計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)　計算工学会

低容量ルンゲクッタ法の非圧縮性流体への適用

Application of low-strage explicit Runge-Kutta scheme to the computation of incompressible flows

岩津　玲磨 1)
Reima IWATSU

1)博 (工) 東京電機大学（〒 120-8551 東京都足立区千住旭町 5 千住キャンパス, E-mail: iwatsu@cck.dndai.ac.jp)

Low-storage explicit Runge-Kutta (RK) scheme is applied to the time-marching computation of incompressible fluid flows. RK schemes have advantages to the conventional Adams-Bushforth method in the stability property and ability to offer tuned coefficients for particular usage. For the application of RK schemes to the incompressible flows, however, numerical difficulty arises when projection method is combined. In the present report, two types of methods are discussed: projection method, and the pressure Poisson equation (PPE) method.

Key Words : *Runge-Kutta scheme, Low-storage algorithm, projection method, incompressible fluid flows*

1. はじめに

非圧縮性流体の数値計算で広く用いられている時間積分法にアダムス・バッシュフォース (AB) 法とクランク・ニコルソン (CN) 法の混合時間積分法がある．この方法は陰解法陽解法混合 (IMEX) 法 [1] の 1 種として分類でき，様々な長所を持つために有用であり，IMEX 法の範疇においては，AB-CN 法よりさらに広い安定領域を持つ最適化法が求められている．

IMEX 法は非圧縮への適用が容易である長所を持つ一方で，線形多段階 (LMS) 法を含むために時間精度の増加とともに安定領域が狭くなる短所を持っている．これに対して，ルンゲ・クッタ (RK) 法は段数の増加とともにより安定になり，また，係数の決定に自由度があることを生かして目的に応じた最適化が可能である．

しかし，RK 法の非圧縮への適用においては三つの問題点が指摘されている．一番目の問題点は，ナビエ・ストークス (NS) 方程式が連続の式を伴っていることに起因する．NS 方程式と同じ連立方程式の構造を Brasey と Hairer [2] は半陽解法 (Half Explicit Method, HEM) と名付けた．HEM は通常の RK より多くの位数条件が必要であるために，速度と圧力に同じ精度を与える RK 法の係数が限定されてしまう．

二番目の問題点は，非圧縮性を課す計算が数値的な困難を生じる場合のあることである．時間 2 次精度の範囲の射影法に対しては，誤差の性質が解明されているが [3]，RK 法における発散誤差の振る舞いに関しては，まだあまり理解が進んでいない．スカラー関数を用いた射影法については Sanderse と Koren [4]，圧力のポアソン方程式を解く RK 法については筆者による解析 [5] がある．

三番目の問題点として，通常の RK 法は LMS 法以上に多くのメモリーを要する点が指摘される．この点に関しては，各種の低容量 (LS)RK 法が提案されており，最もメモリーを使わない LSRK 法 [6] では 2N 個のメモリーのみで N 変数の時間積分が可能である．このため，LSRK 法は空力音響，圧縮性，粒子法などの方程式の時間積分に用いられる．しかし，LSRK 法の非圧縮性への適用においては，二番目の問題点に関する解決法が充分には知られていない．

そこで本研究では，LSRK 法を IMEX 法として非圧縮性流れの時間積分に用いる場合に，射影に起因する非安定な誤差を発生させずに速度と同じ時間精度を持つ圧力を計算できる射影法の構築を目的として，解析をおこなう．

2. 計算方法

(1) 基礎方程式

非圧縮性流体の NS 方程式が基礎方程式で，それらに対して適切な初期条件と境界条件を与える．

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{u}_t=-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}-\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=\mathbf{b},\quad \mathbf{u}(t=0)=\mathbf{u}_0 \tag{2}$$

(2) 陽的ルンゲ・クッタ (eRK) 法

RK 法の係数を a_{ij}, b_j, c_j，時間ステップサイズを h として，式 (1) の右側の式右辺を $\mathbf{F}$, 右辺から圧力項を除いたものを $\mathbf{F}^-$ とおくとき，M 段の RK 陽解法を式 (1) に適用すれば以下のようになる．

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{F}(t_0,\mathbf{u}(t_0)) \tag{3}$$

$$\mathbf{F}_i=\mathbf{F}\left(t_0+c_ih,\ \mathbf{u}_0+h\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\mathbf{k}_j\right)\qquad i=2,M \tag{4}$$

$$\mathbf{u}(t_0+h)=\mathbf{u}(t_0)+h\sum_{j=1}^{M}b_j\mathbf{F}_j \tag{5}$$

(3) 低容量ルンゲ・クッタ (LSRK) 法

Williamson, Carpenter と Kennedy [6] らによる形式を採

用すると，M 段のアルゴリズムは下記のように書かれる．

$$d\mathbf{u}_j = A_j d\mathbf{u}_{j-1} + h\mathbf{F}_j \tag{6}$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j-1} + B_j d\mathbf{u}_j \qquad j = 1, M \tag{7}$$

ただし，$A_1 = 0$ である必要がある．ベクトル $\mathbf{u}$ と $d\mathbf{u}$ のみを記録すればよいため，このアルゴリズムは $2N$-容量しか必要としない (ただし，N はベクトルの次元).

eRK スキームの係数との関係は以下となる．

$$B_j = a_{j+1\,j} \qquad j \neq M \tag{8}$$

$$B_M = b_M \tag{9}$$

$$A_j = (b_{j-1} - B_{j-1})/b_j \qquad j \neq 1,\ b_j \neq 0 \tag{10}$$

$$A_j = (a_{j+a\,j-1} - c_j)/B_j \qquad j \neq 1,\ b_j = 0 \tag{11}$$

(4) RK-圧力ポアソン方程式 (PPE) 法

時間積分にオイラーの陽解法を用いる場合には，NS 方程式 (1) の発散を取ることで圧力ポアソン方程式 (PPE) を導出できるが，RK スキームを用いる場合には PPE のソース項に時刻の異なる圧力値が含まれてしまうことになる．このことが，RK スキーム-PPE 法で圧力の振動が誘発されやすい原因と推定されている [5]．2 次の射影法に関しては圧力の振動を引き起こすモード解析が行われている [8] が，RK-PPE 法に関する解析文献は見当らないものの，2 次の射影法と類似の状況になっていると推測される．

圧力増分法の数値的不安定性は，RK スキームを通常の’フラックス形式’ (4) から’加速度形式’に書き換えてから，発散を取り PPE を導き出すことで，解決できる (RK-cPPE 法) [5]．アルゴリズムは次のようになる．$\mathbf{u}(t_0 + c_i h) \fallingdotseq \mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}(t_0) \fallingdotseq \mathbf{u}^n$, $\mathbf{u}(t_0 + h) \fallingdotseq \mathbf{u}^{n+1}$ とおけば，$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0, i = 2, M$ に対して

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{i\,j}\mathbf{F}_j \quad \text{in} \ \ \Omega, \qquad \mathbf{u}_i\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}_i \tag{12}$$

$$\nabla^2 p_i = \nabla\cdot\mathbf{F}_i^- + \frac{D_0}{a_{i+1\,i}h} - \sum_{j=1}^{i-1} e_{i\,j}\frac{D_{j+1} - D_0}{a_{j+1\,j}h} \quad \text{in} \ \ \Omega, \tag{13}$$

$$\nabla p_i\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = \left(\mathbf{F}_i^- - \sum_{j=1}^{i-1} e_{i\,j}\frac{\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_0}{a_{j+1\,j}h}\right)\cdot\mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega} \tag{14}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_0 + h\sum_{j=1}^{M} b_j\mathbf{F}_j \quad \text{in} \ \ \Omega, \tag{15}$$

$$\mathbf{u}^{n+1}\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}^{n+1} \tag{16}$$

$$\nabla^2 p_M = \nabla\cdot\mathbf{F}_M^- + \frac{D_0}{b_M h} - \sum_{j=1}^{M-1} e_{i\,j}\frac{D_{j+1} - D_0}{a_{j+1\,j}h} \quad \text{in} \ \ \Omega, \tag{17}$$

$$\nabla p_M\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = \left(\mathbf{F}_M^- - \frac{\mathbf{b}^{n+1} - \mathbf{b}_0}{b_M h} - \sum_{j=1}^{M-1} e_{s\,j}\frac{\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_0}{a_{j+1\,j}h}\right)\cdot\mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega}. \tag{18}$$

ただし，$D = \nabla\cdot\mathbf{u}$，係数 $e_{i\,j}$ は $a_{i\,j}, b_j$ から再帰的に定義され，たとえば $M = 3$ の場合には以下のようになる．

$$e_{11} = 1,\ e_{22} = 1,\ e_{21} = -\frac{a_{31}}{a_{32}}, \tag{19}$$

$$e_{33} = 1,\ e_{32} = -\frac{b_2}{b_3}, \tag{20}$$

$$e_{31} = -\left(\frac{b_1}{b_3} - \frac{b_2}{b_3}\frac{a_{31}}{a_{32}}\right) \tag{21}$$

(5) 簡略化 RK-cPPE 法

RK 法における発散誤差の振る舞いについては，まだよく理解されていない点がある [4]．上記 RK-cPPE 法では，RK 各段における圧力をすべて求めて，各段における速度ベクトルが非圧縮であることを課していたが，安定に時間積分できるのであれば，これらの計算をすべて省略して，各時間ステップで 1 回だけ圧力を求めることが考えられる．この方法を仮に RK-scPPE 法と名づけることにする．

(6) RK-P(projection)-PPE 法

PPE 法で計算される圧力には，物理的な圧力 (動圧) の意味と，速度ベクトル $\mathbf{u}^{n+1}$ に非圧縮性 $D^{n+1} \equiv 0$ を強制するふたつの役割が与えられている．非圧縮性流体に対する物理的な圧力ポアソン方程式には本来発散の補正項は不要であるので，はじめに速度場の射影を取り，そののちに PPE を解く方法が考えられる．この方法を仮に RK-P-PPE 法と呼ぶことにする．RK-cPPE 法，簡略化 RK-cPPE 法が時間 1 ステップの進行に M 回ポアソン方程式を解かなければならないのに対して，RK-P-PPE 法は 2 回ですむため，$M \geq 2$ に対して計算時間の面から有利である．

(7) LSRK-P-PPE 法

NS 方程式 (1) 右辺の非線形項，圧力勾配項，拡散項をそれぞれ $-\mathbf{N}, -\nabla p, \mathbf{L}$ とおく．$-\mathbf{L}$ を LSRK スキームで M 段時間進行したのち，$\mathbf{L}$ を台形公式で取り扱い，M 段において射影を取ることで，次ステップの $\mathbf{u}$ を求める．圧力は次ステップにおいて計算する．

3. 計算結果

当日発表予定である．

参考文献

[1] Ascher, U. M., Ruuth, S. J., and Wetton, B. T. R., Implicit-Explicit methods for time-dependent partial differential equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 32, No. 3, pp. 797-823, 1995.

[2] V. Brasey, E. Hairer, Half-explicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 2, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 30, pp. 538–552, 1993.

[3] Brown, D. L., Cortez, R. and Minion, M. L., Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations, J. Comput. Phys., Vol. 168, pp. 464–499, 2001.

[4] B. Sanderse and B. Koren, Accuracy analysis of explicit Runge–Kutta methods applied to the incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., Vol. 231, pp. 3041-3063, 2012.

[5] Iwatsu, R., Stable and consistent Runge-Kutta pressure Poisson equation method for the computation of unsteady incompressible flows, Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol. 64, pp.51-59, 2018.

[6] Carpenter, M. H. and Kennedy, C. A., Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes, NASA TM 109112., 1994.

[7] Gresho, P. M., On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 1: Theory, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 11, pp.587-620, 1990.

[8] E, W. and Liu, J.-G., Projection method II: Godunov-Ryabenki analysis, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 33, pp.1597-1621, 1996.