

# 弾性体と粘弾性体からなる 構造物の振動問題に対するトポロジー最適設計

Topology Optimization for Frequency of a Structures Composed of  
Elastic and Viscoelastic Materials

三浦鴻太郎<sup>1)</sup>, 宮川季<sup>2)</sup>, 弓削康平<sup>3)</sup>

Kotaro Miura, Toshi Miyakawa and Kohei Yuge

1) 博(工) 弘前大学 大学院理工学研究科 助教

(〒036-8561 青森県弘前市文京町3, E-mail: k-miura@hirosaki-u.ac.jp)

2) 修(工) 成蹊大学 理工学研究科

(〒180-8633 東京都武蔵野市吉祥寺北町3-3-1, E-mail: dm216317@cc.seikei.ac.jp)

3) 工博 成蹊大学 理工学部 教授

(〒180-8633 東京都武蔵野市吉祥寺北町3-3-1, E-mail: yuge@st.seikei.ac.jp)

In this study, topology optimization of the frequency for two materials composed of elastic and viscoelastic parts is presented. We conducted the two-step optimization for elastic and viscoelastic materials with objective functions for minimizing dynamic compliance and maximizing dissipation energy, respectively. The two-step optimization method is demonstrated on several examples under different frequency loading conditions.

**Key Words :** Elastic-viscoelastic structure, Topology optimization, Frequency response problem, Complex modulus

## 1. 緒 言

3Dプリント技術をはじめとして生産技術の向上に伴い、力学的観点から設計の指針を提案してくれるトポロジー最適設計技術が昨今のモノづくりをする上で重要なものになってきている。機械設計をする上で共振による破壊は事故につながる可能性があり、振動問題を熟慮することが重要である。制振材料としてゴム材料などに代表される粘弾性特性を有する材料が利用される。

粘弾性体の振動問題に対するトポロジー最適化に関する研究は、Liuら[1]が均質化法を用いて粘弾性体の周期微細構造を設計対象として、固有振動数の実部と虚部の比で表されるモード減衰係数を最大化する最適化を行っている。Delgado and Hamdaoui[2]はレベルセット法を用いて、Liuらと同様にモード減衰係数を最大化する最適化を行っている。

粘弾性体の振動問題に対するトポロジー最適化に関する研究例は少なく、未だに知見は十分とは言えない。また、実際の構造物においては強度を担保する鋼材などの材料（弾性体）と制振材料（粘弾性体）を組み合わせ使用されることが一般的である。そこで本研究では、弾性体、粘弾性体の二材料を用いた振動問題に対するトポロジー最適化を行う。弾性体と粘弾性体にはそれぞれ動的コンプライアンス最小化と散逸エネルギー最大化（Takezawaら[3]）の目的関数を設定して、二段階に分けた最適化を行

い、粘弾性体の振動問題に対しての有用性を検証することを目的とする。

## 2. 粘弾性体に対する密度法

線形粘弾性体の応力ひずみ関係式であるBoltzmannの履歴積分は次式で表される。

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \left( k(t-\tau) \cdot \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (1)$$

ここで、 $\sigma(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ ,  $k(t)$  はそれぞれ、応力、ひずみの時間応答、緩和関数である。式(1)をLaplace変換して、Laplace変換変数を  $s = i\omega$  とすることで次式のようになる。 $i$ ,  $\omega$  はそれぞれ虚数と角周波数である。

$$\sigma^* = E(i\omega)\varepsilon^* \quad (2)$$

ここで、 $\sigma^*$  と  $\varepsilon^*$  はそれぞれ応力とひずみの複素振幅であり、 $E(i\omega)$  は複素弾性率であり、粘弾性体の周期振動に対する応答を表しており、

$$E(i\omega) = i\omega * k(i\omega) \quad (3)$$

となる。式(2)は弾性体の静力学問題からのアナロジーによって、弾性体の静的問題におけるヤング率を  $E(i\omega)$  に置き換えることで、粘弾性体の振動問題の解析を行うことができる。

本研究では、材料表現法としてSIMP (Solid Isotropic

Material with Penalization)法を用いる。また、アナロジーによって弾性体のヤング率を複素弾性率に置き換えることで粘弾性材料特性を次式で規定する。

$$E(i\omega) = \rho^p E_0(i\omega) \tag{4}$$

式(4)におけるペナルティ乗数 $p$ は3を使用する。本研究では、Fig.1に示す粘弾性固体の挙動を表す最も基本的なモデルである標準線形固体モデル（三要素モデル）を使用した。このモデルは平衡状態を表すバネ要素  $E_{eq}$  と、バネ要素  $E_1$  と粘性を表すダッシュポット  $\eta_1$  を直列につないだMaxwellモデルを並行につなげたものである。標準線形固体モデルに対応した緩和関数は次式で表される。

$$k(t) = E_{eq} + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \tag{5}$$

複素弾性率は次式で表される。

$$E(i\omega) = E_{eq} + \frac{E_1(\tau_1\omega)^2}{1+(\tau_1\omega)^2} + i \frac{E_1\tau_1\omega}{1+(\tau_1\omega)^2} \tag{6}$$

式(6)の実部と虚部の比を損失正接と呼び、粘弾性体の材料特性としての位相差を示している。本研究で使った標準線形固体モデルでは、特定の周波数帯域では損失正接が大きくなり、それ以外の部分では位相差がなく弾性的挙動を示す。

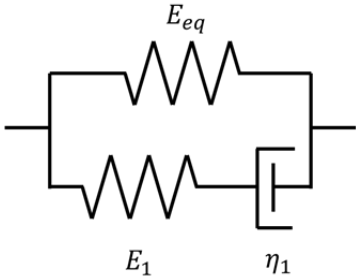


Fig.1 Standard linear solid model (three-element model).

3. 解析モデルと解析条件・最適化問題の設定

解析モデルをFig.2に示す。二次元矩形モデルの左端を完全拘束し、先端に垂直方向に周期荷重を与える。解析モデルの詳細はTable1にまとめる。弾性体、粘弾性体の材料定数はTable2に示す。粘弾性体の効果を反映させるため弾性体は鉄鋼で設計領域内の90%削減し、粘弾性体のポリマー材は80%削減するよう設定した。

有限要素法によって離散化された系の運動方程式は次式で与えられる。

$$(-\omega^2 M + K)U = F \tag{7}$$

ここで、 $M, K, U$ および $F$ はそれぞれ質量マトリックス、剛性マトリックス、変位振幅ベクトルおよび節点外力振幅ベクトルである。粘弾性体の場合には、剛性マトリックスが虚部を持つ複素剛性マトリックスとなる。

本研究では、弾性体と粘弾性体にそれぞれ動的コンプ

ライアンス最小化、散逸エネルギー最大化する目的関数を設定した。弾性体の目的関数は次式で表される。

$$\text{Minimize } \theta = |U(\omega) \cdot F(\omega)|^2 \tag{8}$$

粘弾性体の目的関数はTakezawaら[3]が定義した複素動的コンプライアンスを用いることで散逸エネルギーの最大化を行った。

$$\text{Maximize } \text{Im}[I_d] = \text{Im}[U^*(\omega) \cdot F(\omega)] \tag{9}$$

ここで、上付きの\*は複素共役転置を表している。設計変数は各要素の密度比  $\rho_i$  であり、制約条件は最適化後の体積  $V$  が最適化前の体積  $V_0$  を超さないように次式の通りに設定した。

$$\begin{aligned} \text{Subject to } V - V_0 &\leq 0, \\ 0 < \rho_i &< 1 \end{aligned} \tag{10}$$

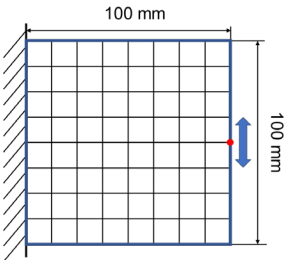


Fig.2 Simulation model for the optimization.

Table1 Details of the finite element model	
Size [mm]	100 × 100
Number of elements	40 × 40
Amplitude of load [N]	1

Table2 Material constants of the model		
	Steel (Elastic)	Polymer (Viscoelastic)
Density ratio	0.10	0.20
Young's modulus ( $E_{eq}$ ) [MPa]	$210 \times 10^3$	$3 \times 10^3$
Young's modulus ( $E_1$ ) [MPa]	/	$17 \times 10^3$
Poisson's ratio		0.40
Density [g/cm <sup>3</sup> ]	$7.8 \times 10^{-9}$	$1.12 \times 10^{-9}$
$\tau_1$	/	
		0.1

4. 最適化手順

本研究では弾性体と粘弾性体それぞれの最適化を二段階に分けて行った。二段階最適化の行程をFig.3に示す。弾性体の配置を行った後、密度比が十分に小さい値を下回った要素で占められた空隙部分を設計領域に設定して、粘弾性体の配置を行う。

最適化アルゴリズムには、OC (Optimality Criteria) 法を用いている。

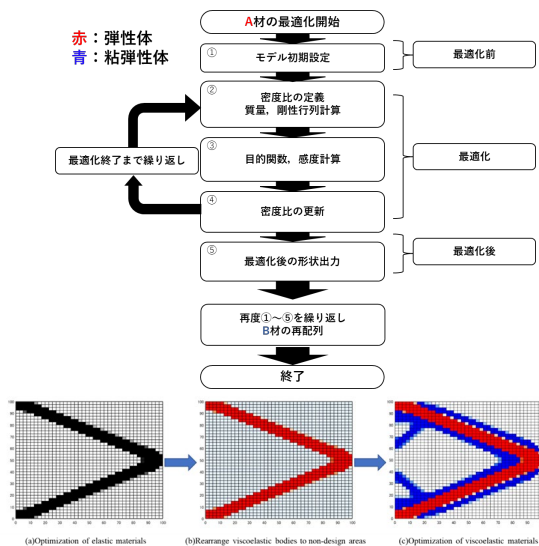


Fig.3 Procedure of two-step topology optimization.

## 5. 最適化結果・考察

本研究で使用した粘弾性モデルと材料特性の設定から得られる損失正接をFig.4に示す。Fig.4(a)が式(6)から計算される複素弾性率の実部 $E'$ と虚部 $E''$ を示し、Fig.4(b)が損失正接を示している。0.6 Hz付近で損失正接が最大となることから、目的関数を評価する周波数を0.6 Hzとした。そのときの最適化結果をFig.5に示す。荷重の先端付近では弾性体の外側に大きく粘弾性体が配置され、反対に固定端付近では弾性体の内側に集中して粘弾性体が配置された結果となった。散逸エネルギーを最大化することにより、局所的に粘弾性体が配置されたと推測する。

Fig.4(b)より損失正接が最も高い値から半減する4 Hz、ほぼ0に等しくなる40 Hzでの最適化も同様に行い、位相差と周波数の関係について考察する。Table3に目的関数、トポロジー形状、荷重点の変位と荷重振幅の位相差 ( $U$ の虚部 /  $U$ の実部) の比較を示す。

形状に関して0.6 Hzには見られなかった固定端付近で孔が発生した。先端付近での粘弾性体の厚みが若干減ってはいるが、弾性体の外側に付着する形で粘弾性体が配置された。周波数が高くなるほど位相差と損失正接の値も下がっていることが分かる。荷重点での位相差は0.6 Hzのときに最も大きくなっていて、損失正接の影響が大きく現れていることが分かる。

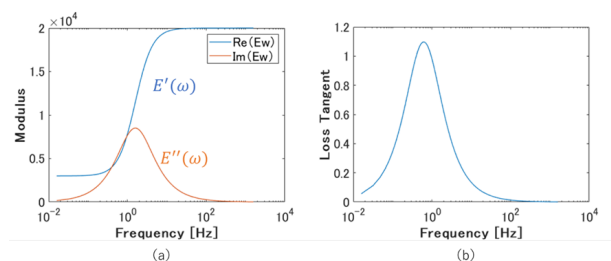


Fig.4 Loss tangent of viscoelastic model.

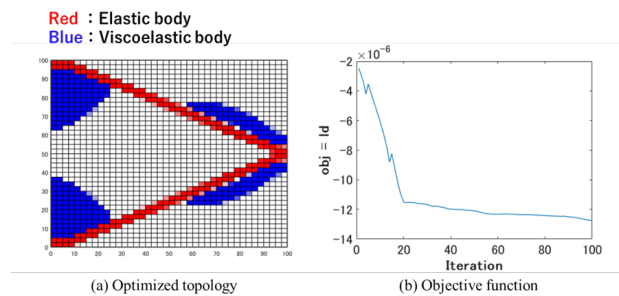


Fig.5 Optimized topology (0.6 Hz).

Table3 Comparison with the results for different frequencies load (0.6, 4 and 40 Hz)

	Objective function	Optimized topology	Phase difference
0.6 Hz			 0.73
4 Hz			 0.20
40 Hz			 0.05

## 6. 結 言

本研究では、弾性体と粘弾性体からなる構造物の振動問題に対するトポロジー最適設計を行った。

弾性体と粘弾性体にはそれぞれ動的コンプライアンス最小化と散逸エネルギー最大化の異なる目的関数を設定して二段階最適化を実施した。その結果、粘弾性特性としての位相差を表す損失正接が最適設計に反映され、明瞭なトポロジーを得ることに成功した。

## 参考文献

- [1] Liu, Q., Ruan, D. and Huang, X.: Topology optimization of viscoelastic materials on damping and frequency of macrostructures, *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.*, Vol.337, pp.305-323, 2018.
- [2] Delgado, G. and Hamdaoui, M.: Topology optimization of frequency dependent viscoelastic structures via a level-set method, *Appl. Math. Comput.*, Vol.347, pp.522-541, 2019.
- [3] Takezawa, A., Daifuku, M., Nakano, Y., Nakagawa, K., Yamamoto, T. and Kitamura, M.: Topology optimization of damping material for reducing resonance response based on complex dynamic compliance, *J. Sound Vib.*, Vol.365, pp.230-243, 2016.