

複合硬化則およびせん断誘起損傷を導入した 結合力埋込型構成則の提案

A Cohesive Embedded Constitutive Law combined with
Mixed Hardening Law and Shear-Induced Damage

田尾嶺弥¹⁾, 新宅勇一²⁾, 寺田賢二郎³⁾

Reiya Tao, Yuichi Shintaku and Kenjiro Terada

- 1) 筑波大学大学院システム情報工学研究科 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: s2220855@s.tsukuba.ac.jp)
- 2) 博(工) 筑波大学システム情報系助教 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: shintaku@kz.tsukuba.ac.jp)
- 3) 東北大学災害科学国際研究所 (〒980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉468-1)

The contribution of this study is to propose a cohesive traction embedded constitutive law combined with shear-induced damage. The proposed constitutive law accommodates a hyperelasticity-based plastic model with the decomposition of the deformation gradient multiplicatively into separation-induced, elastic, and plastic parts. The plastic deformation gradient is further decomposed into energetic and dissipative parts to realize Bauschinger effect under cyclic loading. The energetic part of plastic deformation gradient contributes to an hyperelasticity-like energy related to kinematic hardening and leads to a back stress. Moreover, to realize both shear-lip fracture and flat fracture, shear-induced damage and cohesive traction separation law are introduced into the hyperelasticity-based plastic model. The shrinkage of yield surface that is caused by the rotation and elongation of voids in a shear band under low stress state is realized by the introduction of the shear-induced damage into the Tresca yield function. The evolution of shear-induced damage is determined by the damage loading function corresponding to the plastic energy release based on thermodynamics. On the other hand, the stress release process along with the material separation due to void nucleation, growth and coalescence under high stress state is represented by the combination between the separation-induced deformation gradient and the cohesive traction separation law.

Key Words: Ductile, Fatigue, Kinematic Hardening, Tresca model, Cohesive Zone Model

1. 緒言

橋梁や原子炉のような構造物が地震動のような繰返し載荷を受けると、溶接部や隅角部などの応力集中部で塑性ひずみが蓄積する。さらに、塑性ひずみの蓄積によって材料内部に損傷が発生し、延性破壊および疲労破壊が生じることが懸念される^[1]。したがって、構造物の安全性の確保のためには、繰返し載荷を受けた部材の強度および靱性の予測が重要となる。

単調載荷における延性破壊は、高応力下で静水圧応力によって介在物の周辺でボイドが核生成・成長・合体することで生じる平坦破壊、および低応力下で塑性変形によって形成されたせん断带上でボイドが回転・伸長することで生じるシェアリップ破壊に大別される。これに対して、繰返し載荷では、材料を一方方向に負荷後、移動硬化によって反対への塑性降伏の抵抗が小さくなるBauschinger効果が現れる。その後、塑性ひずみの蓄積に伴って結晶粒内における転移の運動と転位組織に関連したすべりの集積が発生し、材料の靱性が低下することで疲労破壊が発生する。さらに、実際の破壊現象では、疲労破壊および延性破壊の双方が複合して生じることもある。したがって、数値シミュレーションによって構造物の強度や靱性の低下を予測するためには、移動硬化則を導入した材料モデルを構築する必要がある。

新宅らによって提案された結合力埋込型構成則^[2]は、各物質点で材料内部のき裂の開口挙動に対応する見かけ上の変形勾配、およびき裂開口と結合力の関係を導入し、結合力と主応力のつり合いを考慮することで、延性破壊における応力の解放過程を表現可能としている。また、移動硬化則および塑性変形に誘起される損傷を導入することで、繰返し荷重を受けた部材の強度・靱性の低下を表現している。さらに、塑性モデルとしてせん断誘起損傷を組み込んだTrescaの降伏関数を導入した結合力埋込型構成則によって、単調載荷におけるシェアリップ破壊が表現可能となる。しかし、繰返しのせん断変形による損傷挙動を正しく評価するには、移動硬化則とせん断誘起損傷の双方を結合力埋込型構成則に導入する必要がある。

疲労破壊時の繰返し塑性挙動を表現する有限変形における移動硬化弾塑性モデルの枠組みは大きく分けて、背応力の発展則を速度形式で記述する速度型と、塑性変形勾配テンソルの乗算分解を用いた乗算分解型の2つがある。速度型は客観応力速度を用いて拡張がなされるモデルであるため、特にせん断変形与えられる問題において、採用した客観応力速度によって不自然な応力振動を示すことが指摘されている^[3-4]。一方、乗算分解型は、塑性変形勾配テンソルをエネルギー消散部およびエネルギー貯蓄部に関する部分に乗算分解し、エネルギー貯蓄

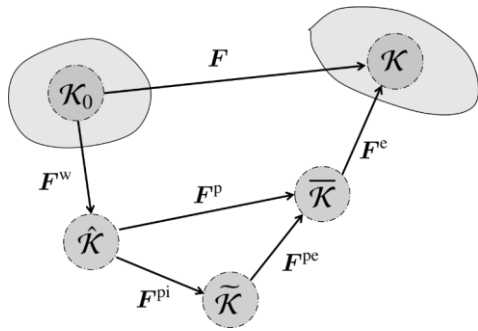


図 1 変形勾配の乗算分解による各配置の関係

部に関する超弾性ひずみエネルギーを規定することによって移動硬化をモデル化するものである。すなわち、客観応力速度を採用しないため、速度型で見られるようなせん断変形が与えられる問題における不自然な応力振動が生じないことが確認されている^[5-6]。

そこで本研究では、様々な応力状態において繰り返し载荷を受ける金属材料の破壊挙動を表現するために、塑性変形勾配の乗算分解による移動硬化則およびせん断誘起損傷を導入した結合力埋込型構成則を提案する。

2. 複合硬化則およびせん断誘起損傷を導入した結合力埋込型構成則

(1) 変形勾配テンソルの乗算分解

変形の様子を定量的に表す変形勾配テンソル \mathbf{F} は、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \mathbf{F}^w \quad (1)$$

と乗算分解される。ここで、き裂開口誘起成分 \mathbf{F}^w は基準配置 \mathcal{K}_0 からき裂開口に関する中間配置 $\hat{\mathcal{K}}$ 、塑性成分 \mathbf{F}^p はき裂開口に関する中間配置 $\hat{\mathcal{K}}$ から塑性変形に関する中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ 、および弾性成分 \mathbf{F}^e は塑性変形に関する中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ から現配置 \mathcal{K} への変形をそれぞれ表す。さらに塑性変形勾配テンソル \mathbf{F}^p は、

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{pi} \mathbf{F}^{pe} \quad (2)$$

と乗算分解される。ここで、エネルギー消散部である \mathbf{F}^{pi} はき裂開口に関する中間配置 $\hat{\mathcal{K}}$ から移動硬化に関する局所的な中間配置 $\tilde{\mathcal{K}}$ への変形を表現し、エネルギー貯蔵部である \mathbf{F}^{pe} は移動硬化に関する局所的な中間配置 $\tilde{\mathcal{K}}$ から塑性変形に関する中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ への変形を表す。図1に、提案する構成則における変形勾配の乗算分解による各配置の関係を示す。

基準配置 \mathcal{K}_0 における右Cauchy-Greenテンソル \mathbf{C} 、およびき裂開口誘起に関する右Cauchy-Greenテンソル \mathbf{C}^w は、

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3)$$

$$\mathbf{C}^w = \mathbf{F}^w T \mathbf{F}^w \quad (4)$$

と表される。き裂開口に関する中間配置 $\hat{\mathcal{K}}$ における塑性右Cauchy-Greenテンソル $\hat{\mathbf{C}}^p$ 、塑性のエネルギー消散部に関する右Cauchy-Greenテンソル $\hat{\mathbf{C}}^{pi}$ 、およびき裂開口に関する速度勾配テンソル $\hat{\mathbf{L}}^w$ は、

$$\hat{\mathbf{C}}^p = \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{C}}^{pi} = \mathbf{F}^{piT} \mathbf{F}^{pi} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^w = \dot{\mathbf{F}}^w \mathbf{F}^{w-1} \quad (7)$$

と表される。移動硬化に関する局所的な中間配置 $\tilde{\mathcal{K}}$ において、塑性のエネルギー貯蔵部に関する右Cauchy-Greenテンソル $\tilde{\mathbf{C}}^{pe}$ 、および塑性のエネルギー消散部に関する速度勾配テンソルは $\tilde{\mathbf{L}}^{pi}$ 、

$$\tilde{\mathbf{C}}^{pe} = \mathbf{F}^{peT} \mathbf{F}^{pe} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^{pi} = \dot{\mathbf{F}}^{pi} \mathbf{F}^{pi-1} \quad (9)$$

と表される。塑性変形に関する中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ における弾性右Cauchy-Greenテンソル $\bar{\mathbf{C}}^e$ 、および塑性速度勾配テンソル $\bar{\mathbf{L}}^p$ は、

$$\bar{\mathbf{C}}^e = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{L}}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \quad (11)$$

と表される。

(2) Helmholtzの自由エネルギー

各ひずみ変数に対応する応力変数および構成則を

導出するために、Helmholtzの自由エネルギー ψ は、

$$\psi = \psi^e(\bar{\mathbf{C}}^e) + (1 - D_{shr})^2 \left\{ \psi^{kin}(\tilde{\mathbf{C}}^{pe}) + \psi^{iso}(\xi^p) \right\} + \psi^D(\xi^D) + \psi^w(w^{(i)}) \quad (12)$$

と与えられる。ここで、 D_{shr} はせん断誘起損傷変数、 ξ^p は累積塑性ひずみ、 ξ^D は損傷に関する熱力学的応力の硬化に関する内部変数、 $w^{(i)}$ はき裂開口変位である。また、超弾性に関するひずみエネルギー $\psi^e(\bar{\mathbf{C}}^e)$ 、移動硬化に関するひずみエネルギー $\psi^{kin}(\tilde{\mathbf{C}}^{pe})$ 、等方硬化に関するひずみエネルギー $\psi^{iso}(\xi^p)$ 、せん断誘起損傷に関するひずみエネルギー $\psi^D(\xi^D)$ 、およびき裂開口に関するひずみエネルギー $\psi^w(w^{(i)})$ は、

$$\psi^e(\bar{\mathbf{C}}^e) = \frac{\mu}{2} \left(\text{tr} \bar{\mathbf{C}}^e - 3 - \sqrt{\ln(\det \bar{\mathbf{C}}^e)} \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\det \bar{\mathbf{C}}^e - 1 - 2 \ln(\det \bar{\mathbf{C}}^e) \right) \quad (13)$$

$$\psi^{kin}(\tilde{\mathbf{C}}^{pe}) = \frac{c}{2} \left(\text{tr} \tilde{\mathbf{C}}^{pe} - 3 - \sqrt{\ln(\det \tilde{\mathbf{C}}^{pe})} \right) \quad (14)$$

$$\psi^{iso}(\xi^p) = \frac{1}{2} H^p (\xi^p)^2 + R^p \left[\xi^p + \left\{ \frac{1}{r^p} \exp(-r^p \xi^p) - 1 \right\} \right] \quad (15)$$

$$\psi^D(\xi^D) = \frac{1}{2} H^D (\xi^D)^2 + R^D \left[\xi^D + \left\{ \frac{1}{r^D} \exp(-r^D \xi^D) - 1 \right\} \right] \quad (16)$$

$$\psi^w(w^{(i)}) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N^{dim}} G_c \left[1 - \left(1 + \frac{w^{(i)}}{w_c} \exp\left(-\frac{w^{(i)}}{w_c}\right) \right) \right] \quad (17)$$

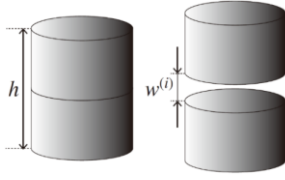


図 2 一次元における結合力埋込型構成則の概念図

と定義される。ここで、 μ と λ は弾性に関する材料定数、 c は移動硬化に関する材料定数、 H^p 、 R^p 、 r^p は等方硬化に関する材料定数、 H^D 、 R^D 、 r^D はせん断誘起損傷に関する材料定数、 h は要素の代表長さ、 G_c は臨界エネルギー解放率、および w_c は臨界き裂開口変位である。

(3) 超弾性構成則

中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ における第二Piola-Kirchhoffテンソル $\bar{\mathbf{S}}$ 、Mandel応力 $\bar{\mathbf{M}}$ 、および背応力テンソル $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ は、

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \psi^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}^e} \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = 2 \bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \psi^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}^e} \quad (19)$$

$$\bar{\boldsymbol{\chi}} = 2(1 - D_{\text{shr}})^2 \mathbf{F}^{\text{pe}} \frac{\partial \psi^{\text{kin}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}^{\text{pe}}} \mathbf{F}^{\text{peT}} \quad (20)$$

と導出される。移動硬化に関係する局所的な中間配置 $\tilde{\mathcal{K}}$ において、Mandel応力に類似した移動硬化変数テンソル $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{kin}}$ は、

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{kin}} = 2(1 - D_{\text{shr}})^2 \tilde{\mathbf{C}}^{\text{pe}} \frac{\partial \psi^{\text{kin}}}{\partial \tilde{\mathbf{C}}^{\text{pe}}} \quad (21)$$

となる。

(4) 結合力埋込型構成則

有限変形理論に基づく結合力埋込型構成則^[2]では、各物質点において仮想的なき裂面を仮定する。各方向の開口変位に伴う見かけ上の開口変位 $w^{(i)}$ を用いて、き裂の開口による見かけ上の変形勾配 \mathbf{F}^w は、

$$\mathbf{F}^w = \sum_{i=1}^{N^{\text{dim}}} \left(1 + \frac{w^{(i)}}{h}\right) \hat{\mathbf{e}}^{(i)} \otimes \mathbf{e}^{(i)} \quad (22)$$

とスペクトル分解される。ここで、 $\mathbf{e}^{(i)}$ は応力の固有ベクトルである。結合力埋込型構成則の概念図を図2に示す。提案する構成則では、図2のように代表長さの連続体の内部に仮想的なき裂が発生することを想定する。結合力埋込型構成則ではき裂と主応力の方向が一致しているものと仮定しているため、結合力 $\bar{\mathbf{t}}^{(i)}$ と $\bar{\mathbf{K}}$ を参照するMandel応力 $\bar{\mathbf{M}}$ の固有値 $\bar{\mathbf{M}}^{(i)}$ のつり合い式は、

$$\Phi^{w(i)} = \bar{\mathbf{t}}^{(i)} - \bar{\mathbf{M}}^{(i)} \quad (23)$$

と表される。ここで、RiceとWangの指数型結合力モデル

^[7]を採用すると、結合力 $\bar{\mathbf{t}}^{(i)}$ は、

$$\bar{\mathbf{t}}^{(i)} = \frac{G_c}{w_c} \left(\frac{w^{(i)}}{w_c} \right) \exp \left(-\frac{w^{(i)}}{w_c} \right) \quad (24)$$

と導出される。

(5) 複合硬化則およびせん断誘起損傷を導入したTrescaの降伏関数

本研究では、シェアリップ破壊における塑性および移動硬化に関するひずみエネルギーの解放過程を再現するために、せん断誘起損傷を導入したTrescaの降伏関数を採用する。まず、背応力 $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ およびMandel応力 $\bar{\mathbf{M}}$ を用いて、相対応力テンソル $\bar{\mathbf{Y}}$ は、

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{M}} - \bar{\boldsymbol{\chi}} \quad (25)$$

と定義される。相対応力テンソル $\bar{\mathbf{Y}}$ およびせん断誘起損傷変数 D_{shr} を導入することで、移動硬化による影響および降伏曲面の収縮を表現可能としたTrescaの降伏関数は、

$$\Phi^{p(\alpha)} = \bar{\mathbf{Y}}_{\text{eq}}^{(\alpha)}(\bar{\mathbf{Y}}) - (1 - D_{\text{shr}})^2 \sigma_y \quad (26)$$

と表される。ここで、Voce硬化則を導入した降伏応力 σ_y は、

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + H^p \xi^p + R^p [1 - \exp(-r^p \xi^p)] \quad (27)$$

と表される。また、塑性変形速度テンソル $\bar{\mathbf{D}}^p$ 、塑性変形のエネルギー消散部に関する変形速度テンソル $\tilde{\mathbf{D}}^{\text{pi}}$ 、およびの累積塑性ひずみ ξ^p の発展則は、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}^p &= \text{sym}(\bar{\mathbf{L}}^p) \\ &= \sum_{\alpha=1}^6 \dot{\gamma}^{p(\alpha)} \frac{\partial \Phi^{p(\alpha)}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}^{\text{pi}} &= \text{sym}(\tilde{\mathbf{L}}^{\text{pi}}) \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^6 \dot{\gamma}^{p(\alpha)} \right) \frac{b}{c} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{kin}}^p \end{aligned} \quad (29)$$

$$\xi^p = \sum_{\alpha=1}^6 \dot{\gamma}^{p(\alpha)} \quad (30)$$

と表される。ここで、 $\dot{\gamma}^{p(\alpha)}$ は塑性乗数、および b は塑性変形のエネルギー消散部に関する材料定数である。

(6) 損傷負荷関数

せん断誘起損傷変数を発展させるための損傷負荷関数 Φ^D は、

$$\Phi^D = \Theta - (H^D \xi^D + R^D [1 - \exp(-r^D \xi^D)]) \quad (31)$$

と表される。ここで、塑性に関するひずみエネルギーの解

表 1 材料定数

| | | |
|----------------------|---------------------|-------|
| Young's modulus | E [GPa] | 206.0 |
| Poisson ratio | ν [-] | 0.300 |
| Initial yield stress | σ_{y0} [MPa] | 300.0 |
| Isotropic hardening | H^p [MPa] | 0.000 |
| | R^p [MPa] | 0.000 |
| | r^p [-] | 0.000 |
| Kinematic hardening | b [-] | 100.0 |
| | c [MPa] | 5000 |

放率を表す熱力学的応力である Θ は、

$$\Theta = 2(1 - D_{shr})(\psi^{iso} + \psi^{kin}) \tag{32}$$

と導出される。また、損傷に関する未定乗数 $\dot{\gamma}^D$ を用いて、せん断誘起損傷変数 D_{shr} および熱力学的応力 Θ の硬化に関する内部変数 ξ^D の発展則は、

$$\dot{D}_{shr} = \dot{\gamma}^D \tag{33}$$

$$\dot{\xi}^D = \dot{\gamma}^D \tag{34}$$

となる。

3. 数値解析例

本章では、塑性変形勾配テンソルの乗算分解を用いた移動硬化則を導入したTrescaモデルを用いた数値解析例を示す。解析モデルは1要素とし、要素の上下端面に繰り返し荷重を与えるものとする。また、表1に本数値解析で用いた材料定数を示す。

図3に数値解析によって得られた応力-ひずみ関係を示す。図3より、引張状態で硬化した応力に対して、圧縮状態での降伏応力が小さくなっていることがわかる。すなわち、移動硬化によって反対への塑性降伏の抵抗が小さくなるBauschinger効果が確認された。したがって、塑性変形勾配テンソルの乗算分解を用いた移動硬化則はTrescaモデルに適用することが可能である。

4. 結言

本研究では、塑性変形勾配の乗算分解による複合硬化およびせん断誘起損傷を導入した結合力埋込型構成則を提案した。また、結合力モデルおよびせん断誘起損傷を除いた、塑性変形勾配テンソルの乗算分解を用いた移動硬

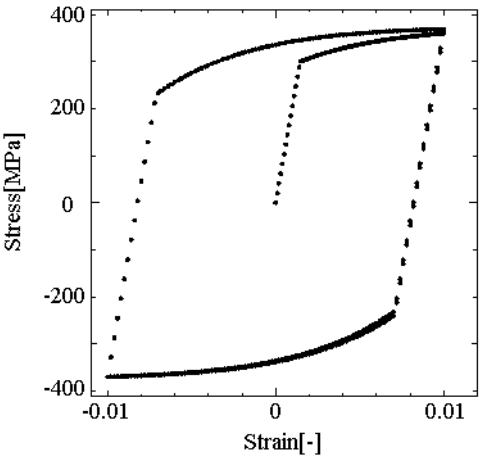


図 3 応力-ひずみ関係

化則を導入したTrescaモデルを用いた数値解析を実施した。なお、本講演では、種々の応力状態において繰り返し载荷が与えられる問題に対して、結合力モデルおよびせん断誘起損傷についても適用した構成則を用いた数値解析例を示す。

参考文献

[1] 坂野昌弘, 三上市藏, 鷹羽新二, 鋼製橋脚隅角部の低サイクル疲労挙動, 土木学会論文集, Vol.563, pp. 49-60, 1997.

[2] Shintaku, Y., Tsuktsumi, S. and Terada, K.: A CDM-like constitutive law for predicting degradation of strength and ductility of steel subjected to cyclic loading, *Int. J. Plast.*, Vol. 153, 2022.

[3] de Souza Neto, E.A., Peric, D. and Owen, D.R.J.: Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. *John Wiley & Sons*, 2008.

[4] Haupt, P. and Tsakmakis, C.: On kinematic hardening and large plastic deformations. *Int. J. Plasticity*, Vol. 2, pp. 279-293, 1986.

[5] 山川優樹, 橋口公一: 詳説: 弾塑性力学(53)-(55), 機械の研究, 養賢堂, 第63巻第11号(2011)から3回連載.

[6] Hashiguchi, K., Yamakawa, Y.: Introduction to Finite Strain Theory for Continuum Elasto-plasticity, *John Wiley & Sons*, 2012.

[7] Rice, J.R., Wang, J., Embrittlement of interfaces by solute segregation, *Mater. Sci. Eng.*, Vol.107, pp.23-40, 1989.