

微分作用素の基本解と特解に基づいた 非圧縮性粘性流れの低コスト3次元数値解法の開発

Development of Three-Dimensional Solver for Incompressible Viscous Fluid Flow
based on Fundamental and Particular Solutions of Differential Operator

山田 義博¹⁾ 登坂 宣好²⁾
Yoshihiro Yamada and Nobuyoshi Tosaka

¹⁾博(工)日本製鉄(株) (〒293-8511 千葉県富津市新富20-1, E-mail: yamada.38d.yoshihiro@jp.nipponsteel.com)

²⁾工博 Material speaks T-Lab. (〒192-0373 東京都八王子市上柚木3-9-1-211, E-mail: nob42tsk19@gmail.com)

In industrial numerical simulation of complex and large scale fluid flows, its computation cost must be reduced. We develop the numerical low cost three-dimensional solver for the incompressible fluid flows by means of BEM based on the fundamental and particular solutions of differential operator.

Key Words : Fundamental and Particular Solutions, Radial Basis Functions, Differential Operator, Dual Reciprocity Boundary Element Method, Regularized Integral Equation

1. はじめに

大規模数値流体解析の課題として、対象の複雑化、大領域化に伴う、モデル化・後処理への対応、計算精度の維持、向上、メッシュ品質維持が考えられる。一方、計算資源（コスト、時間、エネルギー）は有限であるため、CFDの計算精度維持＆コストの低減の両立が課題になってくる。

この課題の解決方法案として、計算機パワーによる解決、計算ソフト、アルゴリズムによる高速化、計算点・格子数の低減が考えられる。今回は、計算点・格子数の低減手法として境界要素法に着目し、BEMによる非圧縮性粘性流れ解析の高精度化を目標とする。

BEMによる非圧縮性粘性流れ解析は、線形問題に関しては、拡散作用素の基本解を用いた手法が提案されている。ただし移流項（非線形項）は領域積分となる[1][2]ため、計算量の低減に繋がらない。また、高レイノルズ数流れへの適用の課題もある。

今回提案手法の特徴は、時間差分により時間微分の基本解を使わないこと、移流速度の線形化、境界積分では基本解を用い、特解を用いて領域積分を境界積分に変換(DRM[3])することを特徴とする。著者らはこれまで2次元問題に対して提案手法を示してきた[4][5]が、今回は3次元に拡張して、適用可能性を検討した。3次元キャビティ流れに対しては、従来検討でスペクトル法を用いたもの[6]およびDRMを用いないBEM解析例[7]で $Re=1000$ までの計算がされており、今回の計算と比較した。

2. 定常流れの境界値問題

(1) 数理モデル

非圧縮性移流粘性流体の流れ現象に対する数理モデルは、運動方程式の応力テンソル式(1)、連続条件（非圧縮条件）(2)および構成方程式(3)に関する境界値問

題となる。

$$\rho u_j u_{i,j} = \mu \tau_{i,j,j} \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = -\frac{1}{\mu} P \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} \quad (3)$$

(3)式を(1)式に代入して(4)式のNavier-Stokes方程式を得る。

$$u_{i,jj} + u_{j,ij} - \frac{1}{\mu} P_j \delta_{ij} = \frac{1}{\nu} u_j u_{i,j} \quad (4)$$

ここで ν は動粘性係数、 μ は粘性係数、 ρ は密度である。このN-S方程式と(2)式を連立させることにより流速と圧力を決定する。その際、非線形の移流項を非同次項と考え、DRMを用いたBEMを適用する。従来は内部積分をするため、境界要素法の利点が活かせなかつたが、本研究では DRM を用いて内部積分を境界積分で近似する解析を行う。これによって、比較的簡易に計算が可能となる。この結果、境界のみの離散化による数値計算が可能となる。

行列表現では次のようになる。ただし、移流項の流速を線形化し、既知の値 U, V, W とする。

$$\begin{pmatrix} \Delta + D_1^2 & D_1 D_2 & D_1 D_3 & -\frac{1}{\mu} D_1 \\ D_2 D_1 & \Delta + D_2^2 & D_2 D_3 & -\frac{1}{\mu} D_2 \\ D_3 D_1 & D_2 D_3 & \Delta + D_3^2 & -\frac{1}{\mu} D_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} (UD_1u + VD_2u + WD_3u) \\ \frac{1}{\nu} (UD_1v + VD_2v + WD_3v) \\ \frac{1}{\nu} (UD_1w + VD_2w + WD_3w) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}) \quad (5)$$

これを次のように表す。

$$L_{ij}u_j = b_i, i = 1, 2, 3, 4 \quad (6)$$

内積を取って領域積分すると、次式が得られる。

$$\int_{\Omega} L_{ij}u_j \cdot v_i^* d\Omega = \int_{\Omega} b_i \cdot v_i^* d\Omega \quad (7)$$

式変形により次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L_{ij}u_j \cdot v_i^* d\Omega &= \int_{\Omega} b_i \cdot v_i^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (\tau_1 v_1^* + \tau_2 v_2^* + \tau_3 v_3^* - \sigma_1 u - \sigma_2 v - \sigma_3 w) d\Gamma + \int_{\Omega} u_j \mathcal{L}_{ij} v_i^* d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、traction tensor を次のように設定する。

$$\begin{aligned} \tau_i &= \tau_{ij} n_i = D_j u_i n_j + D_i u_j n_j - \frac{1}{\mu} p n_i \\ &\quad , i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (9)$$

対応する pseudo-traction tensor を次のように設定する。

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta} &= n_1 v_{\beta,1}^* + n_2 v_{\beta,2}^* + n_1 v_{1,\beta}^* + n_2 v_{2,\beta}^* - n_{\beta} v_3^* \\ &= n_{\gamma} (v_{\beta,\gamma}^* + v_{\gamma,\beta}^*) - n_{\beta} v_3^* = n_{\gamma} (v_{\beta,\gamma}^* + v_{\gamma,\beta}^* - \delta_{\beta\gamma} v_3^*) \\ &\quad , \beta = 1, 2, 3, \gamma = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (10)$$

(2) 逆定式化

L_{ij} の隨伴行列作用素 \mathcal{L}_{ij} は次のように計算される。

$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{pmatrix} \Delta + D_1^2 & D_1 D_2 & D_1 D_3 & -D_1 \\ D_2 D_1 & \Delta + D_2^2 & D_2 D_3 & -D_2 \\ D_3 D_1 & D_3 D_2 & \Delta + D_3^2 & -D_3 \\ \frac{1}{\mu} D_1 & \frac{1}{\mu} D_2 & \frac{1}{\mu} D_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

その余因子行列作用素 \mathcal{M}_{ij} は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij} &= \frac{\Delta}{\mu} \\ &\quad \begin{pmatrix} D_2^2 + D_3^2 & -D_1 D_2 & -D_1 D_3 & \mu D_1 \Delta \\ -D_1 D_2 & D_1^2 + D_3^2 & -D_2 D_3 & \mu D_2 \Delta \\ -D_1 D_3 & -D_2 D_3 & D_1^2 + D_2^2 & \mu D_3 \Delta \\ -D_1 \Delta & -D_2 \Delta & -D_3 \Delta & 2\mu \Delta^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

ϕ^* が基本解となるには、

$$\mathcal{L}_{ij} \mathcal{M}_{jk} \phi^* = (\det \mathcal{L}_{ij}) \delta_{ik} \phi^* = (\det \mathcal{L}_{ij}) \phi^* = -\delta(x - y) \quad (13)$$

となる必要がある。ここで次の基本解テンソル V^* を用いて

$$\mathcal{M}_{jk} \phi^* = V_{ki}^* \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_{ij} V_{kj}^* = -\delta(x - y) \quad (15)$$

を利用して (8) 式を書き換えると、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L_{ij} u_j \cdot V_{kj}^* d\Omega &= \int_{\Omega} b_i \cdot V_{kj}^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (\tau_{\alpha} V_{\lambda\alpha}^* - \Sigma_{\lambda\alpha}^* u_{\alpha}) d\Gamma + \int_{\Omega} u_j \mathcal{L}_{ij} V_{kj}^* d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

以上により、次の逆定式化が得られる。

$$\begin{aligned} u_{\lambda} &= \int_{\Gamma} (\tau_{\alpha} V_{\lambda\alpha}^* - \Sigma_{\lambda\alpha}^* u_{\alpha}) d\Gamma - \int_{\Omega} b_i \cdot V_{\lambda i}^* d\Omega \\ \lambda &= 1, 2, 3, 4, i = 1, 2, 3, 4, \alpha = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (17)$$

3. 解法

(1) 基本解

(17) 式についてその基本解である ϕ^* を用いた具体的な定式化を行う。L の余因子行列作用素 M は

$$M_{jk} = \frac{\Delta}{\mu} \begin{pmatrix} D_2^2 + D_3^2 & -D_1 D_2 & -D_1 D_3 & D_1 \Delta \\ -D_1 D_2 & D_1^2 + D_3^2 & -D_2 D_3 & D_2 \Delta \\ -D_1 D_3 & -D_2 D_3 & D_1^2 + D_2^2 & D_3 \Delta \\ -\mu D_1 \Delta & -\mu D_2 \Delta & -\mu D_3 \Delta & 2\mu \Delta^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

で

$$L_{ij} M_{jk} = (\det L_{ij}) \delta_{ik} \quad (19)$$

を満たすことから、

$$L = (\det L_{ij}) = \frac{1}{\mu} \Delta^3 \quad (20)$$

L_{ij} の隨伴行列作用素 \mathcal{L}_{ij} は

$$\mathcal{L} = (\det \mathcal{L}_{ij}) = \frac{1}{\mu} \Delta^3 \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_{ij} V_{ij}^* = (\det \mathcal{L}_{ij}) \phi^* \quad (22)$$

を満たすことから、 ϕ^* は次式で表される。

$$\phi^* = -\mathcal{L}^{-1} \delta(x - y) = -\mu \frac{1}{\Delta^3} \delta(x - y) = \frac{\mu}{96\pi} r^3 \quad (23)$$

(2) 基本解テンソル

基本解テンソル V^* を以下のように定式化する。

$$V_{\alpha\beta}^* = \mathcal{M}_{\beta\alpha} \phi^* = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{\beta\alpha}}{r} + \frac{(x_{\alpha} - y_{\alpha})(x_{\beta} - y_{\beta})}{r^3} \right) \quad , \alpha = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3 \quad (24)$$

$$V_{\alpha 4}^* = \mathcal{M}_{4\alpha} \phi^* = \frac{(x_{\alpha} - y_{\alpha})}{4\pi r^3} \quad (25)$$

$$V_{4\alpha}^* = \mathcal{M}_{\alpha 4} \phi^* = -\frac{\mu(x_{\alpha} - y_{\alpha})}{4\pi r^3} \quad (26)$$

また pseudo-traction tensor を次のように設定する。

$$\begin{aligned} \Sigma_{j\beta}^* &= n_1 V_{j\beta,1}^* + n_2 V_{j\beta,2}^* + n_3 V_{j\beta,3}^* \\ &\quad + n_1 V_{j1,\beta}^* + n_2 V_{j2,\beta}^* + n_3 V_{j3,\beta}^* - n_{\beta} V_{j4}^* \\ &= n_{\gamma} (V_{j\beta,\gamma}^* + V_{j\gamma,\beta}^*) - n_{\beta} V_{j4}^* = n_{\gamma} (V_{j\beta,\gamma}^* + V_{j\gamma,\beta}^* - \delta_{\beta\gamma} V_{j4}^*) \\ &\quad , j = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3, \gamma = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (27)$$

(3) 逆定式化の正則化

逆定式化を正則化 (regularization) することで、特異積分を避ける事ができる。

$$\int_{\Gamma} \Sigma_{\lambda\alpha}^* u_{\alpha}(y) d\Gamma = \int_{\Omega} u_{\lambda}(y) \mathcal{L}_{ij} V_{ki}^* d\Omega = -u_{\lambda}(y) \quad (28)$$

(17) 式に (28) 式を代入して以下の正則化式が得られる。

$$\int_{\Gamma} \tau_{\alpha} V_{\lambda\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \Sigma_{\lambda\alpha}^* (u_{\alpha}(x) - u_{\alpha}(y)) d\Gamma = \int_{\Omega} b_i \cdot V_{\lambda j}^* d\Omega \quad (29)$$

(4) 非同次項の内部積分

(17) 式を以下のように表記する。

$$(c\mathbf{I} + \mathbf{K})\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{t} = \mathbf{f} \quad (30)$$

ここで以下のように設定した。ただし、一定要素として積分表現と要素長さを省略している。

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \Sigma_{ka}^*, \mathbf{G} = V_{ka}^* \quad (31)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v}(UD_1u + VD_2u + WD_3u) \\ \frac{1}{v}(UD_1v + VD_2v + WD_3v) \\ \frac{1}{v}(UD_1w + VD_2w + WD_3w) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

(41) 式の非同次項を DRM[3] のアイデアを用いて次式で近似する。

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}_1 \alpha \quad (33)$$

ここで \mathbf{F} は境界点、内部点の距離 r を用いた Radial Basis Functions[8] の関数行列、 α はベクトルである。また、consistency[5] を評価するため、速度項を別の Radial Basis Functions で表現する。

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}_2 \beta \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{v} \quad (35)$$

以上により、(36) 式を用いて、内部点に関しては (37) 式、境界点に関しては正則化した (38) 式で表現できる。

$$\alpha = \frac{1}{v} \mathbf{F}_1^{-1} \left(\mathbf{V}_x \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} + \mathbf{V}_y \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} \right) \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{v}^n \quad (36)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K})\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{t} = (\mathbf{I} + \mathbf{K})\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{t}} \quad (37)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{t} = -(\mathbf{K}\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{t}}) \quad (38)$$

(36) 式は既知であり、(37)(38) 式の右辺は定数行列となるため、境界要素法で解くことができる。 \mathbf{S} を (39) 式のように置くと (40) 式のように書け、 \mathbf{v} または \mathbf{t} が既知の場合、境界要素法で解くことができる。

$$\mathbf{S} = \frac{\rho}{\mu} (\mathbf{K}\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{t}}) \mathbf{F}_1^{-1} \left(\mathbf{V}_x \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} + \mathbf{V}_y \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} \right) \mathbf{F}_2^{-1} \quad (39)$$

$$(\mathbf{K} + \mathbf{S})\mathbf{v} = \mathbf{G}\mathbf{t} \quad (40)$$

表-1 Coefficients for the Particular Solutions

case	c1	c2	c3	c4	c21	c22	c23	c24
1	0	1	0	0	0	1	1	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0
3	1	1	0	0	1	1	1	0
4	1	1	0	0	1	1	0	0

(5) 特解テンソル

\mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 の \mathbf{f} として、境界点、内部点 \mathbf{x} 要素点 \mathbf{y} との距離 r の radial basis functions(41) 式を選ぶ。

$$f(\mathbf{x}) = r^n, r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (41)$$

これに対応する特解は (42) 式のようになる。

$$\psi = \frac{\mu r^{n+6}}{(n+7)(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} \quad (42)$$

\mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 の \mathbf{f} として r の 3 次までの級数和を考えると、 $c_1 \sim c_4$ 、 $c_{21} \sim c_{24}$ を係数として、(43,44) 式のようになる。

$$f_1(\mathbf{x}) = c_1 + c_2 r + c_3 r^2 + c_4 r^3 \quad (43)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = c_{21} + c_{22} r + c_{23} r^2 + c_{24} r^3 \quad (44)$$

これに対応する特解は (45) 式のようになる (ψ_2 は省略)。

$$\psi_1 = \mu \left(c_1 \frac{r^6}{5040} + c_2 \frac{r^7}{20160} + c_3 \frac{r^8}{60480} + c_4 \frac{r^9}{151200} \right) \quad (45)$$

係数の選び方には自由度があるが、現状ではより良い係数の選び方は不明である。そこで、表1のように、4 ケースを設定して収束状況を比較する。case1,3 が consistency を考慮した係数であり、case2, 4 は Partridge[3] の方法である。以上の準備により、(37) 式、(38) 式に示す DRM 表現が計算できる。特解テンソルは次のように与える。

$$W_{\alpha\beta}^p = \mathbf{M}_{\alpha\beta} \psi = \frac{1}{\mu} (\Delta \delta_{\beta\alpha} - D_{\beta\alpha}) \psi \quad (46)$$

$$W_{\alpha 4}^p = \mathbf{M}_{\alpha 4} \psi = \frac{1}{\mu} D_{\alpha} \Delta \psi \quad (47)$$

$$W_{4\alpha}^p = \mathbf{M}_{4\alpha} \psi = -D_{\alpha} \Delta \psi \quad (48)$$

$$W_{44}^p = \mathbf{M}_{44} \psi = 2\Delta^2 \psi \quad (49)$$

特解 traction テンソルは次のように与える。

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}^p = n_{\lambda} (W_{\lambda\beta,\alpha} + W_{\alpha\beta,\lambda} - \frac{1}{\mu} \delta_{\alpha\beta} W_{3\beta}) \quad (50)$$

4. 計算手順

計算手順を、図-0 に示す。まず、係数行列、DRM の行列 \mathbf{F} の逆行列を求める。ここまでが準備段階である。

DRM の計算は 1 ステップ目では、初期状態すなわち、初期状態での流速と圧力を用いて DRM の係数行列を計算し、DRM を計算し、得られた流速と圧力を

出力する。

計算継続の場合は、nステップ目のiterationではn-1ステップ目での流速と圧力を用いてDRMの係数行列を計算し、DRMを計算する。

このように、準備段階は1回のみであり、DRM計算は計算時間としては短いことが予想される。

計算時間の評価は、準備段階とDRM1ステップの計算時間に分けて計測した。

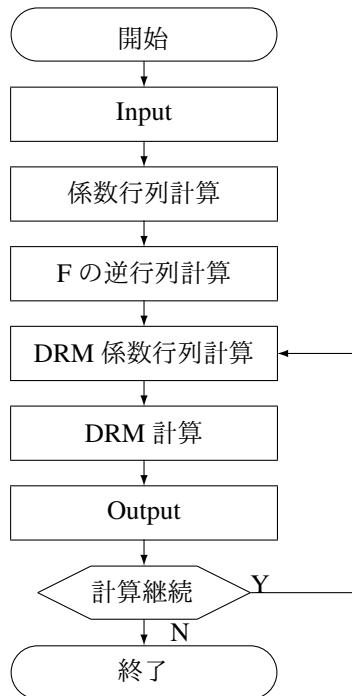


図-0 計算手順

5. 3次元キャビティ流れへの適用

(1) 計算条件と評価方法

3次元キャビティ流れにDRM計算を適用した。

計算領域として1辺の長さ1[m]で原点を中心とし、z=0.5の面を流速1[m/s]でx軸と平行に正方向に動かし、他の面を静止壁とした。Re=100,400,1000とした。各iterationでは前のiterationで得られたuvwを用いてDRM計算を行った。iterationは50回まで行い、速度uの絶対値の計算領域内の最大値を用いて収束判定を行った。

計算は1ノード12並列計算とした。事前に並列数を1, 2, 12で計算し、ほぼ同じ結果を得たので、並列化に伴うデータ依存性は回避出来ていると考えた。

(2) 計算時間

表-1に1辺の分割数N0に対する境界点数Nと内部点数L、未知数としての速度3成分の数(N+L)*3を示す。行列Aの要素数は $(3(N+L))^2$ となることに注意して、計算並列数に対する係数計算時間、1ステップ当たりのDRM計算時間、必要なメモリのオーダーを示す。行列要素数に対する計算時間は、N0の6乗で増加する。また、分割数N0=30以上はメモリ不足で計算が出来なかった。

図1にu,v,w,pの未知数の数と計算時間の実績を示す。

表-2 Computational time

N0	(NN+L)*3	並列数	係数計算時間 hr	DRM計算時間 hr	必要メモリ GB
15	14175	1	3.6	0.17	2
15	14175	12	0.75	0.13	2
20	31200	1	108	1.6	8
20	31200	12	12	1.3	8
30	97200	12	NG	NG	80

予想通り、係数計算に主として計算時間がかかるており、DRM計算ではその1割程度と比較的少なかった。

(3) 収束状況

図2,3,4にiterationに対する速度uの絶対値の計算領域内の最大値を示す。この値が1となった場合、収束したと考えられる。計算は、振動しており、収束したように見えるステップでの結果を表示した。分割数N0=15に対しては、consistencyが取れているcase1については収束したように見えるiterationは存在したが、case3については収束したiterationは無かった。N0=20に対してはcase1についても収束したiterationは無かった。

(4) 流速分布

計算結果は従来検討[6]と同様にxy側面、xz側面から流速ベクトルを俯瞰するとともに、x=0での面の流速分布を表示した。

図5はxy面、つまり駆動面を上面としたときのその側面からの全流速ベクトルである。駆動面により、Cavity内に循環流が発生しているように見える。

図6はxz面、つまり駆動面上面からの全流速ベクトルである。進行方向に若干外向きになっており、Ku[6]と対応した結果となっている。

図7はx=0の中央断面での流速分布であり、Ku[6]より低Reの流速ベクトル分布となって緩和されているようである。

図8はx=0,z=0でのy軸に沿った流速uの分布であり、Ku[6]の流速分布と比較した。今回の計算結果はKu[6]の値とは異なるが、Reが大きくなるに連れて流速が鈍っていく傾向は、同傾向であった。

6. 考察

(1) 計算点数とメモリ制約

3Dキャビティ流れに対して、一辺をN分割する場合、差分計算では計算点数は N^3 に比例する。

上記の定式化から、DRMで使用される要素数について立方体内の流れ計算で使用する要素数を概算する。

表-2に3DでのBEMでの外表面の計算点数をNNとすると、 $NN = 6N^2$ であるが、DRMでは内部点として外表面と同じ分割で内部点を設定すると、 $L = N^3$ となり、計算点は合計 $NN + L = 6N^2 + N^3$ となる。

3D流体解析でDRMで流速u,v,wの表面、内部点を



図-1 未知数の数と計算時間

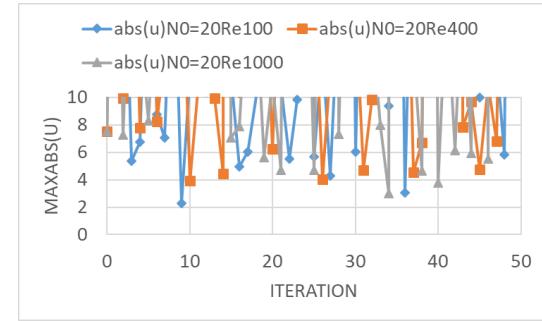


図-4 iteration に対する max(abs(u)) の推移、N0=20,case1

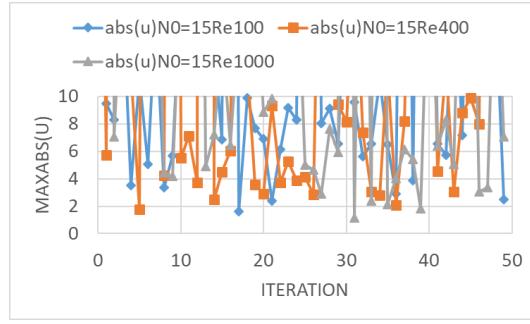


図-2 iteration に対する max(abs(u)) の推移、N0=15,case1

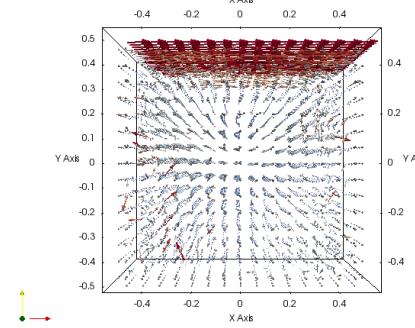
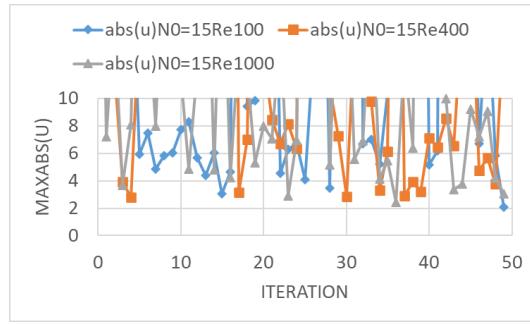
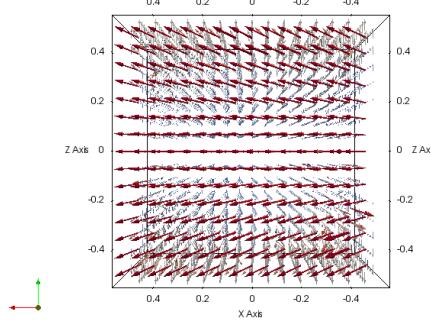
図-5 xy 側面、N0=15, $\nu = 1 \times 10^{-3}$ 

図-3 iteration に対する max(abs(u)) の推移、N0=15,case3

図-6 zx 側面、N0=15, $\nu = 1 \times 10^{-3}$

使用する場合、 $3(NN + L)$ 個の未知数を元とする連立 1 次方程式を解くために $3(NN + L) = 18N^2 + 3N^3$ 次の行列をの逆行列を求める必要があり、行列の要素数は $(3NN + 3L)^2 = (18N^2 + 3N^3)^2 \sim 9N^6$ となる。

$N=20$ とすると、逆行列を解かない差分法では要素数は 10^4 であるが、DRM の逆行列計算では 10^9 で 8GB のメモリを使用することになり、1 ノードの計算機での計算の上限となることがわかる。

表-3 に 2 D での要素数と必要メモリを概算する。2 D では分割数 $N=140$ 以上では、汎用のメモリでは計算が困難になると予想した。

以上により、DRM で計算負荷を減らすためには、領域分割等をする必要がある。

DRM を用いない BEM 解析例としては [7] がある。このケースでは要素数は約 5000 であり、メモリ制限に達していないが、要素数の 2 乗でメモリを使用するため、

この場合も領域分割等が課題となると考えられる。

スペクトル法を用いた従来検討 [6] では、1986 年に $Re=1000$ に対し、 $31 \times 31 \times 16 = 15376$ 格子点で 164 並列計算で 1 ステップ 20 秒で 25000 ステップで収束して、計算時間は約 140 時間であった。この計算と比較は容易ではないが、格子点数は今回の計算と同レベルであると考えられる。

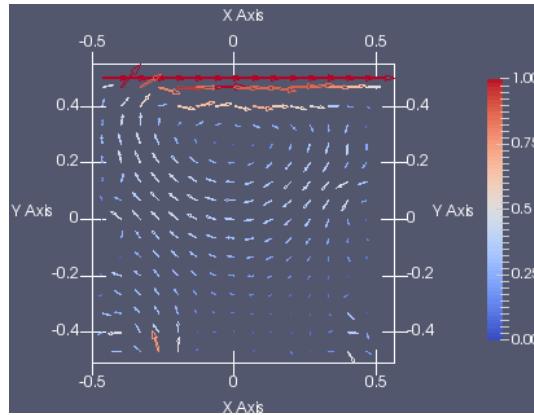
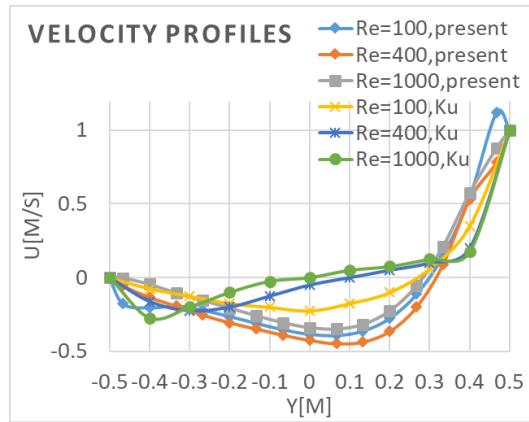
図-7 $z=0$ 断面、 $N=15$, $\nu = 1 \times 10^{-3}$ 図-8 $x=0, z=0$ での u 流速分布の Re 依存性比較

表-3 Estimation of Matrix and Memory Size for 3D Cavity flow

分割数 N	外表面点数 $NN = 6N^2$	内部点数 $L = N^3$	未知数の数 $(NN+L)*3$	必要メモリ GB
10	600	1000	4800	0.2
15	1350	3375	14175	2
20	2400	8000	31200	8
25	3750	15625	58125	30
100	60000	1×10^6	3×10^6	8×10^4

7. おわりに

大規模数値流体解析の課題である計算精度維持 & コストの低減の両立に対応するため、計算点・格子数の低減手法として境界要素法に着目し、BEMによる非圧縮性粘性流れ解析の高精度化を目標とし、時間差分により時間微分の基本解を使わず、境界積分では基本解を用い、特解を用いて領域積分を境界積分に変換する方法を検討した。

3次元計算を行ったところ、DRMでは内部点として境界点と同じ分割数を設定すると、要素数が分割数の6

表-4 Estimation of Matrix and Memory Size for 2D Cavity flow

分割数 N	外表面点数 $NN = 4N$	内部点数 $L = N^2$	未知数の数 $(NN+L)*2$	必要メモリ GB
15	60	225	570	0.003
50	200	2500	5400	0.2
60	240	3600	7680	0.5
100	400	10000	20800	3
140	560	19600	2×10^9	10

乗で増加するため、分割数は20程度が限界であることがわかった。これに対応するには、行列を分割することが必要であるが、密行列の分割に関しては新たな知見が必要である。

謝辞： 京都大学藤原宏志准教授には、並列計算に関して貴重な助言をいただいた。記して感謝を示す。

参考文献

- [1] 数値流体力学編集委員会編：非圧縮性流体解析、東京大学出版会、p.253、1995
- [2] 登坂宣好他：偏微分方程式の数値シミュレーション 第2版、東京大学出版会、p257、2003
- [3] P.W. Partridge, C.A. Brebbia and L.C. Wrobel: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, 1992
- [4] 山田、登坂：微分作用素の基本解と特解に基づいた低コスト非圧縮性粘性流れ解析数値スキームの開発、計算工学講演会論文集 Vol. 27, 2022
- [5] Yoshihiro Yamada and Nobuyoshi Tosaka :Development of low-cost solver for incompressible viscous fluid flow based on the fundamental and particular solutions of differential operator, 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV), 2022
- [6] Hwar C.Ku, Rishard S. Hirsh, and Thomas D. Taylor : A Pseudospectral Method for Solution of the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, Journal of Computational Physics, 70, pp439-462, 1987
- [7] Xiao-Wei Gao: A promising boundary element formulation for three-dimensional viscous flow, Int. J. for Numer. Meth. Fluids, 47, pp19-43, 2005
- [8] C.A.Bustamante, H. Power, Y.H. Sua, W.F. Florez: A global meshless collocation particular solution method (integrated Radial Basis Function) for two-dimensional Stokes flow problems, Applied Mathematical Modelling 37, pp4538-4547, 2013