

# ゴムのMullins効果を再現する隠れ損傷モデルの提案

## Proposal for Hidden Damage Model to Reproduce the Mullins Effect of Rubber

工藤大介<sup>1)</sup>, 山田正太郎<sup>2)</sup>, 京谷孝史<sup>3)</sup>

Daisuke Kudo, Shotaro Yamada, Takashi Kyoya

1) 東北大学 大学院工学研究科 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail: daisuke.kudo.p7@dc.tohoku.ac.jp)

2) 東北大学 大学院工学研究科 准教授 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail: shotaro.yamada.d2@tohoku.ac.jp)

3) 東北大学 大学院工学研究科 教授 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail: takashi.kyoya.b1@tohoku.ac.jp)

This study proposes a new damage model called the hidden damage model to reproduce the Mullins effect, which is a hysteresis response of rubber material. In existing damage models, the determination of material constants is difficult because changes in damage variables affect the virgin loading curve. In contrast, the hidden damage model allows the response during unloading and reloading to be adjusted without affecting the response during virgin loading, making the identification of material constants easier than with existing models. The reproducibility of the Mullins effect of the hidden damage model is verified by simulating cyclic tensile tests of rubber using the finite element code that implements the proposed model.

**Key Words:** hyperelastic body, damage theory, Mullins effect, rubber

### 1. はじめに

ゴム材料に対して繰り返し負荷を与えると、材料内部の損傷に起因して応力や剛性が低下するMullins効果<sup>[1]</sup>と呼ばれる現象が生じることが知られている。Mullins効果を再現するモデルは多数存在しているが、既存の損傷モデルは、除荷・再載荷時の応答を調整すると処女載荷時の応答が変化するために、パラメータの決定が難しいという課題がある。Fung<sup>[2]</sup>は、パラメータの同定を容易にするために、処女載荷時と除荷・再載荷時で異なる構成則を持つモデルとして疑似弾性モデル (Pseudo elastic model) を提案している。本研究ではこのモデルとは異なる手法により、処女載荷時の応答に影響を与えることなく、除荷・再載荷時の応答を調整可能な新たな損傷モデルを提案する。

### 2. 材料モデル

#### 2.1 等容変形と体積変化の分離型超弾性体

ゴム材料は、変形する際に体積変化をほぼ生じないことが知られている。そこで、微圧縮性を近似するために、ひずみエネルギー関数  $\Psi(\mathbf{C})$  を等容変形成分  $\hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}})$  と体積変形成分  $U(J)$  の和に分化する。

$$\Psi(\mathbf{C}) = \hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}}) + U(J); \quad \hat{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (1)$$

ここで、変形勾配テンソルを  $\mathbf{F}$  として、 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ 、 $J = \det \mathbf{F}$  である。

式(1)で表されるような等容変形と体積変化の分離型ひずみエネルギー関数を持つ超弾性体の2nd Piola-Kirchhoff 応力テンソル  $\mathbf{S}$  と基準配置を参照する接線係数  $\mathbf{C}$  はそ

れぞれ以下のように表すことができる。

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}' + p \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}' = J^{-2/3} \mathbf{P} : \hat{\mathbf{S}}; \quad \hat{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \\ p = \frac{dU}{dJ} \end{cases} \quad (2b)$$

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_p + \mathbf{C}_\kappa \quad (3a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_d = J^{-4/3} \mathbf{P} : \hat{\mathbf{C}} : \mathbf{P}^T + \frac{2}{3} J^{-2/3} (\text{Tr} \hat{\mathbf{S}}) \tilde{\mathbf{P}} \\ \quad - \frac{2}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}' + \mathbf{S}' \otimes \mathbf{C}^{-1}); \quad \hat{\mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \\ \mathbf{C}_p = p J [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2 \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}] \\ \mathbf{C}_\kappa = J^2 \frac{d^2 U}{dJ^2} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) \end{cases} \quad (3b)$$

ここで、 $\mathbf{P} = \mathbf{I} \odot \mathbf{I} - (1/3) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}$ 、 $\mathbf{P}^T = \mathbf{I} \odot \mathbf{I} - (1/3) \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1}$ 、 $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - (1/3) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}$ 、 $\text{Tr} \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}} : \mathbf{C}$ 、 $[\mathbf{A} \odot \mathbf{B}]_{ijkl} = (1/2)(A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$  ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は任意のテンソル) である。

#### 2.2 隠れ損傷モデル

本研究では損傷を考慮するために、 $\hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}})$  に履歴変数  $\alpha$  を加えた次式の関数を定義する。

$$\hat{\Psi}(\hat{\mathbf{C}}, \alpha) = (1-e) \hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}}) + e \frac{(\hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}}))^{s+1}}{(s+1) \alpha^s} \quad (4)$$

ここで、 $\hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}})$  は損傷を考慮しない基本モデルのひずみエネルギー関数、 $s$  と  $e$  は材料定数であり、それぞれ履歴

曲線制御係数と履歴曲線制御指数と称する． $\alpha$  は現在までの  $\hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}})$  の最大値であり， $\hat{\mathbf{C}}$  空間に描かれる損傷曲面の大きさを表す．なお，損傷は等容変形成分のみ影響を与えると仮定する．

等容変形に起因する Second Piola-Kirchhoff 応力  $\hat{\mathbf{S}}$  と接線係数  $\hat{\mathbf{C}}$  は以下のように表される．

$$\hat{\mathbf{S}} = \gamma_1 \hat{\mathbf{S}}_0; \quad \hat{\mathbf{S}}_0 = 2 \frac{\partial \hat{\Psi}_0(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{cases} \gamma_1 \hat{\mathbf{C}}_0 & (\dot{\alpha} > 0) \\ \gamma_1 \hat{\mathbf{C}}_0 + \gamma_2 \hat{\mathbf{S}}_0 \otimes \hat{\mathbf{S}}_0 & (\dot{\alpha} = 0) \end{cases}; \quad \hat{\mathbf{C}}_0 = 4 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_0}{\partial \hat{\mathbf{C}} \partial \hat{\mathbf{C}}} \quad (6)$$

ここで， $\dot{\alpha} > 0$  は損傷進展時を表す．また，

$$\gamma_1 = 1 - e \left( 1 - \frac{(\hat{\Psi}_0)^s}{\alpha^s} \right); \quad \gamma_2 = e s \frac{(\hat{\Psi}_0)^{s-1}}{\alpha^s} \quad (7)$$

である．

$\gamma_1$  は基本モデルの応力に対する提案モデルの応力の低減係数である．損傷進展時は  $\alpha = \hat{\Psi}_0$  より， $\gamma_1 = 1$  である．つまり処女載荷中は損傷が進展しつつも応答は基本モデルと同じである．一方，損傷非進展時は  $\alpha \leq \hat{\Psi}_0$  より， $\gamma_1 \leq 1$  である．つまり，除荷・再載荷時はそれまでに受けた損傷の影響により，応力は基本モデルよりも低下する．このような性質から，処女載荷曲線を元に基本モデルの材料定数を決定した後に，除荷・再載荷曲線を元に損傷に関する材料定数  $s$  と  $e$  を決定することができる．このように，式(4)で示すようにひずみエネルギーを定義すると，処女載荷曲線に陽には損傷の影響が現れないことから，このモデルを隠れ損傷モデルと称することにする．

### 3. 数値解析例

基本モデルとして，以下に示す分離型 Ogden モデル<sup>[3]</sup>を用いた．

$$\hat{\Psi}_0(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\hat{\lambda}_1^{\alpha_n} + \hat{\lambda}_2^{\alpha_n} + \hat{\lambda}_3^{\alpha_n} - 3) \quad (8)$$

$$U(J) = \frac{\kappa}{4} (J^2 - 1 - 2 \ln J) \quad (9)$$

ただし， $\mu_n$  と  $\alpha_n$  ( $n=1,2,3$ ) は材料定数， $\kappa$  はペナルティ係数である．また， $\lambda_i$  は主ストレッチ ( $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$ ) であり， $\hat{\lambda}_i = J^{-1/3} \lambda_i$  である．

次に，解析対象とする有限要素モデルと境界条件を図-1に示す．立方体要素を用い，供試体を単軸で引っ張る場合を想定して境界条件を与えた．

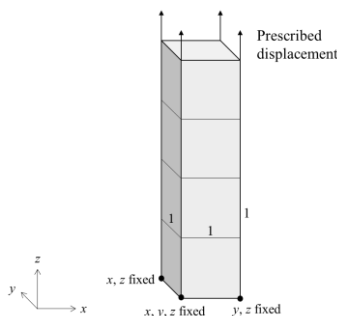


図-1 解析モデル

解析対象を1つの要素とみなし，軸公称応力  $P$  と軸ストレッチ  $\lambda$  を次式により算出した．

$$P = F/A; \quad \lambda = h/H \quad (10)$$

ここで， $F$  は解析モデル上面における方向の節点反力の和， $A$  は上面の初期断面積， $H$  と  $h$  はそれぞれ，供試体の初期と現在の高さである．

ゴム材料を想定して，Ogdenモデルの材料定数を以下に示すように与えた．

$$\alpha_1 = 1.25; \quad \alpha_2 = 4.0; \quad \alpha_3 = -2.0$$

$$\mu_1 = 8.00; \quad \mu_2 = 0.76; \quad \mu_3 = -0.45$$

$\lambda = 1.75$  まで強制変位を与えた後に除荷する計算を損傷に関する材料定数  $s$  と  $e$  を変化させて行った．図-2 に  $e$  のみを変えた載荷曲線，図-3 に  $s$  のみを変えた載荷曲線を示す．パラメータを変化させることで，処女載荷曲線を基本モデルに一致させたまま，除荷・再載荷曲線のみを変化させることができる．この性質より，処女載荷曲線を元に基本モデルの材料定数を同定してから，除荷・再載荷曲線を元に損傷に関する材料定数を同定することが可能である．

次に，Mullins & Tobin<sup>[4]</sup>による実験結果を，隠れ損傷モデルによりシミュレートした結果を図-4に示す．Ogdenモデルの材料定数は前出の解析と同じ値を用いた．この値は Ogden & Roxburgh<sup>[5]</sup>が同実験結果の処女載荷曲線に対して同定した材料定数である．除荷・再載荷曲線に対し，損傷モデルのパラメータを同定すると以下の値になった．

$$e = 0.48; \quad s = 3.0$$

図-4より，Ogden & Roxburghが処女載荷曲線に対して同定した材料定数をそのまま用いて，除荷・再載荷時の挙動を良好に再現できていることを確認できる．

### 4. 結論

本研究では，パラメータを容易に同定可能な隠れ損傷モデルを新たに提案した．数値解析により，提案モデルが処女載荷時は基本モデルと同じ応答をすることを確認した．また，実測結果に対して損傷モデルのパラメータを良好に同定することができた．なお，この手法はOgdenモデルに限らず，様々な超弾性体に適用可能な汎用性の高い手法である．

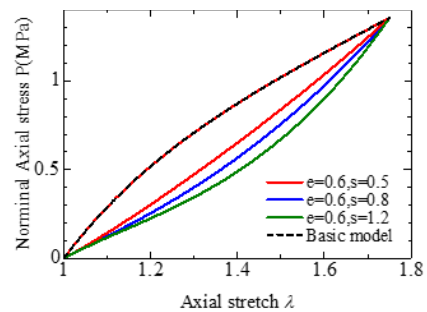


図-2  $e$  のみを変化させた載荷曲線

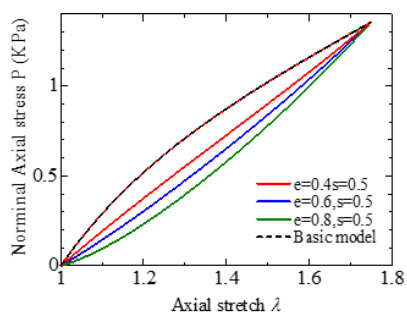


図-3  $s$  のみを変化させた载荷曲線

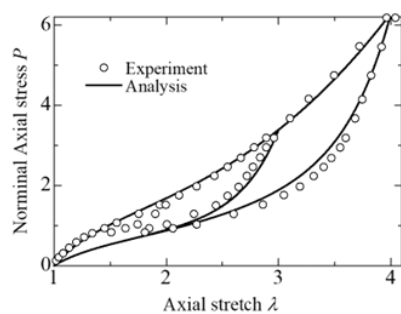


図-4 Mullins & Tobin<sup>3)</sup>の実験結果と提案モデルによる  
計算結果

#### 参考文献

- [1] Mullins, L (1947): Effect of stretching on the properties of rubber, *Journal of Rubber Research*, 16, 275-289.
- [2] Fung, Y. C. (1993): Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues (2<sup>nd</sup> ed), *Springer-Verlag*, 294.
- [3] Ogden, R.W. (1972): Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A326, 565-584.
- [4] Mullins, L., and Tobin, N.R. (1957): Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers, *Rubber Chemistry and Technology*, 30, 551-571.
- [5] Ogden, R.W. and Roxburgh, D.G. (1999): A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 2861-287.