

CIP Runge-Kutta 法による非線形波動方程式の数値解析

Numerical Analysis of Nonlinear Wave Equations by CIP Runge-Kutta Method

田中大毅¹⁾
Daiki TANAKA

¹⁾株式会社 NTT データ数理システム (〒160-0016 東京都新宿区信濃町 35 信濃町煉瓦館 1 階, E-mail: tanaka@msi.co.jp)

CIP scheme is a finite difference scheme for linear advection equations. Although it has higher-order accuracy, there are some difficulty to apply it to complicated equations. We will introduce a new finite difference scheme using the idea of CIP scheme. Our scheme has higher-order accuracy and is capable of wide application. We will apply the our scheme to nonlinear wave equations, the Burgers equation and KdV equation, and their numerical results will be shown.

Key Words : 差分法, CIP 法, Runge-Kutta 法, Burgers 方程式, KdV 方程式

1. はじめに

CIP 法とは, T. Yabe ら [1] によって考案された, 線形移流方程式 (linear advection equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

の初期値問題を解く高精度数値計算法の一つである. CIP 法は, 偏微分方程式 (1) の解が特性直線上では定数であることに着目し, 特性直線上の既知の時刻ステップでの未知関数 u の値を 3 次多項式で補間して求めることから, cubic interpolated pseudo-particle の頭文字をとって CIP と名づけられた [1]. しかしながら, その後の研究で補間に有理関数を用いるなど拡張が試みられ, 現在では constrained interpolation profile の頭文字であるとされている [2].

CIP 法は, 風上差分法や Lax-Wendroff スキームと比べて精度が高く, 不連続面において生じる振動が小さい上, 高精度でありながら風上差分法と同程度に依存領域を狭めることに成功している. しかしながら, 方程式 (1) の右辺が 0 でない場合や, 速度が定数でない場合にはそのまま適用することはできず, フラクショナルステップ法などの方法により移流項とそれ以外の項を個別に扱う必要があった. そこで, 本研究では CIP 法の定式化を見直してこれらの場合でも容易に適用できる数値計算法を考案し, 1 次元および多次元の線形移流方程式の初期値問題に対して従来の CIP 法と同程度の精度が得られることを確認した. 本講演では, 代表的な非線形波動方程式である Burgers 方程式, KdV 方程式の初期値問題に CIP Runge-Kutta 法を適用した数値計算結果を紹介する.

2. CIP 法

T. Yabe らの論文 [1] で提案されている 1 次元移流方程式に対する CIP 法について説明する. 方程式 (1) において, c は正の定数としておく. 方程式 (1) の両辺を x で微分すると, 次の式を得る.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ここで $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ とおくと, v は u と同じ形の方程式を満たすことがわかる. CIP 法ではこの 2 つの方程式 (1)–(2) を連立させて解くこととなる.

$\Delta x, \Delta t$ をそれぞれ x 軸, t 軸方向の分割幅とし, $x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t$ により xt -平面上の格子点 (x_i, t_n) を定める. このとき, $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ であれば, (x_i, t_{n+1}) を通る特性直線と直線 $t = t_n$ の交点 $(x_i - c\Delta t, t_n)$ は, (x_{i-1}, t_n) と (x_i, t_n) の間にある. 方程式 (1)–(2) の解は特性直線上で定数であるので, $(x_i - c\Delta t, t_n)$ における u, v の値を推定できれば, その値を (x_i, t_{n+1}) での u, v の推定値とすることができる. CIP 法では, u と v の (x_{i-1}, t_n) と (x_i, t_n) の値を用いてこの 2 点間を 3 次補間し, $(x_i - c\Delta t, t_n)$ での u, v の値を推定する.

補間多項式を $f(x) = a(x - x_{i-1})^3 + b(x - x_{i-1})^2 + v_{i-1}^n(x - x_{i-1}) + u_{i-1}^n$ とすると, 各係数は

$$a = \frac{(v_i^n + v_{i-1}^n)\Delta x - 2(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta x^3}$$

$$b = \frac{3(u_i^n - u_{i-1}^n) - (v_i^n + 2v_{i-1}^n)\Delta x}{\Delta x^2}$$

と求められる. ここで, $u_i^n = u(x_i, t_n)$ 等々である. この多項式 f を用いて, (x_i, t_{n+1}) での u の推定値を $f(x_i - c\Delta t)$, v の推定値を $f'(x_i - c\Delta t)$ とする.

このように, 特性直線法と多項式補間を用いた定式化により導入される点が, 従来の差分法とは異なる CIP 法の特徴である. しかしながら, 風上差分法は u の $(x_{i-1}, t_n), (x_i, t_n)$ の 2 点の値から線形補間により, Lax-Wendroff スキームは u の $(x_{i-1}, t_n), (x_i, t_n), (x_{i+1}, t_n)$ の 3 点の値から 2 次補間により $(x_i - c\Delta x, t_n)$ の値を推定する方法とみなすこともできる. 従って, CIP 法は風上差分法と Lax-Wendroff スキームの高精度化と見ることができる.

3. CIP Runge-Kutta 法

本節では提案手法である CIP Runge-Kutta 法について説明する.

まず, Taylor 法を用いた CIP 法の定式化を示す. Taylor

法は常微分方程式の数値解法の一つで、予め未知関数の高次の微分を計算しておき、Taylor 展開を用いて次のステップでの値を高精度に求める方法である。具体的には、

$$\frac{d}{dt}u = f(u)$$

という常微分方程式の両辺を t で繰り返し微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}u &= f'(u)u' \\ \frac{d^3}{dt^3}u &= f''(u)u'u' + f'(u)u''\end{aligned}$$

となる。そこで、

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t u'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(t) + \frac{\Delta t^3}{6} u'''(t) + o(\Delta t^4)$$

と Taylor 展開して u', u'', u''' に上で得られた値を代入すれば、 $u(t)$ から $u(t+\Delta t)$ を求めることができる。Taylor 法は次のステップでの値を計算するのに直前のステップでの値のみを用いる 1 段法であり、任意に精度を調節できるという利点があるが、一方で事前に方程式の高階の微分の計算しておかねばならず、その計算は方程式の形によっては煩雑になることがあり、実用上用いられることは少ない。

$f(x)$ を滑らかな関数、 $g(x) = f'(x)$ とする。このとき、 $f'(x), f''(x)$ と $f'''(x)$ は、 $f(x), f(x-\Delta x), g(x), g(x-\Delta x)$ を用いて

$$f'(x) = g(x) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{6}{\Delta x^2}(f(x-\Delta x) - f(x)) \\ &\quad + \frac{2}{\Delta x}(2g(x) + g(x-\Delta x)) + O(\Delta x^2)\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}f'''(x) &= \frac{12}{\Delta x^3}(f(x-\Delta x) - f(x)) \\ &\quad + \frac{6}{\Delta x^2}(g(x-\Delta x) - g(x)) + O(\Delta x)\end{aligned} \quad (5)$$

と近似できる。

(1)–(2) を t についての常微分方程式とみなして、(1) に 3 次、(2) に 2 次の Taylor 法を適用すれば、

$$\begin{aligned}u^{n+1} &= u^n - c\Delta x u_x^n + \frac{c^2\Delta x^2}{2}u_{xx}^n - \frac{c^3\Delta x^3}{6}u_{xxx}^n \\ v^{n+1} &= v^n - c\Delta x v_x^n + \frac{c^2\Delta x^2}{2}v_{xx}^n\end{aligned}$$

となる。計算の詳細は省略するが、CIP 法はこの式の空間微分を (3)–(5) の近似で置き換えたものになっている。先述のとおり、常微分方程式の数値解法として Taylor 法は使い勝手が悪く、解くべき方程式が (1)–(2) よりも複雑になった場合には高階の微分の計算はさらに煩雑になってしまう。

この煩雑さは、Taylor 法の代わりに Runge-Kutta 法を用いることで回避できる。そこで、CIP 法のアイデアと古典的 Runge-Kutta 法を組み合わせた CIP Runge-Kutta 法を提案する。(1)–(2) の空間微分を (3)–(4) の近似によ

り置き換えることで

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t, x) &= -cv(t, x) \\ \frac{d}{dt}v(t, x) &= -c \left\{ \frac{6}{\Delta x^2}(u(t, x-\Delta x) - u(t, x)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\Delta x}(2v(t, x) + v(t, x-\Delta x)) \right\}\end{aligned}$$

を得る。この式に古典的 Runge-Kutta 法を適用したものが CIP Runge-Kutta 法である。

4. 非線形波動方程式の数値計算結果

(1) Burgers 方程式

CIP Runge-Kutta 法を次の Burgers 方程式の初期値問題に適用する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

Burgers 方程式 (6) の両辺を x で微分することで、次の式を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -v^2 + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7)$$

ここで、 $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ である。

CIP Runge-Kutta 法を適用し、(6) と (7) を連立させて解くことを考える。左辺の x 微分の項は (3)–(4) により離散化し、右辺の 2 階微分の項については次の中心差分を適用する。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

(7) の右辺にある $-v^2$ の項は、そのまま v_i^2 で置き換えると計算が不安定となるため、次のような近似を行う。

$$f(x)^2 = \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x)}{2}f(x) + O(\Delta x^2)$$

このようにして x 微分を離散化すると、次の常微分方程式系が得られる。なお、この式は速度 u_i が正の場合の離散化であり、 $u_i < 0$ の場合には移流項の差分の向きを修正する必要があることに注意する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_i &= -u_i v_i + \nu \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \\ \frac{d}{dt}v_i &= -u_i \left\{ \frac{6}{\Delta x^2}(u_{i-1} - u_i) + \frac{2}{\Delta x}(2v_i + v_{i-1}) \right\} \\ &\quad - \frac{v_{i+1} + v_{i-1}}{2}v_i + \nu \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2}\end{aligned}$$

この連立常微分方程式に古典的 Runge-Kutta 法を適用したものが CIP Runge-Kutta 法である。

周期境界条件を課した閉区間 $[0, 1]$ 上で、初期値 $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ として解いた結果が図 1 である。

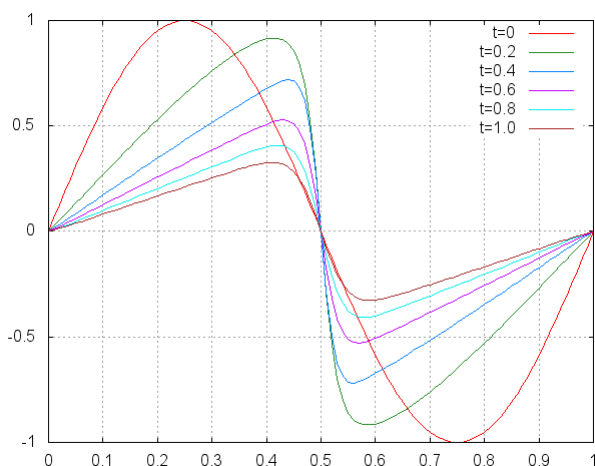


図-1 Burgers 方程式の数値計算結果

(2) 非粘性 Burgers 方程式の衝撃波解

(6) において $\nu = 0$ とした非粘性 Burgers 方程式は、不連続点において衝撃波と呼ばれる現象が起こることが知られている。 $\mathbb{R}$ 上で次の初期条件のもとに Burgers 方程式 (6) の初期値問題を考える。

$$u(0, x) = \begin{cases} u^- & (x < 0) \\ u^+ & (x \geq 0) \end{cases}$$

ただし、 $u^- > u^+ > 0$ とする。このとき、初期値問題には古典的な意味での解は存在しないが、弱い意味での解は存在して

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \left(\frac{u^- + u^+}{2}t > x\right) \\ u^+ & \left(\frac{u^- + u^+}{2}t < x\right) \end{cases}$$

となる。すなわち、不連続点はその両側の平均の速度で伝播する。これは Rankine-Hugoniot 条件と呼ばれる。CIP Runge-Kutta 法による数値解においても、この条件が満たされているかを確認する。

$[0, 1]$ 上で、次の非粘性 Burgers 方程式の初期値境界値問題を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, x \in (0, 1)$$

$$u(0, x) = \begin{cases} 0.8 & x < 0.2 \\ 0.2 & x \geq 0.2 \end{cases}$$

$$u(t, 0) = 0.8, \quad t > 0$$

この問題の厳密解は、

$$u(t, x) = \begin{cases} 0.8 & x < 0.2 + 0.5t \\ 0.2 & x > 0.2 + 0.5t \end{cases}$$

である。

Burgers 方程式の数値計算法としては Murman-Cole 法が知られている [3]。Murman-Cole 法は、Burgers 方程式が

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

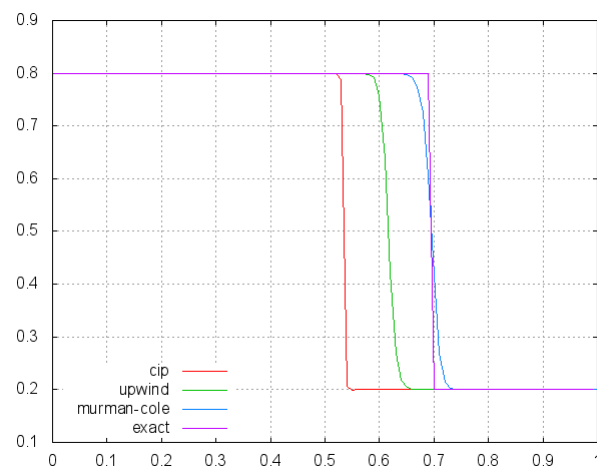


図-2 Burgers 方程式の衝撃波解の数値計算結果

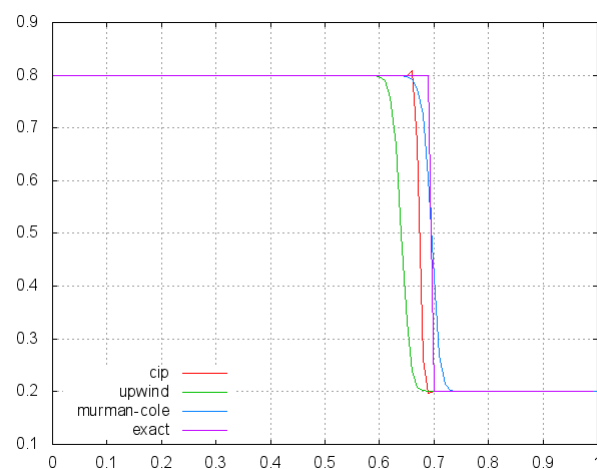


図-3 Burgers 方程式の衝撃波解の数値計算結果

と変形できることに着目し、この式を離散化する計算手法である。

図 2 は、風上差分法、CIP Runge-Kutta 法、Murman-Cole 法の数値計算結果である。Murman-Cole 法は衝撃波の伝播速度が厳密解にほぼ一致しているものの、風上差分法では伝播に遅れが生じており、CIP Runge-Kutta 法ではその遅れが拡大している。このような遅れは、伝播速度として $u(t, x)$ を参照していることにより引き起こされていると考えられる。Rankine-Hugoniot 条件を考慮すると、衝撃波の前後での速度は $\frac{1}{2}(u(t, x + \Delta x) + u(t, x - \Delta x))$ とすべきである。そこで、解くべき方程式を次のように修正して CIP Runge-Kutta 法を適用する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u(t, x + \Delta x) + u(t, x - \Delta x)}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

図 3 はこのような修正を行った場合の数値計算結果である。風上差分法では依然として衝撃波に大きな遅れが見られるが、CIP Runge-Kutta 法では遅れが小さくなっていることがわかる。また、風上差分法や Murman-Cole 法では衝撃波の形が崩れてしまっているが、CIP Runge-Kutta 法では衝撃波の形を保つことができています。

(3) KdV 方程式

最後に, KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (9)$$

の初期値問題に CIP Runge-Kutta 法を適用した結果を示す. KdV 方程式を x で微分すると,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 + \delta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (10)$$

となる. ここで, $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ である. u, v の三階微分の項については, 次の差分近似を用いる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x) = & \frac{1}{2\Delta x^3} \left(f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) \right. \\ & \left. + 2f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x) \right) + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

この差分近似と移流項の CIP 差分を適用し, 時間方向に古典的 Runge-Kutta 法を適用する.

KdV 方程式の数値計算法としては, Zabusky-Kruskal[4] による差分スキームがよく知られている.

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{3\Delta x} (u_{i+1}^n + u_i^n + u_{i-1}^n)(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ & - \delta^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^3} (u_{i+1}^n - 2u_{i+1}^n + 2u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \quad (11) \end{aligned}$$

ここでは, Zabusky-Kruskal の差分スキームと CIP Runge-Kutta 法の数値計算結果を比較する. [4] にならい, $\delta = 0.022$ とし, $[0, 2]$ 上で周期境界条件を課し, 初期条件は $u(0, x) = \cos \pi x$ とした. 図 4 は $t = 0.5$ の, 図 5 は $t = 1.0$ の Zabusky-Kruskal スキームと CIP Runge-Kutta 法の数値計算結果である. いずれの時刻においても, CIP Runge-Kutta 法は Zabusky-Kruskal スキームとほぼ一致した結果となっている.

参考文献

[1] H. Takewaki, A. Nishiguchi and T. Yabe, Cubin interpolated pseudo-particle method (CIP) for solving hyperbolic-type equations, J. Comput. Phys., **61** (1985), 261–268.

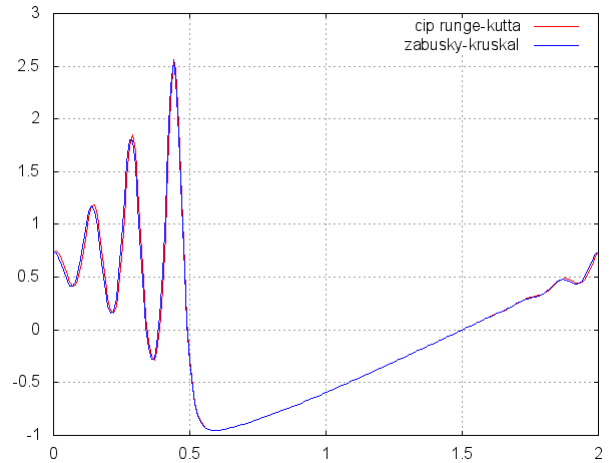


図-4 KdV 方程式の数値計算結果 $t = 0.5$

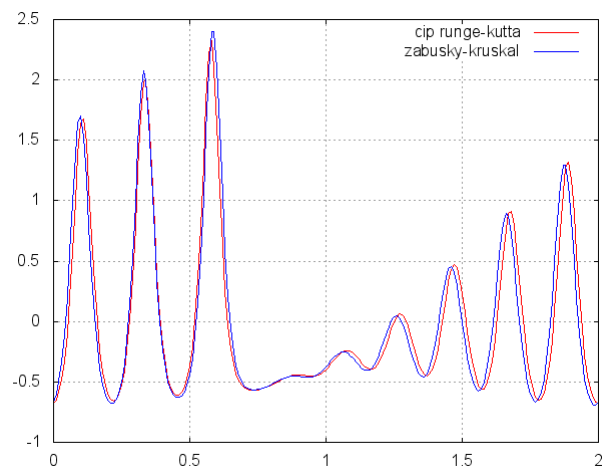


図-5 KdV 方程式の数値計算結果 $t = 1.0$

[2] T. Yabe, F. Xiao and T. Utsumi, Constrained interpolation profile method for multiphase analysis, J. Comput. Phys., **169** (2001), 556–593.
 [3] E. M. Murman, J. D. Cole, Calculation of plane steady transonic flows, AIAA Journal, **9** (1971), 114–121.
 [4] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Interactions of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., **15** (1965), 240–243.