

水際線の移動を有する浅水長波流れ解析に対する DG有限要素法における安定化

Stabilization in Discontinuous Galerkin FEM for Shallow Water Flow with Moving Boundary for Water Front

松本礼央¹⁾, 田中聖三²⁾, 浅井光輝³⁾

Reo Matsumoto, Seizo Tanaka and Mitsuteru Asai

1) 九州大学大学院工学府土木工学専攻 (〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: r-matsumoto@doc.kyushu-u.ac.jp)

2) 広島工業大学工学系研究科建設工学専攻 (〒731-5193 広島市佐伯区三宅2-1-1, E-mail: s.tanaka.iz@cc.it-hiroshima.ac.jp)

3) 九州大学大学院工学研究院社会基盤部門 (〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

Shallow water equations are widely used for river flooding, storm surge, tsunami, and other natural disaster simulations. In this context, a continuous Galerkin (CG) method with artificial viscosities and stabilizers has often been used to discretize the space. Although the CG method can produce robust simulations, the numerical solution cannot satisfy conservation laws of mass, momentum and flux on the finite element edges. Then, a discontinuous Galerkin (DG) method, which is effective and promising tools for the hyperbolic equations with discontinuities, has been expected for the next generation numerical simulation tool. In this study, the DG method is applied to the spatial discretization for the shallow water equations, and wetting-drying algorithm and slope limiter are discussed for our purpose. The proposed method has been verified with two fundamental examples. In addition, we find that the proposed method provides better performance in its accuracy than that of CG method.

Key Words : Shallow water equations, Discontinuous Galerkin method, FEM, Wetting-drying algorithm

1. 緒言

河川の氾濫や高潮などの数値解析には、浅水長波方程式が広く用いられている。浅水長波方程式は双曲型の偏微分方程式であり、不連続な解を有することによる数値不安定性が生じるため、空間の離散化にCG (Continuous Galerkin) 法に基づく安定化有限要素法が多く用いられてきた。しかし、CG法では、人工粘性による解のなまりや、質量保存などの保存則を厳密に満足できないなどの問題点がある。そこで、保存性を満足できる有限体積法の良さをもち併せるDG (Discontinuous Galerkin) 法[1]が期待されている。DG法は、浅水長波方程式などの不連続な解を有しやすい双曲型方程式の解析に対して有効であり[2,3]、要素境界でのFluxの収支を考慮して解析を行うため、局所的な保存性を満足できるという性質を持つ。本研究では、浅水長波方程式の高精度かつ高効率な数値解析手法の構築を目的とし、浅水長波方程式の空間離散化にDG法を適用した。また、移動境界手法を導入することで、水際線の移動を有する浅水長波流れ解析を可能にした。数値解析例としてダムブレイク問題と段波問題を取り上げ、厳密解およびCG法との数値解析結果の比較により、DG法の有用性について検討を行った。

2. 浅水長波方程式の解法

(1) CG法による浅水長波方程式の解法

a) 支配方程式

支配方程式には、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} = 0 \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{U} は保存変数、 \mathbf{R} はソース項であり、以下のように定義される。

$$\mathbf{U} = [h, \quad uh, \quad vh]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 h は水深、 u, v は x, y 軸方向の断面平均流速、 g は重力加速度であり、 z は基準面からの高さである (図-1)。また、 \mathbf{A}_i は移流項の係数であり、以下のように定義される。

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ gh - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (4)$$

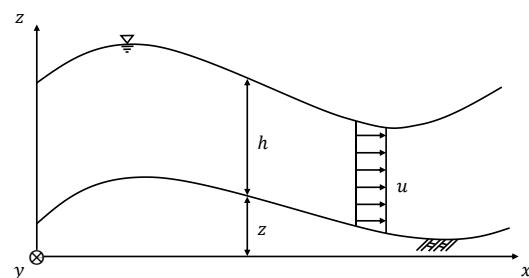


図-1 座標系

b) CG法による空間方向の離散化

従来の離散化手法であるCG法として、安定化有限要素法による方法を示す。式(1)に対して、SUPG法に基づく安定化有限要素法[4]を適用すると、以下の重み付き残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau (\mathbf{A}_j)^T \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、左辺第1項は通常のGalerkin項、第2項は移流による数値不安定性を回避する安定化項であるSUPG項、第3項は不連続面での数値不安定を回避する衝撃捕捉項である。また、 \mathbf{w} は保存変数に関する重み関数、 τ 、 δ は安定化パラメータである。

c) 時間方向の離散化

式(5)をまとめると、以下のような有限要素方程式となる。

$$(\mathbf{M}_g + \mathbf{M}_s) \dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{A}_g + \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_{sc}) \mathbf{U} - (\mathbf{C}_g + \mathbf{C}_s) \mathbf{R} = 0 \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{M} 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{C} はそれぞれ質量行列、移流項の係数行列、ソース項に関する行列であり、添え字 g 、 s 、 sc はそれぞれGalerkin項、SUPG項、衝撃捕捉項を表している。なお、式(6)に対して時間方向の離散化を行うにあたり、時間微分項は次のように表される。

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \quad (7)$$

また、保存変数 \mathbf{U} に対してCrank-Nicolson法を適用し、式(6)の第2項を陰的に取り扱うと、式(6)は以下ようになる。

$$(\mathbf{M}_g + \mathbf{M}_s) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + (\mathbf{A}_g + \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_{sc}) \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} - (\mathbf{C}_g + \mathbf{C}_s) \mathbf{R} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}}$ は次のように表される。

$$\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n) \quad (9)$$

また、保存変数以外の変数は、2次精度Adams-Bashforth法により陽的に近似し、線形化する。例えば、流速 u は次式のよう近似される。

$$u = \frac{3}{2} u^n - \frac{1}{2} u^{n-1} \quad (10)$$

(2) DG法による浅水長波方程式の解法

a) 支配方程式

支配方程式には、以下に示す保存型の浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{R} = 0 \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{U} は保存変数、 \mathbf{R} はソース項であり、式(2)、(3)のように定義される。また $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ は流束関数であり、以下のように定義される。

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \mathbf{F}_2(\mathbf{U})]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}, \mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

ここで、 h は水深、 u 、 v は x 、 y 軸方向の断面平均流速、 g は重力加速度であり、 z は基準面からの高さである（図-1）。

b) DG法による空間方向の離散化

式(11)に対し、各内部要素の集合を $\tilde{\Omega}$ 、その要素境界の集合を Γ_{int} とし、空間方向の離散化としてDG法を適用する。重み付き残差法を適用し、左辺第2項にGaussの発散定理を用いると、以下に示す弱形式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \mathbf{W} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_{\text{int}}} \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{R} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{W} は要素ごとに定義される不連続な重み関数、 $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$ は Γ の外向き単位法線ベクトルである。なお、補間関数としては一次関数を用いる。式(13)の左辺第3項はフラックス項であり、次節で説明を行う。

c) 数値フラックス

DG法では要素境界で物理フラックスを複数有するため、数値フラックスを用いて近似を行う。式(13)左辺第3項のフラックスと外向き単位法線ベクトルの内積を数値フラックスに置き換え、本研究では、以下に示すLocal Lax-Friedrich Flux[5]を用いる。

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}^+) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^-)] - \frac{a_{\max}}{2} (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-) \quad (14)$$

ここで、 a_{\max} は次のように定義される。

$$a_{\max} = \max(|u^+ n_x + v^+ n_y - c^+|, |u^- n_x + v^- n_y - c^-|, |u^+ n_x + v^+ n_y + c^+|, |u^- n_x + v^- n_y + c^-|) \quad (15)$$

$$c^+ = \sqrt{gh^+}, \quad c^- = \sqrt{gh^-}$$

また、 \mathbf{U}^+ 、 \mathbf{U}^- は、要素境界における値であり、要素境界であらかじめ設定された法線ベクトルの方向の値を \mathbf{U}^+ とし、もう一方の値を \mathbf{U}^- と定義する。

d) 時間方向の離散化

式(13)をまとめると、以下に示す有限要素方程式となる。

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}_f \mathbf{F} + \mathbf{C} \mathbf{R} - \mathbf{B} \hat{\mathbf{F}} \quad (16)$$

ここで、 \mathbf{M} , \mathbf{A}_f , \mathbf{C} , \mathbf{B} はそれぞれ質量行列, フラックス \mathbf{F} 項の係数行列, ソース項に関する行列, 数値フラックス \mathbf{F}^* 項の係数行列である. 式(16)の右辺に質量行列の逆行列をかけて整理したものを $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ とすると, 以下のような時間に関する常微分方程式として表される.

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) \quad (17)$$

上式に対して, 3次精度陽的Runge-Kutta法[6]を適用すると, 以下のように離散化できる.

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n) \quad (18)$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4} \mathbf{U}^n + \frac{1}{4} \{\mathbf{U}^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)})\} \quad (19)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathbf{U}^n + \frac{2}{3} \{\mathbf{U}^{(2)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(2)})\} \quad (20)$$

e) Slope Limiter処理

段波問題のような不連続な解を有する問題を解く際, 不連続面においてオーバーシュートやアンダーシュートが生じる可能性がある. 本研究では, このような数値不安定性を回避するため, 要素ごとの分布関数の傾きを制御するSlope Limiter処理を導入し, その中でも, 1次関数要素に対するシンプルなSlope Limiter[7]を適用する.

(3) 移動境界手法[8]

陸域での洪水氾濫を解く場合, 移動する水際境界を考慮する必要がある. 本研究では, あらかじめ広域にわたりメッシュ分割を行い, その中で水深の有無を判定しながら水流域を決めていく手法を用いる. 本手法では, 設定した微小水深と, 浅水長波方程式を解き, 得られた水深の大きさから陸水判定を行う. 本研究での移動境界手法は以下の手続きを行うことによってなされる. 全ての三角形要素について,

1) $h_1 < \epsilon_h$ かつ, $h_2 < \epsilon_h$ かつ, $h_3 < \epsilon_h$ である場合, 各節点での流速は, 各節点の流量を ϵ_h で除すことにより求める. ここで, ϵ_h は微小水深であり, 極めて小さい水深の発生による計算の不安定性を回避するためのものである.

2) 水際の要素については, 無抵抗となる境界条件を与える. 例えば, 図-2 左側に示される状態の要素が水際の要素となり, n 時間ステップにおいて, 節点 2 と節点 3 は水深を持つが, 節点 1 は水深が ϵ_h 以下であり, 節点 1 に与える境界条件が問題となる. この場合, 単純に流速 0 として計算を行えば, それを取り込むことによって次の $n+1$ ステップでの解の流速は減少する. これを回避するため, 水際要素の流速については以下に示す境界条件を与える.

$$u_i^n = \frac{u_j^n + u_k^n}{2} \quad (h_i < \epsilon_h \text{ かつ } h_j > \epsilon_h \text{ かつ } h_k > \epsilon_h) \quad (21)$$

$$u_i^n = u_j^n = u_k^n \quad (h_i < \epsilon_h \text{ かつ } h_j > \epsilon_h \text{ かつ } h_k > \epsilon_h) \quad (22)$$

ここで, i, j, k は三角形要素における節点番号である. これにより, 単純に流速 0 として計算を行う場合と比較して, 水際要素における流速の減衰を抑え, 自然な結果を得ることができる.

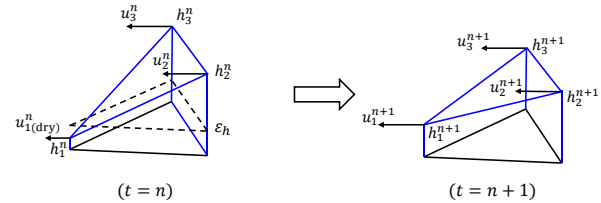


図-2 移動境界手法の概念図

3. ダムブレイク問題での検証

(1) 解析モデル

解析モデルを図-3に示す. x, y 方向分割幅はそれぞれ 0.1[m], 0.5[m]とし, 時間増分は 1.0×10^{-4} [s]とした. また, DG法の微小水深は 2.0×10^{-4} [m], CG法の微小水深は 5.0×10^{-3} [m]とした.

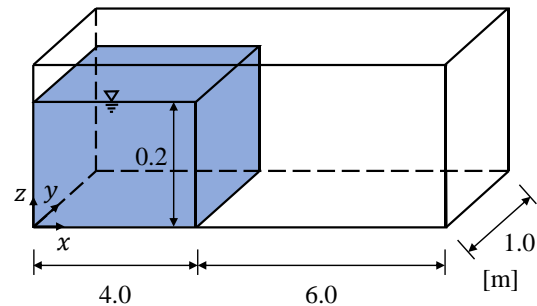


図-3 解析モデル (ダムブレイク問題)

(2) 解析結果

2秒後の水面形状, 流速分布をそれぞれ図-4, 図-5に示す. 水面形状においては, CG法と比較して, DG法の方が厳密解と良い一致を示している. 特に, 波の先端部に注目すると, CG法では微小水深を十分小さい値に設定することができず, 波の先端が切り立つ結果となったが, DG法では微小水深をCG法よりも小さい値に設定することができ, 自然な形状を得ることができた.

流速分布においても, DG法の方が厳密解と良い一致を示している. CG法では水が $x = 3\text{m}$ 付近までしか到達しないため, それより先の流速を0と評価してしまう. また, 要素間での不連続を許容しないため, 不連続な流速分布にはならず, 流速が0になる点が近づくにつれ, 厳密解から離れる形状となった. 一方, DG法では水面形状が厳密解に近く, 水の到達域をCG法よりも正しく評価できるため, 流速分布も正しく評価できている. また, 要素間での不連続を許容するというDG法の特長から, 流速分布の不連続な部分も再現できている.

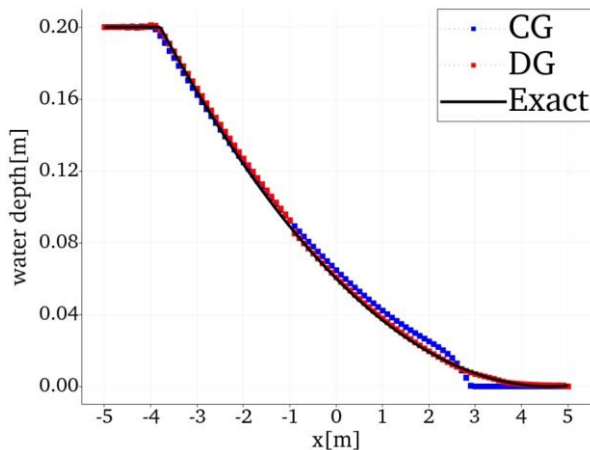


図-4 2秒後の水面形状

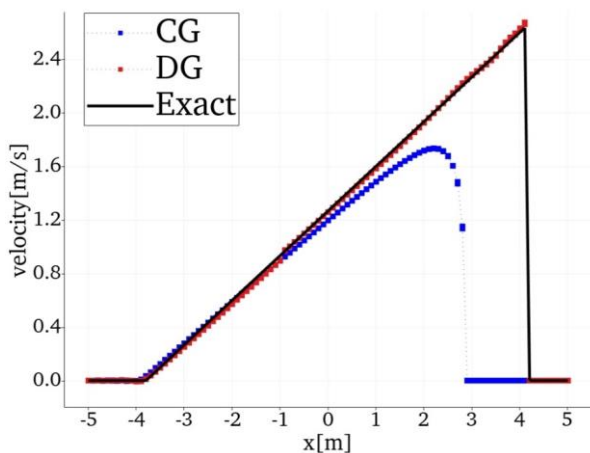


図-5 2秒後の流速分布

4. 段波問題での検証

(1) 解析モデル

解析モデルを図-6に示す. x , y 方向分割幅はそれぞれ0.1[m], 0.5[m]とし, 時間増分は 1.0×10^{-4} [s]とした.

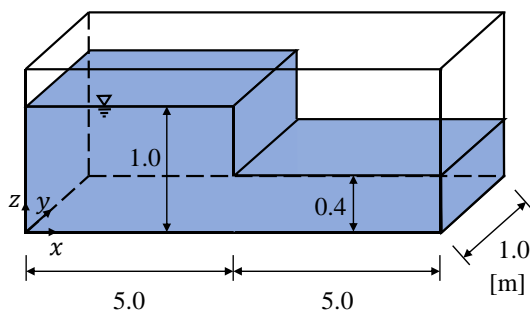


図-6 解析モデル (段波問題)

(2) 解析結果

1秒後の水面形状, 流速分布をそれぞれ図-7, 図-8に示す. 水面形状においては, DG法では不連続面である $x = 3$ m付近でオーバーシュート, アンダーシュートが発生するものの, $x = -3$ m \sim -1m付近の勾配があるような水面においては, CG法と比較して, 厳密解に近い結果となった. 流速分

布においては, DG法では水面形状と同様, 不連続面付近でのオーバーシュート, アンダーシュートが発生するものの, 勾配があるような水面においては, CG法と比較して, 厳密解に近い結果となった. また, CG法では, 解がなまりやすいため, 流速を過小評価してしまう傾向にある.

DG法での解析結果では不連続面でのオーバーシュート, アンダーシュートが生じたことから, Slope Limiter処理を導入し, 振動抑制を試みた. 1秒後の水面形状, 流速分布をそれぞれ図-9, 図-10に示す. 水面形状においては, Slope Limiter処理を行うことにより, 不連続面においてオーバーシュート, アンダーシュートが抑えられているものの, 解がなまり, 新たに数値振動が発生していることがわかる.

流速分布においても, Slope Limiter処理を行うことにより, 不連続面においてオーバーシュート, アンダーシュートが抑えられているものの, 解がなまり, 新たに数値振動が発生していることがわかる.

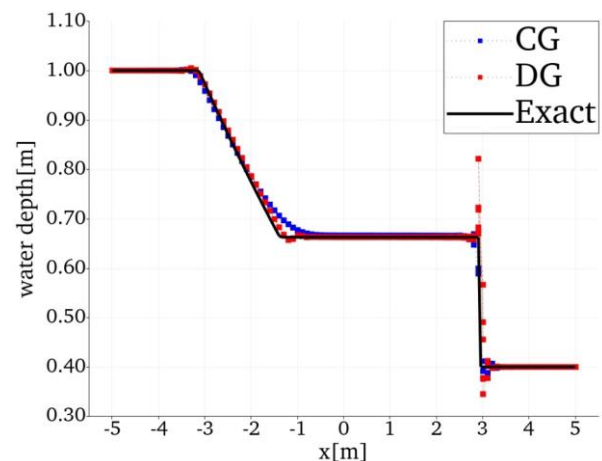


図-7 1秒後の水面形状

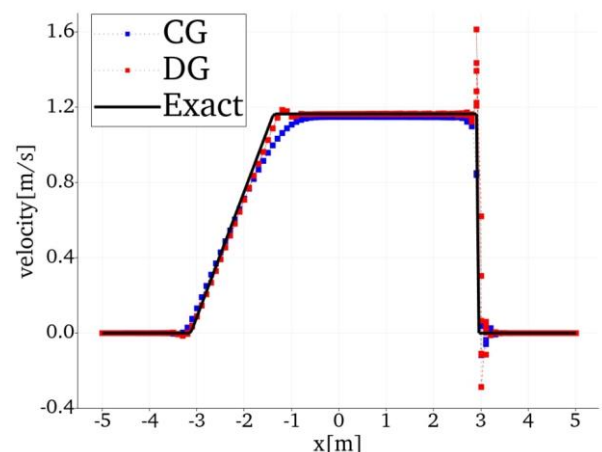


図-8 1秒後の流速分布

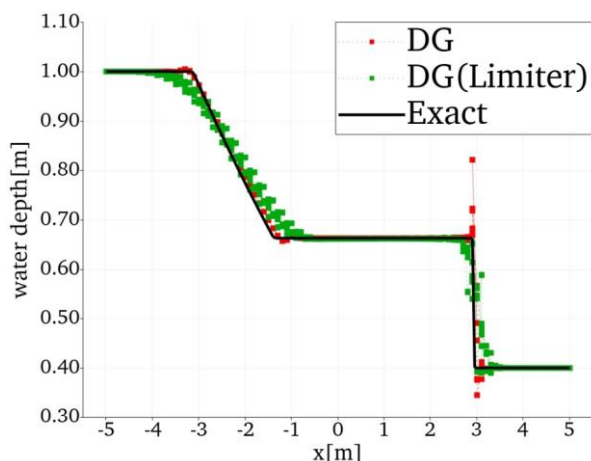


図-9 1秒後の水面形状

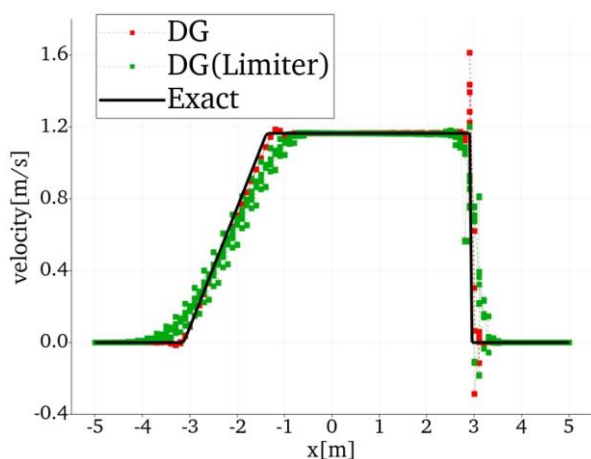


図-10 1秒後の流速分布

5. 結言

本研究では、浅水長波方程式の高精度かつ高効率な数値解析手法の構築として、空間方向の離散化にDG法を用いることを提案した。さらに、ダムブレイク問題、段波問題での検証を行い、厳密解および従来のCG法との数値解析結果の比較を行った。それにより浅水長波流れ解析においてDG法が有効であることが確認できた。今後の方針として、不連続面での数値振動抑制のために最適なLimiter処理を導入し、さらにはDG法の利点である局所的な高精度化（直交基底高次補間要素）を適用することでより高速かつ高精

度なソルバーへと発展させる予定である。

謝辞: 本研究はJSPS科研費JP 20H02418の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Bernardo Cockburn, George E. Karniadakis, and Chi-Wang Shu: The Development of Discontinuous Galerkin Methods, *Theory Comput. Appl.*, pp.3-50, 1999.
- [2] Clint Dawson, Ethan J Kubatko, Joannes J Westerink, Corey Trahan, Christopher Mirabito, Craig Michoski, and Nishant Panda: Discontinuous galerkin methods for modeling hurricane storm surge. *Adv. Water Res.*, Vol. 34, No. 9, pp. 1165–1176, 2011.
- [3] Damrongsak Wirasaet, Steven R Brus, Craig E Michoski, Ethan J Kubatko, Joannes J Westerink, and Clint Dawson: Artificial boundary layers in discontinuous galerkin solutions to shallow water equations in channels, *J. Comput. Phys.*, Vol. 299, pp. 597–612, 2015.
- [4] Shinsuke Takase, Kazuo Kashiya, Seizo Tanaka, and Tayfun E Tezduyar: Space-time SUPG formulation of the shallow-water equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 64, No. 10-12, pp. 1379–1394, 2010.
- [5] Nouh Izem, Mohammed Seaid, Imad Elmahi, and Mohamed Wakrim: Discontinuous galerkin method for two-dimensional bilayer shallow water equations, *J. Eng. Math.*, Vol. 96, No. 1, pp. 1–21, 2016.
- [6] Ethan J Kubatko, Benjamin A Yeager, and David I Ketcheson: Optimal strong-stability preserving runge–kutta time discretizations for discontinuous galerkin methods, *J. Sci. Comput.*, Vol. 60, No. 2, pp. 313–344, 2014.
- [7] Louis J Durlofsky, Bjorn Engquist, and Stanley Osher: Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.*, Vol. 98, No. 1, pp. 64–73, 1992.
- [8] 松本純一, 梅津剛, 川原睦人: 陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析. 応用力学論文集, Vol. 1, pp. 263–272, 1998.