k(x_k) = \lambda^k e^{i\theta(x_k)} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (39)$$

線形関係は式(40)で表わされ、出力値Yはxの逆変換から求められる。

$$r(x) = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(X) \quad (40)$$

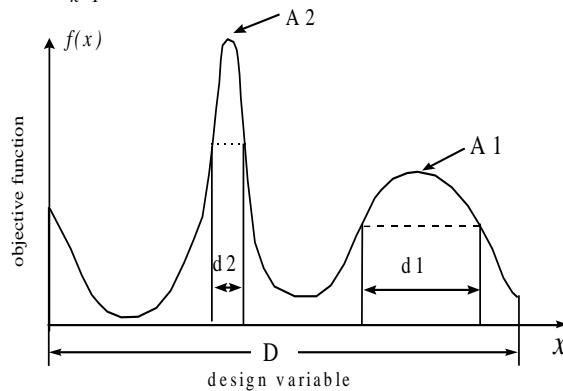


図5 多峰性関数の例

ここで、 $\alpha_k$ は応答曲面のモデル係数であり、学習により決定される。この学習データの選び方が、応答曲面の精度に影響を与える。

$$d_{\min} \leq \min \left( \|X_i - X_j\| \right), (i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j) \quad (41)$$

##### (a) MPOD—ステップ1—

一様分布乱数により、N個の初期学習点を決める。このとき式(41)の条件を付加することにより、近接した点を選ばないようにする。

ここで、 $d_{\min}$ は許容最短距離であり、その値の大きさによって近似精度と解析回数のトレードオフのバランスを取ることができる。図5に示すような多峰性関数形に対し、 $d_i$  ( $i=1, 2$ ) は領域の大きさで、その領域内の極大値の0.7倍より大きい区間長さである。 $d_{\min}$ を $d_i$ より小さく $d_2$ より大きく設定した場合には、ピークA2は近似できないが、ロバスト性の良いピークA1を近似できる。また、通常は  $N = (n+1)(n+2)/2$  とするが、詳細な精度が要求される場合や計算コストがかからない問題には $N$ を大きくし、逆にロバスト性の良い最適化が要求される場合や1回の試行計算の長い場合は $N$ を小さくする。得られた各学習点の応答値を求め、HNNに学習させ応答曲面を作成する。これより最適解  $\hat{X}_k$  を探す。最適解の収束判定を、式(42)により行う。

$$\frac{\|\hat{X}_k - \hat{X}_{k-1}\|}{\|\hat{X}_{k-1}\|} \leq \varepsilon_1 \quad (42)$$

ここでkは反復の回数である。もし満たされなければ学習点の追加を行う。追加学習点は、条件(41)を付加した  $\hat{X}_k$  を中心とする正規分布乱数を用いる。すなわち、正規分布乱数の分散  $\sigma_i$  を式(43)のように決定する。

$$\sigma_i = \alpha_i (\hat{X}_{i,k} - \hat{X}_{i,k-1}), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (43)$$

ここで、 $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) は分散の制御係数で、 $\sigma_i$  は  $\hat{X}_{i,k}$  の変化量によって決めるものである。さらに、 $\alpha_i$  の大きさを調整することによってトレードオフの関係を統合的に考慮することができる。すなわち、 $\alpha_i$  を大きく取ることによって学習点のバラツキは大きく、全領域にわたって応答曲面の近似精度が高く、試行点の数は多くなる。逆に、 $\alpha_i$  を小さく取れば、全領域にわたって応答曲面の近似精度が低く、学習点の数は少くなる。ただし、1回の反復では、一様分布乱数を用いる。追加学習点が決定したら、その応答値を求め、再びHNNに学習させ、最適解を求める。これを式(44)を満たすまで繰り返す。

##### (b) MPOD—ステップ2—

$\hat{X}_k$  をステップ1で収束した近似最適値を与える設計変数の値、 $f(\hat{X}_k)$ 、 $\hat{f}(\hat{X}_k)$  と  $g(\hat{X}_k)$ 、 $\hat{g}(\hat{X}_k)$  はこれに対応する目的関数と拘束関数の正解値と応答曲面から得られる近似値、および  $\varepsilon_2$  を収束の閾値として、式(44)、(45)の収束条件を満たせば、終了とする。そうでなければ、 $\hat{X}_k$  を追加学習点として再学習を行い、近似関数を更新する。

$$\frac{\|f(\hat{X}_k) - \hat{f}(\hat{X}_k)\|}{\|f(\hat{X}_k)\|} \leq \varepsilon_2 \quad (44)$$

$$\frac{\|g(\hat{X}_k) - \hat{g}(\hat{X}_k)\|}{\|g(\hat{X}_k)\|} \leq \varepsilon_2 \quad (45)$$

## (2) インタラクティブエネルギー密度位相変更法

本手法は、各固有周波数は、等価質量と等価剛性で決まるため、固有周波数を上げたい場合は、バネ部を補強するか、マス部に穴を空ける。逆に固有周波数を下げる場合は、バネ部に穴を設けるかバネ部を補強して位相を変化させるものである。著者は、均質化法や密度法による位相最適化解析を振動問題に適用し[18]、自動車設計にも応用している[19]。この経験から述べると、実際の設計にまで持っていくのは極めて難しいということである。これを解決すべく開発したのが、本手法である。インタラクティブに極めて効率よく複数の大幅な変更を司ることができることが示されている。本会でも佐々木淑恵らの講演を参照されたい[20]。

## 5. 結語

大規模な振動騒音連成問題を高速・高精度に解く手法をリストアップし著書にまとめている[21]が、その内容を中心に記述した。企業などで使用されている解析技術を凌駕すると考えており、今回の発表を機に紹介した手法の利用を進めて頂きたい。

## 参考文献

- [1] 萩原一郎, 津田政明, 佐藤佳裕, 有限要素法による薄肉箱型断面直部材の衝撃圧潰解析, 日本機械学会論文集(A編), 55巻 514号 (1989-6月), pp. 1407-1415.
- [2] 萩原一郎, 計算科学における夢・ロードマップ, 学術の動向, 12-17, 619(10), 3, 2014-10.
- [3] 萩原一郎, 応用数理の遊歩道—騒音振動・最適化ミュレーション, 応用数理, 31(2), pp. 34-37(2021年).
- [4] 長松昭男, 萩原一郎, 吉村卓也, 梶原逸朗, 雉本信哉, 音・振動のモード解析と制御, コロナ社(1996年).
- [5] 馬正東, 萩原一郎, 高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発, 第一報: ダンピング系の周波数応答解析, 日本機械学会論文集(C編), 57巻 536号 (1991-4月), pp. 1148-1155.
- [6] Hagiwara,I., Ma,Z.D., Arai,A. and Nagabuchi,K., Reduction of Vehicle Interior Noise Using Structural-Acoustic Sensitivity Analysis Methods, 1991 SAE 910208 Transaction Section 6(1992-4月), pp.267-276.
- [7] Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Meths Appl. Mech. Engrg.*, 71, (1988), pp. 197-224.
- [8] Sasaki,T., Yang,Y. and Hagiwara,I., Proposition of a New High Speed and High Efficiency Control Method for Plural

Eigen Frequencies by Changing Topology , International Journal of Mechanical Engineering and Applications 10(6), 2022-11, pp.135-143

- [9] Hagiwara,I., Global Optimization Method to Multiple Local Optimals with the Surface Approximation Methodology and Its Application for Industry Problems [Online First], DOI: 10.5772/intechopen.98907.(2021-9), pp.1-41.
- [10] Williams,D., Dynamic loads in aeroplanes under given impulsive loads with particular reference to landing and gust loads on a large flying boat, Great Bitaian RAE ReportsSME3309,3316(1945).
- [11] MacNeal,R.H., Citerley,R. and Chargin,M., A Symmetric modal formulation of fluid-structure interaction, ASME Paper 80-C2/PVP-117(1980).
- [12] Fox,R.L. and Kapoor,M.P., Rates of change of eigenvalues and eigenvectors, AIAA Journal, 6,12,pp.2426-2429(1968).
- [13] Nelson,R.B., Simplified calculation of eigenvector derivatives, AIAA Journal, 14,9,pp.1201-1205(1976).
- [14] 萩原一郎, 馬正東, 高次と低次のモードの省略可能な新しいモード合成技術の開発, 第二報: 固有モード感度解析への適用, 日本機械学会論文集(C編), 57巻 539号 (1991-7月), pp. 2198-2204.
- [15] Wang, B. P., An improved approximate method for computing eigenvector derivatives, AIAA/ASME/ASCE/AHS 26<sup>th</sup> structures, Structural Dynamics and Materials Conf., Orlando, FL(1985. 4).
- [16] 依知川哲治、萩原一郎、大規模高周波振動応答問題のための部分構造合成法とこれに基づく減衰系の周波数応答解析、日本機械学会論文集(C編)、60巻 569号(1994-1月)、pp10-15.
- [17] Tenek,L.H. and I. Hagiwara,I., Static and Vibrational Shape and Topology Optimization Using Homogenization and Mathematical Programming, Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg. , Vol.109 (1993-10月), pp.143-154.
- [18] Tenek,L.H. and I. Hagiwara,I., A Substructure Method Incorporating Homogenization for Finding Optimum Vehicle Body Panel Topologies JSME International Journal Series I, Vol.38, No.1(1995-1月), pp.44-51.
- [19] 萩原一郎、自動走行車に必要な安全・安心確保のための基盤技術の構築に向けて、シミュレーション, Vol. 40, No. 4 (2021-12), pp. 209-216.
- [20] 佐々木淑恵, 楊陽, 米大海, 萩原一郎, 最適化法援用エネルギー密度法による固有周波数制御に関する検討、計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023年5月).
- [21] 萩原一郎、橋口真宜、米大海、エスマトラ、次世代のものづくりに役立つ振動・波動系の有限要素解析とその応用、近代科学者(近刊予定) .