

# 静的・動的安定性の観点からみた串団子+心棒モデルでの心棒効果

Continuous Column Effects of Coupled Shear-Flexural-Beam Model from the perspectives of Static and Dynamic Stability

田川浩之<sup>1)</sup>

Hiroyuki Tagawa

1) Ph.D. 武庫川女子大学建築学科 教授 (〒663-8121 兵庫県西宮市戸崎町1-13, E-mail: tagawa@mukogawa-u.ac.jp)

As the flexural stiffness of continuous columns or walls increases, the drift concentration in a particular stories is reduced when subjected to earthquake ground motions. This continuous column (C.C.) effect was evaluated using the coupled shear-flexural-beam models. In this study, the C.C. effects are evaluated in terms of the static and dynamic stability. Eigenvalue analyses are conducted for the tangent stiffness matrix at each time-step during dynamic time-history analyses. It is found that both static and dynamic stability is enhanced as the flexural-stiffness of the continuous column increases.

**Key Words :** Continuous Column Effect, Static Stability, Dynamic Stability, Minimum Eigenvalue

## 1. はじめに

建物を高さ方向に貫く柱材や連層耐震壁などの心棒は、地震外乱時にある特定層への変形集中を低減し、層崩壊メカニズムを阻止する。筆者はこれまでに、実務設計でよく用いられる串団子（ばね質点系モデル）に、はり要素もしくは有限要素でモデル化した心棒を各層で連結した、ハイブリッド形式の串団子+心棒モデルを用いて、地震時における心棒効果について検討してきた<sup>[1]</sup>など。

本研究では、静定、動的安定性の観点から、串団子+心棒モデルでの心棒効果について検討する。まず、串団子、心棒モデル単体、ならびに串団子と心棒を連結させた串団子+心棒モデルの剛性行列の行列式、固有値を求め、これらの静的安定性を検討する。全ての固有値、すなわち、最小固有値が零もしくは負になると、構造モデルは不安定状態になる。さらに、地震応答解析を行い、その時間刻みごとに固有値解析を行い、瞬間的な固有値を計算することで、地震外乱時の動的安定性について検討する。

## 2. 串団子+心棒モデルの静的安定性

### (1) 串団子モデル

図-1に示す、2層、3層、 $n$ 層の串団子モデルの剛性行列を導き、それらを静的安定性の観点から検討する。まず、2層の串団子モデルから始める。水平荷重( $R_1, R_2$ )と水平変形( $u_1, u_2$ )の関係は下式で表される。ここで、 $k_1, k_2$ は1層、2層目の水平バネの水平剛性である。

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \mathbf{K}_s \mathbf{u}$$

よって、2層の串団子モデルの剛性行列は、以下の式で表される。

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

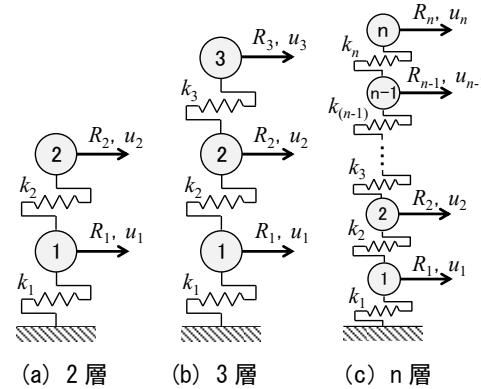


図-1 串団子モデル

この剛性行列の行列式を計算すると、以下となる。

$$\det \mathbf{K}_s = (k_1 + k_2)k_2 - (-k_2)(-k_2) = k_1 k_2$$

剛性行列の固有値は、固有多項式  $F_K(x) = 0$  の解である。

ここで、 $\mathbf{E}$ は単位行列である。

$$\begin{aligned} F_K(x) &= \det(x\mathbf{E} - \mathbf{K}_s) = \det \begin{pmatrix} x - (k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & x - k_2 \end{pmatrix} \\ &= x^2 - (k_1 + 2k_2)x + k_1 k_2 \end{aligned}$$

よって、固有値  $\alpha_1, \alpha_2$  は、以下となる。

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{(k_1 + k_2) \pm \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}}{2}$$

もし、 $k_1$ と $k_2$ の値が正であるなら、剛性行列の行列式、ならびに全ての固有値、すなわち、最小固有値は正となるので、構造モデルは安定である。

3層の串団子モデルの剛性行列は、以下の式で表される。

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

よって、この行列式を計算すると、以下となる。

$$\det \mathbf{K}_s = k_1 k_2 k_3$$

$n$ 層の串団子モデルの剛性行列は、下式で表される。

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & O \\ & -k_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ O & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

この剛性行列の行列式は数学的帰納法により求められる。  
 $n$ 層の串団子モデルに対して、式(1)が成り立つことを仮定する。2層、3層の串団子モデルは下式を満たす。

$$\det \mathbf{K}_{s(n \times n)} = k_1 k_2 \cdots k_n \left( = \prod_{i=1}^n k_i \right) \quad (1)$$

(n-1)層の串団子モデルで上式が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K}_{s(n-1) \times (n-1)} &= k_1 k_2 \cdots k_{n-1} \left( = \prod_{i=1}^{n-1} k_i \right) \\ \det \mathbf{K}_{s(n \times n)} &= \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & O \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ O & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & O \\ & -k_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ O & & -k_{n-1} & k_{n-1} & 0 \\ & & & -k_n & k_n \end{vmatrix} \\ &= k_n \cdot \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & \ddots & & \\ & & & k_{n-2} + k_{n-1} & -k_{n-1} \\ & & & -k_{n-1} & k_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= k_n \cdot \det \mathbf{K}_{s(n-1) \times (n-1)} \end{aligned}$$

したがって、数学的帰納法より仮定した式(1)が成り立つ。

次に、剛性行列の固有値  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  と、串団子モデルの各層の水平剛性  $k_1, \dots, k_n$  の関係について、以下、調べる。固有多項式  $F_k(x)$  は、以下の式で表される。

$$F_k(x) = \det(xE_n - \mathbf{K}_s) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

$F_k(0)$  は、次の2つの方法で表すことができる。

$$\begin{cases} F_k(0) = \det(-\mathbf{K}) = (-1)^n \det \mathbf{K} \\ F_k(0) = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \end{cases}$$

したがって、

$$\det \mathbf{K}_s = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

よって、

$$\begin{aligned} k_1 k_2 \cdots k_n &= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ \prod_{i=1}^n k_i &= \prod_{i=1}^n \alpha_i \end{aligned}$$

ここで、 $k_i = \alpha_i$  によって見えるが正しくない。これは、2層の串団子モデルの時点では成り立たないからである。

## (2) 心棒モデル

ベルヌーイ・オイラーはり要素で心棒をモデル化した場合の剛性行列を導く。心棒モデルは、図-2に示すように、柱脚部でピン支持した場合、完全固定した場合について検討する。例として、2層、3層の心棒モデルの剛性行列の行列式を算出し、静的安定性について検討する。

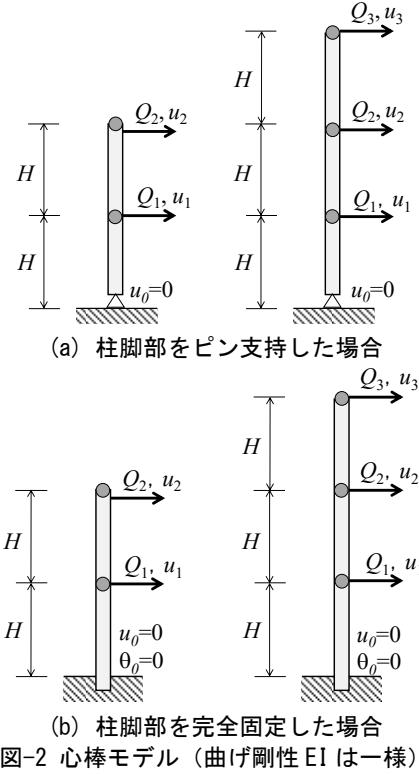


図-2 心棒モデル (曲げ剛性 EI は一様)

### a) ピン支持した心棒モデル

柱脚部をピン支持した、 $n$ 層の心棒モデルの剛性行列を導出する。まず、図-3に示す1個のはり要素、図-4に示すように、 $n$ 個のはり要素を連結したモデルの剛性行列を求める。

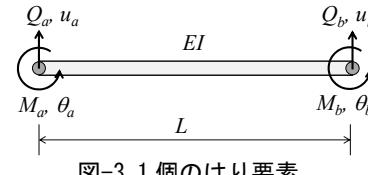


図-3 1個のはり要素

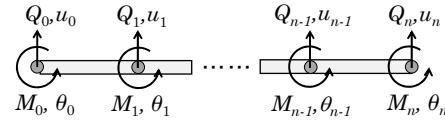


図-4  $n$ 個のはり要素を連結したモデル

ベルヌーイ・オイラーはりの1要素の剛性行列は下式で表される。

$$\begin{bmatrix} Q_a \\ M_a \\ Q_b \\ M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ \theta_a \\ u_b \\ \theta_b \end{bmatrix}$$

$n$ 個のはり要素を連結したモデルの全体剛性行列は、はり1要素の剛性行列を重ね合わせて得られる。変位と回転角の項で分離するよう行列成分を並べ替えて下式の形にする。

$$\begin{bmatrix} \{Q_0\} \\ \vdots \\ \{Q_n\} \\ \{M_0\} \\ \vdots \\ \{M_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11(n+1) \times (n+1)} & \mathbf{K}_{12(n+1) \times (n+1)} \\ \mathbf{K}_{21(n+1) \times (n+1)} & \mathbf{K}_{22(n+1) \times (n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_0\} \\ \vdots \\ \{u_n\} \\ \{\theta_0\} \\ \vdots \\ \{\theta_n\} \end{bmatrix} \quad (2)$$

串団子+心棒モデルでは、串団子から心棒にせん断力のみ伝達するため、 $\{M_0, \dots, M_n\} = \{0, \dots, 0\}$  である。変位と水平力の関係式として心棒の剛性行列  $\overline{\mathbf{K}_f}$  は下式となる。

$$\overline{\mathbf{K}_f}_{(n+1) \times (n+1)} = \frac{\{Q_0, \dots, Q_n\}}{\{u_0, \dots, u_n\}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}$$

さらに支持点での相対水平変位  $u_0$  は零なので、変位  $\{u_1, \dots, u_n\}$  と水平力  $\{Q_1, \dots, Q_n\}$  の関係式である心棒の剛性行列  $\mathbf{K}_f$  は下式となる。

$$\mathbf{K}_f_{(n \times n)} = [\overline{\mathbf{K}_f}(2:n, 2:n)]$$

例1 ピン支持した、2層の心棒モデル（図-2(a)左）

曲げ剛性EIが一様な、2層の心棒モデルの剛性行列は、下式となる。

$$\mathbf{K}_f = \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

この剛性行列の行列式は、以下の通り、零となるので、柱脚部をピン支持した心棒モデルは、不安定構造である。

$$\det \mathbf{K}_f = \left( \frac{EI}{H^3} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1.5 \end{vmatrix} = \left( \frac{EI}{H^3} \right)^2 \cdot (6 \cdot 1.5 - (-3)(-3)) = 0$$

例2 ピン支持した、3層の心棒モデル（図-2(a)右）

3層の心棒モデルの剛性行列は下式となる。

$$\mathbf{K}_f = \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} 9.6 & -8.4 & 2.4 \\ -8.4 & 9.6 & -3.6 \\ 2.4 & -3.6 & 1.6 \end{bmatrix}$$

この剛性行列の行列式の値は、以下の通り、零となる。

$$\det \mathbf{K}_f = \left( \frac{EI}{H^3} \right)^3 \cdot \begin{vmatrix} 9.6 & -8.4 & 2.4 \\ -8.4 & 9.6 & -3.6 \\ 2.4 & -3.6 & 1.6 \end{vmatrix} = 0$$

b) 完全固定した心棒モデル

柱脚部を完全固定した、 $n$ 層の心棒モデルの剛性行列を導出する。柱脚部における相対水平変位  $u_0$ 、回転角  $\theta_0$  の値は零であるので、まず、式(2)の剛性行列で1行目、 $(n+2)$ 行目、1列目、 $(n+2)$ 列目を除去して下式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \{Q_1\} \\ \vdots \\ \{Q_n\} \\ \{M_1\} \\ \vdots \\ \{M_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11(n \times n)} & \mathbf{K}_{12(n \times n)} \\ \mathbf{K}_{21(n \times n)} & \mathbf{K}_{22(n \times n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_1\} \\ \vdots \\ \{u_n\} \\ \{\theta_1\} \\ \vdots \\ \{\theta_n\} \end{bmatrix}$$

$\{M_1, \dots, M_n\} = \{0, \dots, 0\}$  であるので、変位  $\{u_1, \dots, u_n\}$  と水平力  $\{Q_1, \dots, Q_n\}$  の関係式である剛性行列は下式となる。

$$\mathbf{K}_f_{(n \times n)} = \frac{\{Q_1, \dots, Q_n\}}{\{u_1, \dots, u_n\}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}$$

例3 完全固定支持した、2層の心棒モデル（図-2(b)左）

2層の心棒モデルの剛性行列は下式となる。

$$\mathbf{K}_f = \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} \frac{96}{7} & -\frac{30}{7} \\ -\frac{30}{7} & \frac{12}{7} \end{bmatrix}$$

剛性行列の行列式の値は、以下の通り、正となり、柱脚部を完全固定すると、心棒モデルは、安定構造となる。

$$\det \mathbf{K}_f = \left( \frac{EI}{H^3} \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{96}{7} & -\frac{30}{7} \\ -\frac{30}{7} & \frac{12}{7} \end{vmatrix} = \frac{36}{7} \left( \frac{EI}{H^3} \right)^2$$

例4 完全固定支持した、3層の心棒モデル（図-2(b)右）

3層の心棒モデルの剛性行列は下式となる。

$$\mathbf{K}_f = \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} \frac{240}{13} & -\frac{138}{13} & \frac{36}{13} \\ -\frac{138}{13} & \frac{132}{13} & -\frac{48}{13} \\ \frac{36}{13} & -\frac{48}{13} & \frac{21}{13} \end{bmatrix}$$

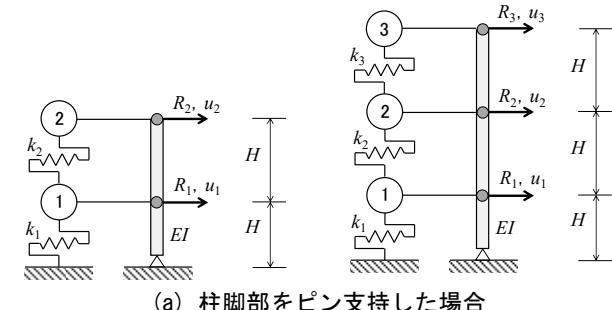
この剛性行列の行列式の値は、以下の通り、正となる。

$$\det \mathbf{K}_f = \left( \frac{EI}{H^3} \right)^3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{240}{13} & -\frac{138}{13} & \frac{36}{13} \\ -\frac{138}{13} & \frac{132}{13} & -\frac{48}{13} \\ \frac{36}{13} & -\frac{48}{13} & \frac{21}{13} \end{vmatrix} = \frac{108}{13} \left( \frac{EI}{H^3} \right)^3$$

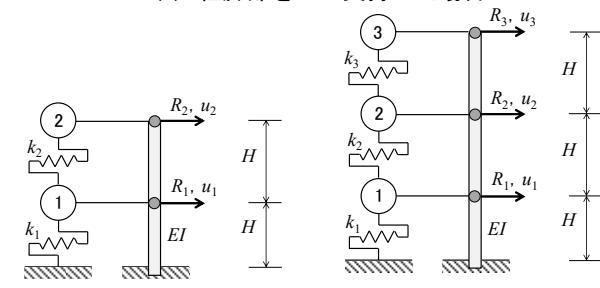
### (3) 串団子+心棒モデル

図-5に示す、串団子+心棒モデルは、串団子と心棒を並列に連結したモデルであり、剛性行列は下式となる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f$$



(a) 柱脚部をピン支持した場合



(b) 柱脚部を完全固定した場合

図-5 串団子+心棒モデル

心棒がピン支持されている場合、串団子が弾性状態の時、安定構造の串団子と不安定構造の心棒が連結することになる。一方、串団子のある特定層が塑性化し、その層の接線剛性が零もしくは負となると、串団子は不安定となるが、それ自体では不安定な心棒が連結すると、串団子+心棒モデル全体では安定構造となる場合がある。

柱脚部をピン支持した場合、2層、3層の串団子+心棒モデルの剛性行列は下式となる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} + \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} 9.6 & -8.4 & 2.4 \\ -8.4 & 9.6 & -3.6 \\ 2.4 & -3.6 & 1.6 \end{bmatrix}$$

柱脚部を完全固定支持した場合、2層、3層の串団子+心棒モデルの剛性行列は下式となる。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} \frac{96}{7} & -\frac{30}{7} \\ -\frac{30}{7} & \frac{12}{7} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} + \frac{EI}{H^3} \begin{bmatrix} \frac{240}{13} & -\frac{138}{13} & \frac{36}{13} \\ -\frac{138}{13} & \frac{132}{13} & -\frac{48}{13} \\ \frac{36}{13} & -\frac{48}{13} & \frac{21}{13} \end{bmatrix}$$

#### (4) 静的安定性からみた串団子+心棒モデルの心棒効果

2層、3層の串団子+心棒モデルについて、心棒の曲げ剛性を変化させて、下式の固有値解析を行い、各モードに対する固有値を算出し、静定安定性の観点からみた串団子+心棒モデルの心棒効果について検討する。

$$\det(x\mathbf{E} - \mathbf{K}) = 0$$

まず、1次固有周期Tを、2層の場合、0.24秒、3層の場合、0.36秒と仮定する。串団子の水平剛性は、設計用水平荷重 $f_1$ に対して、図-6に示すように、均一の層間変形角分布となるように、下式により求める。

$$k_i = \frac{4\pi^2 \sum_{j=1}^n m_j h_i^2}{T^2} \frac{\sum_{j=i}^n f_j}{\sum_{i=1}^n f_i h_i} (h_{i+1} - h_i)$$

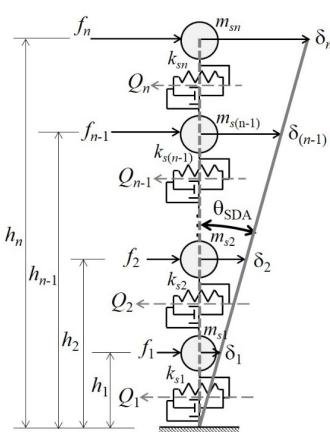


図-6 均一な層間変形角で変形する串団子

2層の串団子+心棒モデルの場合、高さ方向に逆三角形分布の設計水平荷重に対して、各層の層間変形角が均一となる、串団子の各層の水平剛性は、下式で与えられる。

$$k_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{m(H^2 + 4H^2)}{(fH + 4fH)} \frac{(f + 2f)}{H} = \frac{12m\pi^2}{T^2}, \quad k_2 = \frac{8m\pi^2}{T^2}$$

同じく、3層の串団子+心棒モデルについて、逆三角形分布の設計水平荷重に対して、均一な層間変形角を与える、串団子の各層の水平剛性は、下式で与えられる。

$$k_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{m(H^2 + 4H^2 + 9H^2)}{(fH + 4fH + 9fH)} \frac{(f + 2f + 3f)}{H} = \frac{24m\pi^2}{T^2}$$

$$k_2 = \frac{20m\pi^2}{T^2}, \quad k_3 = \frac{12m\pi^2}{T^2}$$

下式で定義される心棒の曲げ剛性率 $\alpha_{cc}$ を0から1.0まで変化させて、また、串団子が弾性の状態と、串団子の最下層の水平ばねが降伏強度に達して、その接線剛性が0となつた状態、すなわち、最下層メカニズム時に対して固有値解析を行った。

$$\alpha_{cc} = \frac{EI/H^3}{k_1}$$

2層の串団子+心棒モデルについて、 $\alpha_{cc}$ に対する1次、2次モードの固有値を図-7に示す。心棒をピン支持した場合、串団子が弾性時では、心棒の $\alpha_{cc}$ を増加させても、1次の固有値の値は変わらない。これは、ピン支持された心棒がロッキング（剛体回転）するからであり、 $\alpha_{cc}$ を増加させても、1次モードの剛性は変わらない。一方、弾性時の2次モード、最下層メカニズムの場合は、1次、2次モードとともに、心棒の $\alpha_{cc}$ を増加させると、固有値は増加する。心棒を完全固定支持した場合は、串団子が弾性時、ならびに最下層メカニズム時であっても、 $\alpha_{cc}$ を増加させると、固有値は増加している。

3層の串団子+心棒モデルの場合を図-8に示す。2層の場合と同様の結果が得られている。

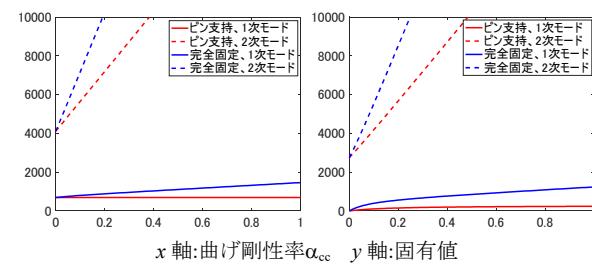


図-7 静的安定性に及ぼす心棒効果（2層モデル）

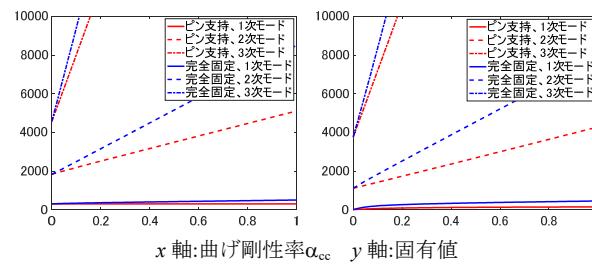
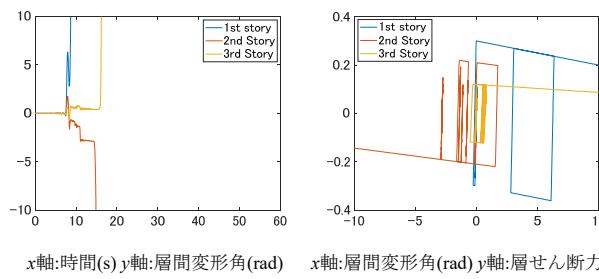


図-8 静的安定性に及ぼす心棒効果（3層モデル）

### 3. 串団子+心棒モデルの動的安定性

3層の串団子+心棒モデルに対して地震応答解析を行い、時間刻みごとに接線剛性行列に対して固有値解析を行い、最小固有値を算出する。ピン支持の心棒がある場合とない場合を考慮する。串団子の水平ばねの履歴復元力モデルはバイリニア型とし、降伏後の接線剛性率 $r$ は0と0.01とする。 $P-\Delta$ 効果は考慮し、串団子の水平剛性を下式により算出する。ここで、 $k_{pi}$ 、 $k_{oi}$ は、 $P-\Delta$ 効果を考慮、無視した場合の $i$ 層の水平剛性、 $h_i$ は $i$ 層の階高、 $W_i$ は $i$ 層に作用する上部重量である。入力地震波はNF17<sup>[2]</sup>とする。

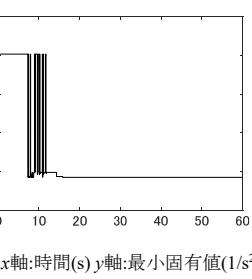
$$k_{pi} = k_{oi} - \frac{W_i}{h_i}$$



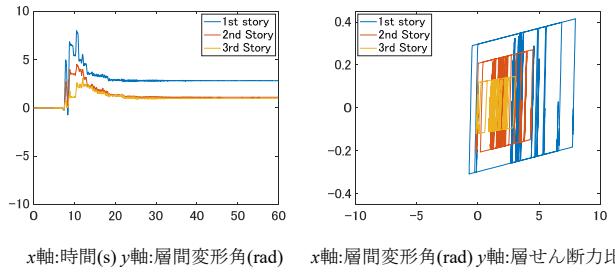
【層間変形角の時刻歴】

【串団子の層せん断力-層間変形角】

【層せん断力-層間変形角】



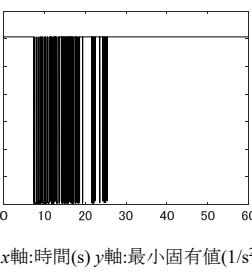
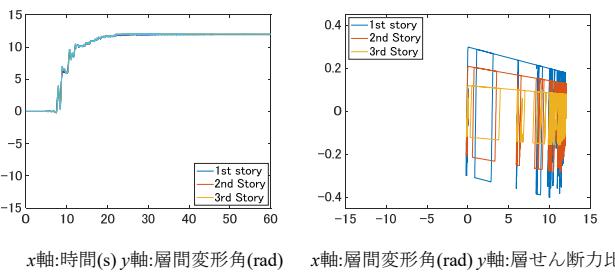
【最小固有値の時刻歴】

(a)  $\alpha_{cc}=0, r=0.0$ の場合

【層間変形角の時刻歴】

【串団子の層せん断力-層間変形角】

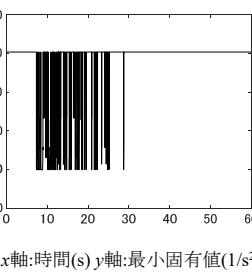
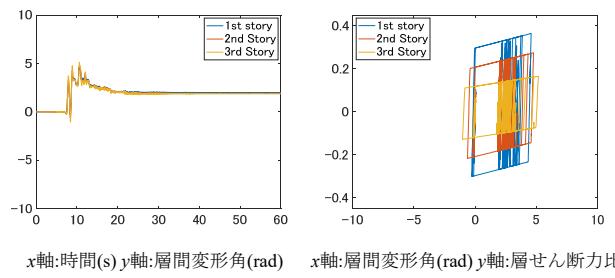
【層せん断力-層間変形角】

(b)  $\alpha_{cc}=0, r=0.01$ の場合

【層間変形角の時刻歴】

【串団子の層せん断力-層間変形角】

【層せん断力-層間変形角】

(c)  $\alpha_{cc}=0.1, r=0.0$ の場合

【層間変形角の時刻歴】

【串団子の層せん断力-層間変形角】

【層せん断力-層間変形角】

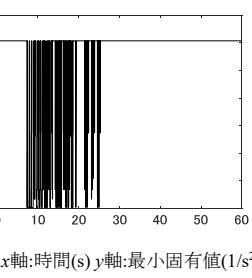
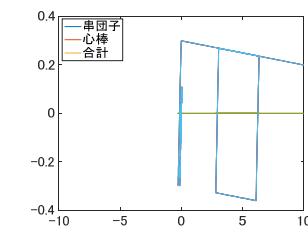
(d)  $\alpha_{cc}=0.1, r=0.01$ の場合

図-9 3層の串団子+心棒モデルの地震応答解析結果

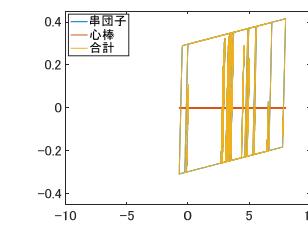
心棒がない ( $\alpha_{cc}=0$ ) 場合で、 $r$ を0とした場合の結果を図-9(a)に示す。最小固有値は負の値となり、不安定状態が続き、1方向に変形が進み、崩壊する。 $r$ を0.01とした場合の結果を図-9(b)に示す。最小固有値は正の値を保ち、安定状態を保っている。心棒がある場合として、 $\alpha_{cc}$ を0.1に設定し、 $r$ を0とした場合の結果を図-9(c)に示す。最小固有値は負の値となり、瞬間に不安定状態となり、大きな最大層間変形角、残留変形角が生じている。 $r$ を0.01とした場合の結果を図-9(d)に示す。最小固有値は正の値を保ち、安定状態を保っており、比較的小さな最大層間変形角、残留変形角に留まっている。



【層間変形角の時刻歴】

【層せん断力-層間変形角】

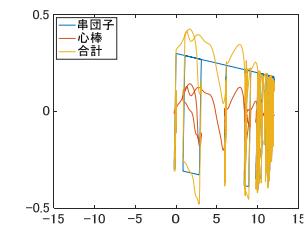
【最小固有値の時刻歴】



【層間変形角の時刻歴】

【層せん断力-層間変形角】

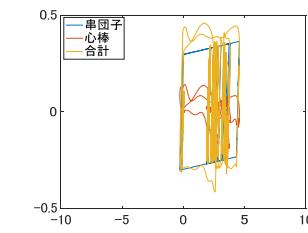
【最小固有値の時刻歴】



【層間変形角の時刻歴】

【層せん断力-層間変形角】

【最小固有値の時刻歴】



【層間変形角の時刻歴】

【層せん断力-層間変形角】

【最小固有値の時刻歴】

#### 4. 心棒をティモシェンコはり要素でモデル化した場合の静的・動的安定性

心棒をティモシェンコはり要素<sup>[3]</sup>でモデル化した場合の静的・動的安定性について検討する。ロッキング現象を回避するために次数低減積分し、さらにせん断剛性を補正した、ティモシェンコはり要素の剛性行列 $\mathbf{k}_{\text{TI}}$ は下式で表される。ここで、 $G$ はせん断弾性率、 $A$ は断面積、 $E$ はヤング率、 $I$ は断面2次モーメントである。

$$\mathbf{k}_{\text{TI}} = \mathbf{k}_b + \mathbf{k}_s$$

$$\mathbf{k}_b = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_s = \frac{\overline{GA_s}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\overline{GA_s} = \left( \frac{1}{\kappa GA} + \frac{L^2}{12EI} \right)^{-1}$$

心棒をティモシェンコはり要素（断面アスペクト比を3）でモデル化した2層、3層の串団子+心棒モデルで、弾性時、最下層メカニズム時の静定安定性の結果を図-10、11に示す。図-7、8と殆ど同じ結果が得られた。ティモシェンコはり要素に代えた3層の串団子+心棒モデルに対し、 $\alpha_{\text{cc}}$ を0.1、 $r$ を0、0.01に設定した場合の結果を図-12(a)、(b)に示す。図-9(c)、(d)と殆ど同じ結果が得られた。

#### 5. まとめ

本研究では、串団子+心棒モデルを用いて、多層建物の静的・動的安定性について検討、評価した。

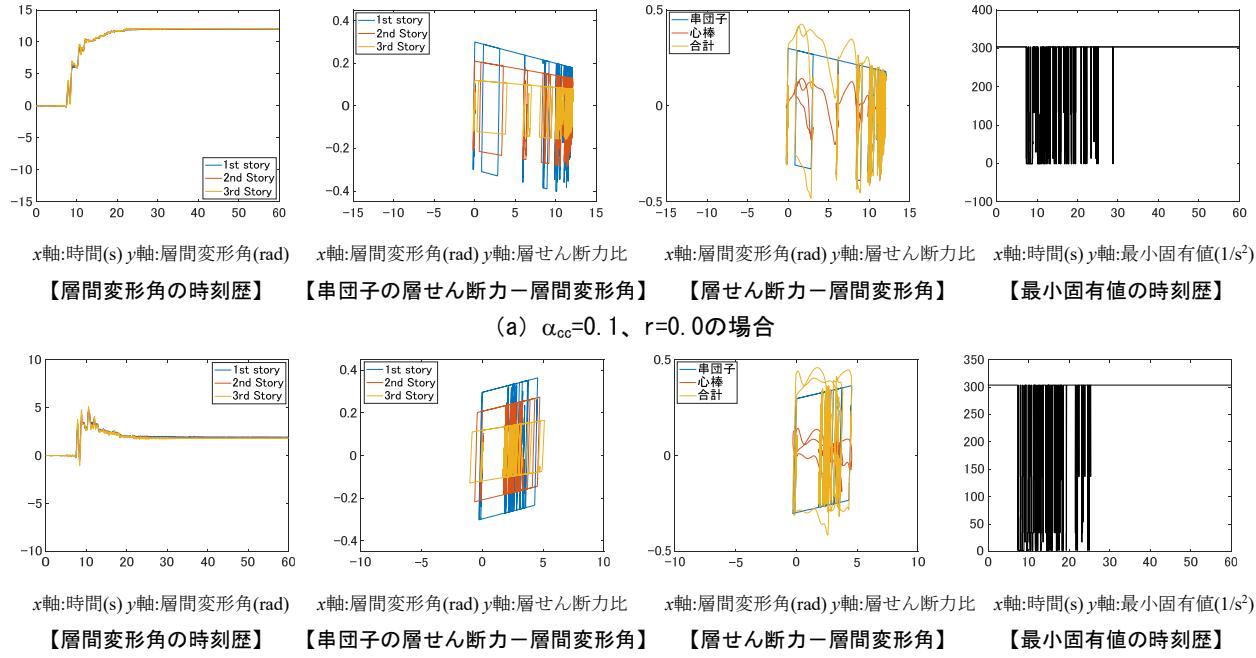


図-12 3層の串団子+心棒モデルの地震応答解析結果（ティモシェンコはり要素）

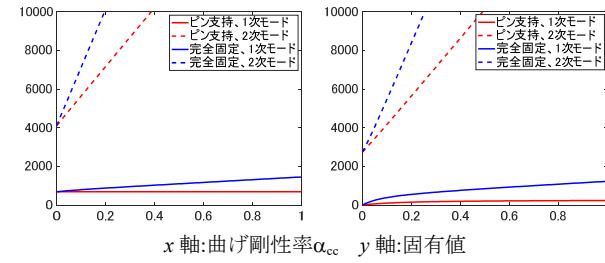


図-10 静的安定性に及ぼす心棒効果（2層モデル）

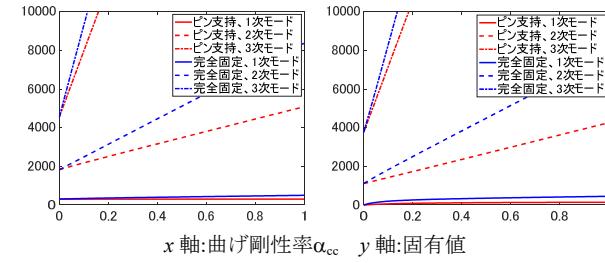


図-11 静的安定性に及ぼす心棒効果（3層モデル）

謝辞: 本研究はJSPS科研費20K04783の助成を受けたものです。

#### 参考文献

- 田川浩之: ロッキング連層耐震壁が弾塑性挙動する場合の心棒効果, 計算工学講演会論文集, 計算工学会, 2022年6月
- Somerville, P. et al.: Development of Ground Motion Time Histories for Phase 2 of the FEMA/SAC Steel Project; Rep. No. SAC/BD97/04, SAC Joint Venture, Sacramento, CA
- 山田貴博: 高性能有限要素法, 計算力学レクチャーシリーズ⑨, 丸善株式会社, 平成19年1月

