計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月) 計算工学会

# Block Newton 法の大変形弾塑性問題への適用

Application of Block Newton Method to Elastoplastic Problems in Large Strains

山本剛大 1) 山田貴博 2) 松井和己 3)
Takeki Yamamoto, Takahiro Yamada, and Kazumi Matsui

1)博 (工) 広島大学 大学院先進理工系科学研究科 助教（〒 739-8527 東広島市鏡山 1-4-1, E-mail: takeki@hiroshima-u.ac.jp)
2)学博 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 教授（〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7）
3)博 (工) 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 准教授（〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7）

The simultaneously iterative procedure for elastic-plastic boundary value problems presented by the authors is extended to elastoplastic problems in large strains. The authors formulate elastoplastic problems in large strains as a coupled problem of the weak form of the equilibrium equation for the overall structures and the yield equations at every material point, and propose a numerical procedure based on the block Newton method to solve them with simultaneous linearization. The proposed scheme can be implemented to the conventional displacement method without any local iterative calculations.

***Key Words :*** *Block Newton Method, Elastoplasticity, Large Strains, Finite Element Analysis*

## 1. 序論

塑性変形を伴う挙動は，つりあい方程式から求まる変位と降伏条件に基づく塑性変形の進展を表す内部変数によって記述される．そのため，弾塑性問題は（物質点における）大域的なつりあい方程式と（各物質点における）局所的な降伏条件式の連成問題と捉えられる．このような観点から筆者らは弾塑性問題に対してつりあい方程式と降伏条件式の連成問題を，平面応力弾塑性問題に対してつりあい方程式，降伏条件式，平面応力条件式の連成問題を定義し，それらを同時に線形化することで Block Newton 法に基づく数値計算手法を開発した [1,11]．著者らが提案した手法ではつりあい方程式と応力状態に対する拘束条件式を内部変数を含む形で記述し，線形化された連成問題から内部変数を消去することで変位に関する接線係数を代数的に構築でき，内部変数も内部反復を用いることなく代数的に更新される．

大変形問題では幾何学的な非線形性を考慮する必要があり，塑性変形が加わると幾何学的な非線形性と材料の非線形性によって応力積分が複雑になる．一般に，大変形弾塑性解析ではつりあい方程式を満たすための全体反復の各反復において，積分点ごとに降伏条件を満たすための内部反復が必要となる [3,4]．

弾塑性問題に対して，弾性予測子と塑性修正子に基づく return mapping アルゴリズム [6] が幅広く利用されている．Simo and Taylor[7] は適合条件 [8] が課される速度非依存型の数値計算手法を開発し，応力積分アルゴリズムに整合する接線係数（consistent tangent）を提案した．しかしながら，内部反復を前提とする return mapping アルゴリズムでは塑性変形の進展を考慮せずに変位の修正量を算出し，内部変数の更新によって応力状態を修正するため，つりあい方程式と降伏条件式の連成問題を Block Gauss-Seidel 法で解いているものと解釈できる．それに対して，Braudel et al.[9] は仮想仕事の原理と構成則を組み合わせて速度依存型の連立方程式を提示した．また，平面応力弾塑性問題に対して，de Borst[10] は厚さ方向の垂直ひずみを内部変数として扱い，平面応力に対する残差を内力ベクトルに組み込む手法を提案した．

弾塑性解析において，積分点での内部反復や方程式ごとの反復計算を用いず，数値計算上の利点を保持した手法はほとんど見当たらない．著者らは，つりあい方程式と応力状態に対する拘束条件式の連成問題を定義し，Block Newton 法に基づく数値計算手法 [1,11] を開発した．本研究では，連成問題の定義に仮想仕事式と降伏条件式を用い，それらを同時に線形化することで内部反復のない数値計算手法を提案する．本稿では，線形化された連成問題から内部変数を消去することで接線係数が代数的に得られ，内部変数も代数的に更新される定式化を示す.

## 2. 大変形弾塑性解析

### (1) 連成問題

本研究では，大変形弾塑性問題を変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ と塑性パラメータ $\gamma$ の関数で表される連成問題として，

$$R_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u},\gamma;\boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

$$R_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{u},\gamma) = 0 \tag{2}$$

と定義する．ここで，$R_{\mathrm{f}}$，$R_{\mathrm{g}}$ は仮想仕事式と降伏条件式に対する残差，$\boldsymbol{v}$ は仮想変位ベクトルを表す.

準静的問題に対してつりあい経路に依存しない数値解を得るために，ひとつ前のつりあい状態からの解の増分量を評価し，Newton–Raphson 法を採用する．仮想的な時間ステップ $[t_n, t_{n+1}]$ において，時刻 $t_{n+1}$ での変位ベクトル $\boldsymbol{u}$，塑性パラメータ $\gamma$ は,

$$\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{u}_n + \Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}, \quad \gamma_{n+1}^{(i+1)} = \gamma_n + \Delta\gamma^{(i+1)} \tag{3}$$

と表現される．ここで，括弧内の上付き文字は反復回数，下付き文字は時間ステップを表し，$\boldsymbol{u}_n$，$\gamma_n$ はひとつ前のつりあい状態（時刻 $t_n$）における変位ベクトル，塑性パラメータであり，$\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$，$\Delta\gamma^{(i+1)}$ はひとつ前のつりあい状態（時刻 $t_n$）から $i+1$ 回目の反復までの増分量を意味する．Newton–Raphson 法では，$i+1$ 回目の反復までの増分量（$\Delta\boldsymbol{u}$，$\Delta\gamma$）が $i$ 回目までの増分量と $i+1$ 回目の修正量（$\delta\boldsymbol{u}$，$\delta\gamma$）の合計として，

$$\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} = \Delta\boldsymbol{u}^{(i)} + \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}, \quad \Delta\gamma^{(i+1)} = \Delta\gamma^{(i)} + \delta\gamma^{(i+1)} \tag{4}$$

と表せる．Newton–Raphson 法による $i$ 回目から $i+1$ 回目までの反復において，修正量 $\delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$，$\delta\gamma^{(i+1)}$ を求める連成問題は，仮想仕事式 $\boldsymbol{R}_\mathrm{f}$，降伏条件式 $\boldsymbol{R}_\mathrm{g}$ を用いて，

$$R_\mathrm{f}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i+1)}, \gamma_{n+1}^{(i+1)}; \boldsymbol{v}) = 0 \tag{5}$$

$$R_\mathrm{g}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i+1)}, \gamma_{n+1}^{(i+1)}) = 0 \tag{6}$$

と定義できる．

### (2)　Block Newton 法

連成問題 (5)，(6) を線形化すると，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}; \boldsymbol{v}) & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{f}}{\partial \gamma}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}; \boldsymbol{v}) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \gamma}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} \\ \delta\gamma^{(i+1)} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \boldsymbol{R}_\mathrm{f}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}; \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{R}_\mathrm{g}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) \end{Bmatrix} \tag{7}$$

と表現でき，本研究では連立方程式 (7) に対して Newton 法を適用する．一般に，塑性パラメータ $\gamma$ は変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ と独立である．そのため，連立方程式 (7) に対して静的縮約を適用できる．塑性パラメータの修正量 $\delta\gamma^{(i+1)}$ は，

$$\delta\gamma^{(i+1)} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \gamma}\right)^{-1} \boldsymbol{R}_\mathrm{g} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \gamma}\right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{u}} \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} \tag{8}$$

と表され，連立方程式 (7) に代入すると，現配置 $\Omega$ を基準とする線形化された仮想仕事式は，

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{f}}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{f}}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \gamma}\right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right] \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_\mathrm{g} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

となる．ここで，$[\partial\boldsymbol{R}_\mathrm{f}/\partial\boldsymbol{u} - \partial\boldsymbol{R}_\mathrm{f}/\partial\gamma(\partial\boldsymbol{R}_\mathrm{g}/\partial\gamma)^{-1}\partial\boldsymbol{R}_\mathrm{g}/\partial\boldsymbol{u}]$ は整合接線係数行列であり，仮想仕事式に対する残差は外力ベクトル $\boldsymbol{f}$，Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$，仮想ひずみテンソル $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})$ を用いて，$\boldsymbol{R}_\mathrm{f} = -\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\Omega$ と表される．さらに，偽応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{g}$ は物質点に課される降伏条件式の残差を用いて，

$$\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{g} = -\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_\mathrm{g}}{\partial \gamma}\right)^{-1} \boldsymbol{R}_\mathrm{g} \tag{10}$$

と定義される．式(9) より，偽応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{g}$ が Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ に加えられることで，降伏条件式に対する残差が線形化された仮想仕事式に組み込まれる．そのため，偽応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{g}$ の導入により，提案手法を変位法に実装することが容易となる．

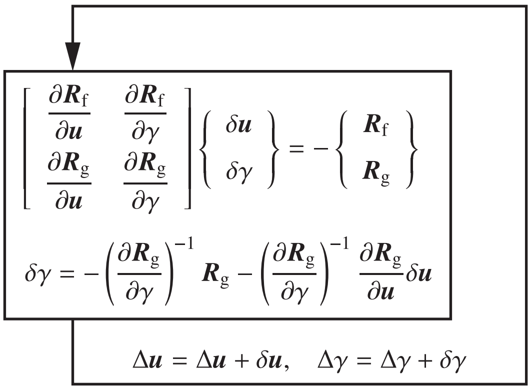


**Fig. 1  Proposed scheme**

Block Newton 法は厳密な Newton 法に基づいており，局所２次収束を示す反復が実現する．Fig.1 に示すように，内力と外力のつりあいと降伏条件式を同時反復するため，１回の全体反復に対して応力の更新および接線係数の構築が１度ずつとなる．

## 3.　結論

本研究では，大変形弾塑性問題を仮想仕事式と降伏条件式の連成問題として定義し，線形化された連成問題から内部変数を消去することで，接線係数を代数的に導出でき，内部反復を用いずに内部変数も代数的に更新される数値計算手法を開発した．

## 参考文献

[1] Yamamoto, T., Yamada, T., Matsui, K.: *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.122, pp.2145–2178, 2021.

[2] Simo, J.C. and Taylor, R.L.: *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.22, pp.649–670, 1986.

[3] Simo, J.C.: *Numerical Methods for Solids (Part 3) Numerical Methods for Fluids (Part 1)*, pp.183–499, Elsevier, B.V., 1998.

[4] Simo, J.C. and Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] de Souza Neto, E.A., Peric, D., Owen, D.R.J.: *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Ltd, 2008.

[6] Owen, D.R.J. and Hinton, E.: *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, 1980.

[7] Simo, J.C. and Taylor, R.L.: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.48, pp.101–118, 1985.

[8] Wilkins, M.L.: *Calculation of Elastic-Plastic Flow*, Academic Press, New York, 1964.

[9] Braudel, H.J., Abouaf, M., Chenot, J.L.: *Comput. Struct.*, Vol.22, pp.801–814, 1986.

[10] de Borst, R.: *Commun. Appl. Numer. Methods*, Vol.7, pp.29–33, 1991.

[11] 山本剛大, 山田貴博, 松井和己: 日本計算工学会論文集, No. 20210021, 2021.