計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　計算工学会

多点拘束法と重合メッシュ法の併用に関する基礎検討

Fundamental Study on Combined Use of Multi-Point Constrains
and S-version Finite Element Method

山東 篤[1)]，石原 尚[2)]，西川 周建[2)]，
Atsushi Sando, Nao Ishihara and Shuken Nishikawa

1) 博(工) 和歌山工業高等専門学校 知能機械工学科 教授
（〒644-0023 和歌山県御坊市名田町野島77, E-mail: sandou@wakayama-nct.ac.jp）
2) 和歌山工業高等専門学校 知能機械工学科

The purpose of this study is to propose s-version finite element mesh superposition method (s-FEM) using meshes bonded by the multi-point constraint (MPC) for improvement of the analytical accuracy. S-FEM is applied to improve the analytical accuracy of a nonconforming mesh modeled by MPC. A simple two-dimensional static analysis was performed by applying the proposed method. The analysis accuracy was improved by a superimposing mesh on the multi-point constraint mesh.

Key Words : S-version FEM, Multi-point constraint, Nonconforming mesh

1.　はじめに

建築構造物と地盤の連成解析など，スケール差の大きい解析モデルのメッシュ生成は，構造要素間においてメッシュの整合性を保持する必要があり，モデル形状に合わせたその手作業は多大な手間となる．その解決方法の一つは不整合メッシュを使用できる計算理論を用いることであり，その一つに多点拘束法がある．多点拘束法は2つのメッシュを独立に生成し，両者の指定した辺（または面）に多点拘束条件を設定することでその辺と辺を結合し，結合境界で不整合な１つのメッシュとすることができる．ただし，結合境界のメッシュのサイズ比や物性値の差，多点拘束条件を定義する際に設定するマスター，スレーブの選び方が解析精度に悪影響を与える可能性が指摘されている[1]．

著者らは，整合性を考慮することなく2つのメッシュを結合する方法として，はみ出しを有する重合メッシュ法を提案した[2]．同手法はメッシュの重ね合わせる領域を十分に確保すれば，結合境界周辺の解析精度を高めつつ不整合メッシュを生成できる．一方，同手法による不整合メッシュ生成の手間は多点拘束法より多く，特に3次元問題ではそれが顕著に見られた．

本稿では，多点拘束法で結合したメッシュを用いた重合メッシュ法を試行し，多点拘束したメッシュにローカルメッシュを重ね合わせることによる解析精度の向上効果を調査する．

2.　多点拘束法と重合メッシュ法の併用

（1）　多点拘束法

本稿では文献[3]で示された多点拘束法を2次元問題に用いる．分割数の異なる2つのメッシュ（マスター，スレーブ）を結合するにあたり，その結合境界に課される多点拘束条件式に含まれる係数行列は式(1)のようになる．

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_0\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{C}_0=\int_\Gamma \boldsymbol{N}_A^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{N}_B(\boldsymbol{x})\,d\Gamma \tag{2}$$

$\boldsymbol{N}_A(\boldsymbol{x})$と$\boldsymbol{N}_B(\boldsymbol{x})$は，式(3),(4)に示すように，それぞれスレーブ側の形状関数を格納した行ベクトルと，スレーブ側の形状関数と負符号のマスター側の形状関数を格納した行ベクトルである．

$$\boldsymbol{N}_A(\boldsymbol{x})=\lfloor N_S^1(\boldsymbol{x}) \quad \dots \quad N_S^n(\boldsymbol{x})\rfloor \tag{3}$$

$$\boldsymbol{N}_B(\boldsymbol{x})=\lfloor N_S^1(\boldsymbol{x}) \quad \dots \quad N_S^n(\boldsymbol{x}) \quad -N_M^1(\boldsymbol{x}) \quad \dots \quad -N_M^m(\boldsymbol{x})\rfloor \tag{4}$$

多点拘束問題の基礎方程式は，2 つのメッシュの剛性マトリックス$\mathbf{K}$とラグランジュ未定乗数λを含む式(5)のようになる．$\mathbf{u}$，$\mathbf{f}$はマスターおよびスレーブの節点変位ベクトルおよび荷重ベクトルである．

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{C}^T\\ \mathbf{C} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{C}^T\\ \mathbf{C} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \tag{5}$$

（2）　重合メッシュ法

重合メッシュ法は解析モデル全体を表すグローバルモデルとその内部に重ね合わせたローカルモデルを定義し，重ね合わせた領域内の変位場を両モデルの変位の和で表す．これにより，重ね合わせた領域内のズーミングによる解析精度の向上を図ることができる．重合メッシュ法の基礎方程式は 式(6)のようになる．

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}^{\mathrm{G}} & \mathbf{K}^{\mathrm{GL}}\\ \mathbf{K}^{\mathrm{LG}} & \mathbf{K}^{\mathrm{L}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{\mathrm{G}}\\ \mathbf{u}^{\mathrm{L}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{f}^{\mathrm{G}}\\ \mathbf{f}^{\mathrm{L}}\end{Bmatrix} \tag{6}$$

ここで，$\mathbf{K}^{\mathrm{G}}, \mathbf{K}^{\mathrm{L}}$は離散化されたグローバルメッシュと

ローカルメッシュの剛性マトリックス，$\mathbf{K}^{GL}$は両メッシュの相互作用を表す連成項である．各記号の上添字はグローバル，ローカルに関する諸量であることを意味する．

(3) 多点拘束法で結合したメッシュを用いた重合メッシュ法

本稿では，多点拘束法を適用したメッシュを重合メッシュ法のグローバルメッシュとする定式化を示す．この場合，(7)式のように(5)式の行列とベクトルをそれぞれ(6)式の$\mathbf{K}^{G}$，$\mathbf{u}^{G}$，$\mathbf{f}^{G}$へ代入することになる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}^{L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^{L} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

この方程式を解いて得られる多点拘束メッシュの節点変位$\mathbf{u}$を重合メッシュ法におけるグローバルメッシュの節点変位とみなし，位置を考慮してローカルメッシュの節点変位$\mathbf{u}^{L}$と足し合わせれば物理的な節点変位となる．

3. 数値解析例

図1のような1200mm×2400mmの2次元板のA上面へ均等に鉛直荷重60kNを作用させた静的解析を行い，多点拘束法，提案手法のFEM参照解に対するY方向節点変位のL2ノルムを比較する．この比較により，ローカルメッシュを重ね合わせることによる多点拘束モデルの解析精度への影響を調査する．

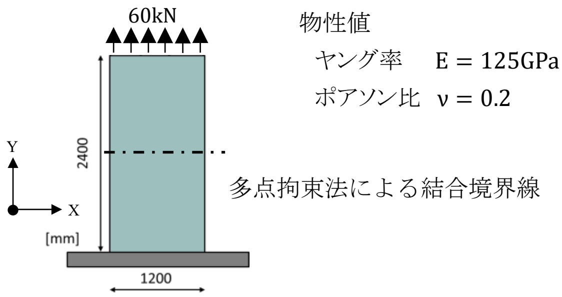

図1　解析モデル

提案手法による本解析モデルのモデリングには，図2(a)に示す3種類のメッシュを重ね合わせたモデルを用いる．板の下半分を表す2×2分割メッシュ（図2(b)）と上半分を表す3×3分割メッシュ（図2(c)）は多点拘束法を適用したグローバルメッシュのマスター，スレーブであり，ローカルメッシュは多点拘束した辺に沿って重ね合わせた微細メッシュ（図2(d)）とする．多点拘束法は提案手法のグローバルメッシュを構成する2つのメッシュ（図2(b),(c)）を結合して求めた解析結果とする．

比較対象のFEM参照解は，図3のように下半分を2×3分割して上半分を3×3分割した整合メッシュを用いた解析結果とする．

L2ノルムは板の左側面に沿った縦一列に並ぶ6節点と，結合境界線に沿った横一列に並ぶ4節点のY方向変位を用いて計算する．提案手法と多点拘束法で2つの節点が重なっている結合境界線上では，スレーブ側の節点だけを用いることとする．

L2ノルムの一覧を表1に示す．左側面と結合境界線のいずれにおいても提案手法は多点拘束法よりL2ノルムの値が小さくなっている．このことから，多点拘束法で構築した不整合メッシュにローカルメッシュを重ね合わせることで解析精度の向上が期待できることが分かった．

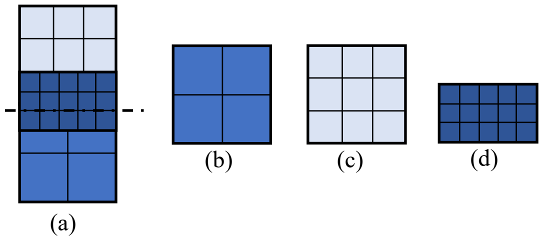

図2　提案手法，多点拘束法で用いたメッシュ

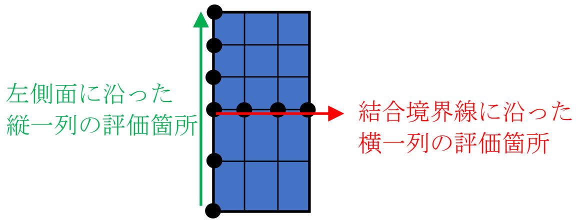

図3　FEM参照解のメッシュとL2ノルム評価箇所

表1　各評価箇所のL2ノルム

	多点拘束法	提案手法
左側面	1.4715E-03	1.1410E-03
結合境界線	2.4464E-04	1.4190E-04

4. まとめ

本稿では多点拘束法の解析精度向上のために多点拘束法と重合メッシュ法の併用を行うための定式化を示し，単純な解析例に適用した．その結果，多点拘束したグローバルメッシュにローカルメッシュを重ね合わせた解析モデルは，多点拘束法を単独で用いるより解析精度が向上することを確認した．

参考文献

[1] 坂敏秀，山東篤，高橋容之，小磯利博，山田和彦，面対面多点拘束問題における拘束力規定面の選択が応力分布の精度に及ぼす影響，第23回計算工学講演会論文集, A-10-05, 2018.
[2] 山東篤，はみ出しを有する重合メッシュ法による構造物・地盤一体モデルの効率的モデリング，構造工学論文集, Vol.68B, 2022.
[3] 山東篤，坂敏秀，高橋容之，小磯利博，三角形分割に基づく数値積分を用いた三次元問題における面対面の多点拘束法，日本計算工学会論文集，論文番号20200016, 2020.