

# S-IGA (S-version Isogeometric Analysis) を用いた線形破壊力学解析の高精度化に関する研究 (ローカルとグローバルパッチのサイズ比と要素細分化の影響)

A Study on Accuracy of Linear Fracture Mechanics Using the S-Version Isogeometric Analysis.

(Size ratio of local and global patches and effect of element subdivision)

黒澤太加志<sup>1)</sup> 砂岡優輔<sup>2)</sup> 土山雄飛<sup>3)</sup> 乙黒雄斗<sup>4)</sup> 岡田裕<sup>5)</sup>

Takashi Kurosawa, Yusuke Sunaoka, Yuhi Tutiayama, Yuto Otoguro and Hiroshi Okada

<sup>1)</sup>東京理科大学大学院, Tokyo University of Science

<sup>2)</sup>東京理科大学大学院, Tokyo University of Science

<sup>3)</sup>東京理科大学大学院, Tokyo University of Science

<sup>4)</sup>東京理科大学, Tokyo University of Science

<sup>5)</sup>東京理科大学, Tokyo University of Science

S-version Isogeometric Analysis Applying the idea of S-version Finite Element Method was studied to improve the accuracy of linear fracture mechanics analysis. The relationship between the size ratio of global and local patches and element subdivision was clarified, and make guidelines to ensure the accuracy of the analysis.

**Key Words :** Fracture Mechanics, Isogeometric Analysis, S-version Isogeometric Analysis

## 1. 緒言

機械部品を設計する際の一般的な手順として、まず CAD (Computer Aided Design) を用いて設計モデルを生成し、そこから有限要素法 (Finite Element Method, FEM) の解析モデルを生成して解析を行っている。しかし、解析を行うために生成される FEM モデルは多項式による形状表現であるため、厳密な幾何形状を表現できず形状誤差を発生させる原因となっている。[1,2] この問題点に対するアプローチの一つとして、Hughes らによって提案されたアイソジオメトリック解析 (Isogeometric Analysis, IGA) が近年注目されている。IGA は、厳密な幾何形状を表現することが可能な非一様有理 B スプライン (NonUniform Rational B-spline, NURBS) を FEM の幾何表現および形状関数として用いた解析手法である。これにより、IGA では形状誤差を発生させずに解析を行うことができ、解析の精度向上が見込まれる。

また、構造物の設計に際して、安全性を確保する上で破壊力学解析を行うことは非常に重要であり、IGA を用いた破壊力学解析の研究も行われている。き裂問題に関しては FEM における Barsoum の特異要素 [3] と類似の幾何学マッピングの考え方を IGA に持ち込んだ特異パッチ法 [4] がある。特異パッチ法を用いることで、き裂先端近傍の応力特異性を表現できるため高精度にき裂問題の解析を行うことが可能となる。特異パッチ法は二次元問題に対し、Okada ら [4] に提案され、精度に対する詳細な検討が示された後、Omar ら [5] により

三次元問題へ適用されている。

構造物の破壊力学解析では、き裂を含む問題などの応力特異性を有する問題の解析を行うため、詳細形状のモデリングが必要となる。しかし、船舶などの大規模な構造物の全体構造を詳細に表現したモデルを用いて解析を行うことは、解析時間やモデル生成コストなどの観点から好ましくない。そこで、全体構造は比較的粗いモデルで解析をして、応力集中部などの詳細な挙動を知りたい構造部は精密な要素細分化を行ったモデルを用いて解析を行うマルチスケール解析手法が 1 つのアプローチとして用いられている。この手法を用いることにより、精密な要素細分化を行うのがローカルモデルのみとなることや、全体モデルと局所モデルを別々に生成することで問題ごとに解析モデルを再生成する必要がないことから解析時間やモデル生成コストを削減できるなどの利点がある。[6]

IGA を用いたマルチスケール解析手法には、FEM の重合メッシュ法 (S-Version Finite Element Method, S-FEM) [7,8] の考え方を IGA に適用した重合パッチ法 (S-Version Isogeometric Analysis, S-IGA) [9,10,11] があり、これは全体モデルにあたるグローバルパッチと局所モデルであるローカルパッチを重ねて同時に解析を行う手法である。この手法は、グローバルパッチとローカルパッチが互いに独立に生成されるため、柔軟なモデリングが可能である。

線形破壊力学解析では、応力特異性の強さを表す応

力拡大係数（Stress Intensity Factor, SIF）が最も重要な破壊力学パラメータとして知られており、この値を用いてき裂先端近傍の評価を行うことができる [12,13]。線形弾性問題において、混合モードにおける各モードの応力拡大係数は Yan らが提案した相互積分法を用いることにより計算することができる [14]。

重合パッチ法および特異パッチ法を用いてローカルパッチにき裂を表現し、相互積分法により各モードの応力拡大係数を求めるこにより、き裂を含む混合モード下の線形破壊力学解析を効率的に行うことが可能である。

本報では、重合パッチ法を用いた線形破壊力学解析において、グローバルパッチとローカルパッチの寸法比や要素細分化の影響を検証し、高精度解析を行うためのガイドラインについて報告する。

## 2. アイソジオメトリック解析 (Isogeometric analysis, IGA) [1,2]

IGA は NURBS 基底関数が形状関数として用いられている。NURBS は B スプラインに重みを導入したものであり、B スプラインはパラメータ空間座標の並びを示す単調増加数列であるノットベクトルから構成される。

次数を  $p$ 、ノットベクトルを  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  ( $\xi_i \in \xi_{i+1}$ ) とすると、 $n$  個の B スプライン基底関数は以下のように定義される。 $p = 0$  において

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1)$$

$p \geq 1$  において

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

B スプライン曲線は B スプライン基底関数の線形結合により構築される。基底関数の係数としてコントロールポリント  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を与えると、B スプライン曲線  $C(\xi)$  は以下の式で定義される。

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (3)$$

また、NURBS 基底関数は、B スプライン基底関数に対して重み  $w_i$  を用いて以下の式により定義される。

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i \quad (4)$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (5)$$

NURBS 曲線は、B スプライン曲線と同様、NURBS 基底関数にコントロールポリント  $B_i$  を与えることにより、定義される。

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) B_i \quad (6)$$

なお、IGA ではノットが要素境界として用いられ、要素長さはノット区間の距離として定義される。

## 3. 重合パッチ法 (S-Version Isogeometric Analysis, S-IGA) [9]

S-IGA は、図 1 で示すようなグローバルパッチとローカルパッチを重ねて同時に解析を行う手法である。ここでは、線形弾性問題を仮定し S-IGA の定式化を行う。

グローバルパッチ領域  $\Omega^G$  およびローカルパッチ領域  $\Omega^L$  でそれぞれ独立な変位場が定義されており、領域  $\Omega^L$  の変位は以下のように定義される。

$$\mathbf{u}(x) = \begin{cases} \mathbf{u}^G(x) & \text{in } \Omega^G - \Omega^L \\ \mathbf{u}^G(x) + \mathbf{u}^L(x) & \text{in } \Omega^L \end{cases} \quad (7)$$

ただし、パッチ境界  $\Gamma^{GL}$  における変位の  $C^0$  連続性を保証するために、以下の条件を課す。

$$\mathbf{u}^L(x) = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (8)$$

領域  $\Gamma^G, \Gamma^L$  において、変位場とひずみ場は各領域における NURBS 基底関数マトリクス  $\mathbf{N}^G, \mathbf{N}^L$  とコントロールポリント変数ベクトル  $\mathbf{B}^G, \mathbf{B}^L$ 、変位・ひずみマトリクス  $\mathbf{d}^G, \mathbf{d}^L$  を用いて以下の式で定義される。

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{N}^G \mathbf{d}^G \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^L = \mathbf{N}^L \mathbf{d}^L \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^G = \mathbf{B}^G \mathbf{d}^G \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^L = \mathbf{B}^L \mathbf{d}^L \quad (12)$$

上記の各仮定を仮想仕事の原理に代入すると、以下のような離散化方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{GLT} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{K}^G, \mathbf{K}^L$  および  $\mathbf{K}^{GL}$  は変位-ひずみマトリクス  $\mathbf{B}$  と弾性マトリクス  $\mathbf{D}$  を用いて、以下の式により定義される。

$$\mathbf{K}^G = \int_{\Omega^G} \mathbf{B}^{G^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{K}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{K}^{GL} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{L^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \quad (16)$$

$\mathbf{K}^G, \mathbf{K}^L$  はそれぞれグローバル領域およびローカル領域で定義される剛性マトリクスであり,  $\mathbf{K}^{GL}$  は結合剛性マトリクスと呼ばれる両パッチの連成をなすマトリクスであり, ローカルパッチに対する体積積分により計算される。

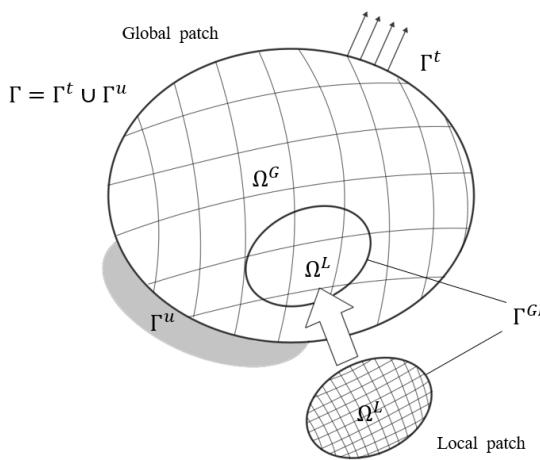


Fig. 1 Concept of S-IGA.

#### 4. 相互積分法 (Interaction Integral Method, IIM) [14]

相互積分法は, 線形弾性体に対してエネルギー解放率と J 積分が一致することを利用し, 混合モード破壊問題の応力拡大係数を計算する手法である。

図 2 のような弾性変形した物体の独立した 2 つの平衡状態を考え, この 2 つの弾性問題 (1),(2) の解をそれぞれ上付き文字 (1),(2) と記述し, さらに, それらの重ね合わせたの解を上付き文字 (0) とする. このとき, 2 つの場を重ね合わせた時の変位  $u_i$ , ひずみ  $\epsilon_{ij}$ , 応力  $\sigma_{ij}$  は以下のように表される.

$$\begin{aligned} u_i^{(0)} &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, & \epsilon_{ij}^{(0)} &= \epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}, \\ \sigma_{ij}^{(0)} &= \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \end{aligned} \quad (17)$$

よって, 重ね合わせ場でのひずみエネルギー密度  $W$  は以下になる.

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(0)} \epsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \\ &= W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(1,2)} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, 上添え文字 (1) は問題を重合パッチ法解析から得られた実場, 上添え文字 (2) は問題を Irwin のき裂近傍の厳密解の場として定義した補助場とする.

モード I の変形のみを受けるような補助場を上付き文字 2a, モード II の変形のみを受けるような補助場を上付き文字 2b で示す. 混合モードにおけるモード I またはモード II の応力拡大係数は, 図 3 に示すようなき裂先端を含む領域積分として以下の式により求められる.

$$K_1^{(1)} = -\frac{E'}{2} \iint_A \left( \delta_{1i} W^{(1,2a)} - \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2a)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2a)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dA \quad (19)$$

$$K_2^{(1)} = -\frac{E'}{2} \iint_A \left( \delta_{1i} W^{(1,2b)} - \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2b)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2b)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dA \quad (20)$$

ここで  $E'$  は材料定数であり平面応力状態, 平面ひずみ状態のそれぞれにおいて, 以下の値となる.

$$E' = \begin{cases} E & (\text{Plane stress}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{Plane strain}) \end{cases} \quad (21)$$

ここで,  $q$  は仮想き裂進展量を表すスカラ関数であり, 以下の式により定義される.

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma_\epsilon \\ 0 & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (22)$$

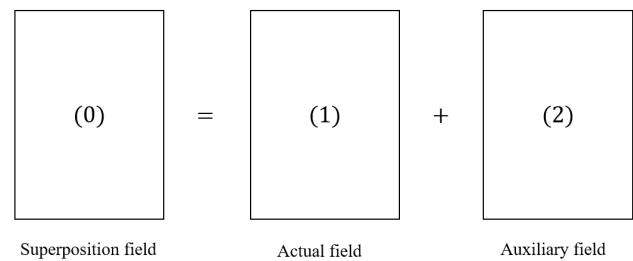


Fig. 2 Superposition field.

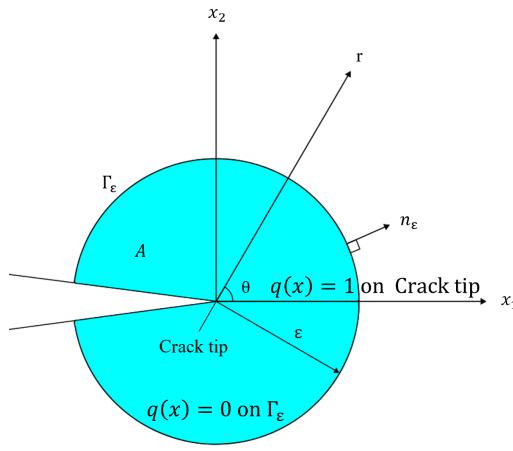


Fig. 3 domain of integration.

## 5. 数値解析

### (1) 一様引張応力を受ける中央に傾いたき裂を有する平板の S-IGA 解析

S-IGA を用いた線形き裂問題解析において、グローバルパッチと特異パッチによりき裂を表現したローカルパッチの関係性を検証するための解析を行った。高精度解析を保証するためのローカルパッチ領域がき裂先端からどの程度の長さを確保する必要があるのかを示すために、図 4 で示すようなローカル代表寸法  $r$  とグローバルパッチの要素長さ  $L_g$  をパラメータとした解析を行った。

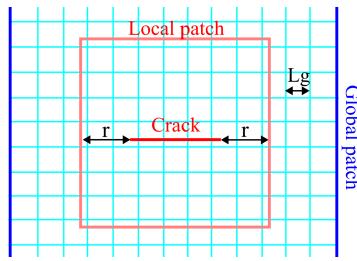


Fig. 4 Local representative size and global element size in crack model.

解析対象は、図 5 に示したような中央に  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$  傾いた 20mm のき裂を有する縦 200mm、一様分布荷重 (1MPa) を受ける、長さ 200mm、幅 100mm の帯板である。一様引張解析を行い相互積分法により得られた応力拡大係数を参考解 [13] と比較する。境界条件は、図 6 に示し、グローバルパッチは  $(x, y) = (-50, 0)$  で変位  $u_y = 0$ 、 $(x, y) = (0, 0)$  で変位  $u_x = u_y = 0$  とし、ローカルパッチの外側境界の変位は零としている。なお、ローカル・グローバルパッチともに基底関数は 3 次としている。平面ひずみ状態、数値積分には  $4 \times 4$  のガウス・ルジャンドル積分法を用いた。連立一次方程式の求解には共役勾配法 (Conjugate Gradient Method, CG 法) を用い、収束判定の相対誤差は  $10^{-5}$  とした。材料のヤング率、ポアソン比は 206GPa と 0.3 とした。

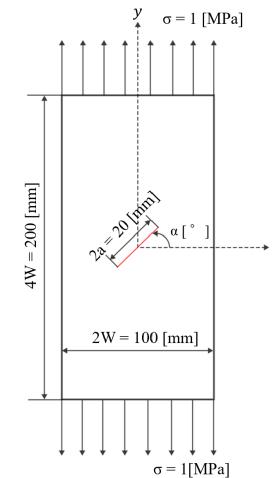


Fig. 5 Center slant cracked plate received uniform tension.

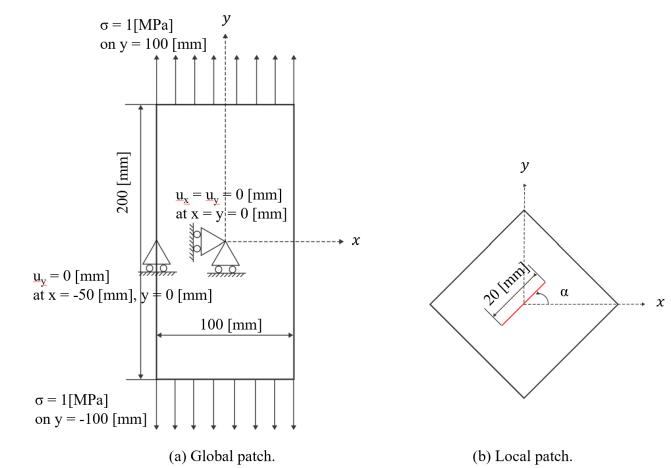


Fig. 6 Global patch and Local patch of center slant cracked plate [(a) Global patch (b) Local patch].

本解析で用いた、グローバルおよびローカルパッチを図 7 に示す。図においてパッチ境界を実線で要素境界を破線で表示している。ローカルパッチはき裂先端での応力特異性を示すために特異パッチを使用している。グローバルパッチは要素寸法  $L_g$  が 10mm, 5mm, 2.5mm のものをそれぞれ使用し、ローカルパッチは正方形として要素寸法を 1mm が代表寸法  $r$  が 2mm, 4mm, 6mm, ..., 20mm のものをそれぞれ用いて解析を行い、 $r/L_g$  と誤差率の関係を調べた。なお、誤差率の計算には以下の式を用いた。

$$\text{Error} = \left| \frac{\text{Numerical solution} - \text{Reference solution}}{\text{Reference solution}} \right| \times 100 \quad (23)$$

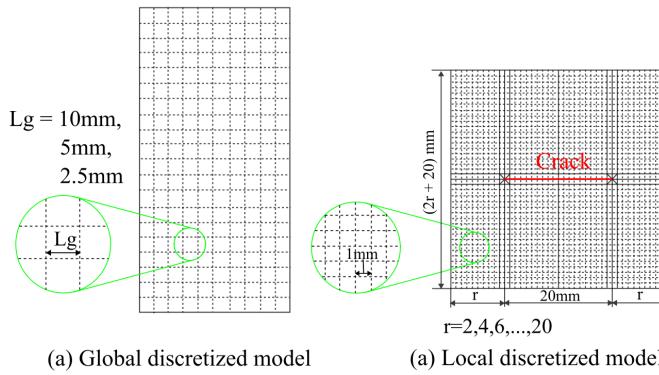


Fig. 7 Global and Local discretized model [(a) Global model (b) Local model].

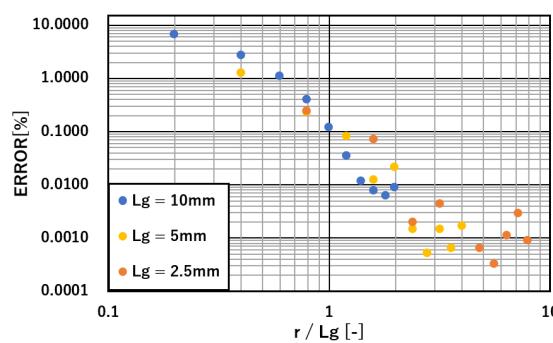


Fig. 8 Transition of mode I ERROR (tilt angle is 30° ).

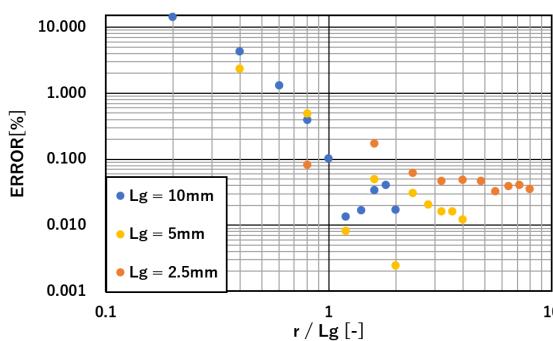


Fig. 9 Transition of mode II ERROR (tilt angle is 30° ).

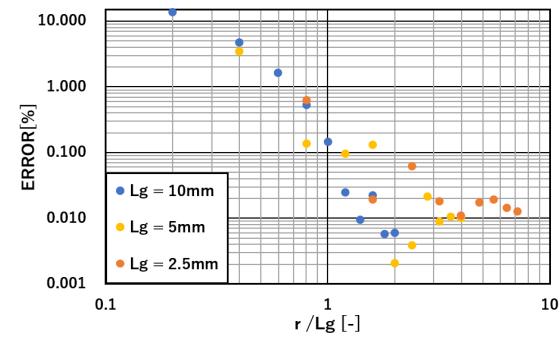


Fig. 10 Transition of mode I ERROR (tilt angle is 45° ).

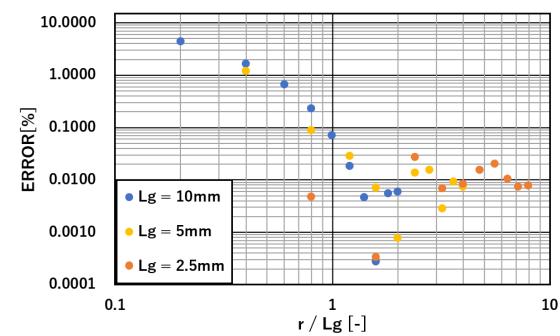


Fig. 11 Transition of mode II ERROR (tilt angle is 45° ).

図 8 から 11 に示す結果により,  $r/Lg$  が小さいと大きな誤差が発生し,  $r/Lg \geq 1$  とした場合は精度がおおよそ同等になることが確認された。

## 6. 結言

本研究では, 重合パッチ法を用いたき裂を含む線形破壊力学問題の高精度化に対する検証を行った。精度を保証するためには, ローカルパッチにおけるき裂先端からの領域を十分に確保する必要がある。 $r/Lg$  を 1 以上にすることが推奨される。

## 参考文献

- [1] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 194, No. 39-41, pp. 4135-4195, 2005.
- [2] Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, pp.1-75, 2009.
- [3] Barsoum, R.S.: On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol.10, pp.25-37, 1976.

- [4] Okada, H., Nakahara, D., Nagashima, A., Watanabe, R., Sunaoka, Y., Yusa, Y., and Otoguro, Y.: Singular patch method for linear elastic fracture mechanics analysis using isogeometric analysis, Mechanical Engineering Journal, Vol.9, No.6, p.22-00291, 2022.
- [5] Omar, T, Okada, h, Nakahara, D.: An IGA based domain integral method for the evaluation of the J-integral using the singular patch method, Mechanical Engineering Journal, vol.9, No.6, p.22-00308, 2022.
- [6] 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣.: 重合メッシュ法による穴あき板の解析に関する一考察, 日本計算工学会論文集, 2001.
- [7] Fish, J.: The s-version of the finite element method, Computers & Structures, Vol. 43, No. 3, pp. 539-547, 1992.
- [8] Fish, J. and Markolefas, S.: Adaptive s-method for linear elastostatics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 104, No. 3, pp. 363-396, 1993.
- [9] 渡邊梨乃.: 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis Method, S-IGA) の提案, 東京理科大学大学院理工学研究科機械工学専攻 2020 年度修士論文, 2021.
- [10] 砂岡優輔, 土山雄飛, 岡田裕, 乙黒雄斗, 町野友哉, 中原大智: 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis, S-IGA) を用いた混合モード応力拡大係数の計算, 計算力学講演会講演論文集, 35 卷, 2022.
- [11] 土山雄飛, 砂岡優輔, 岡田裕, 乙黒雄斗, 町野友哉, 中原大智: 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis, S-IGA) の基底関数の次数最適化に関する研究, 計算力学講演会講演論文集, 35 卷, 2022.
- [12] Irwin, G.R.: Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, Journal of Applied Mechanics, Vol.24, pp.361-364, 1957.
- [13] T.L.Anderson.: 破壊力学 基礎と応用 第3版, (金田思裕, 吉成仁志訳), 森北出版, 2011.
- [14] Yau, J.F., Wang, S.S., Corten, H.T.: A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity, Journal of Applied Mechanics, Vol.47, pp.335-341, 1980.
- [15] Kitagawa, H., and Yuuki, R.: Analysis of Arbitrarily Shaped Crack in a Finite Plate Using Conformal Mapping, 1st Report - Construction of Analysis Procedure and its Applicability, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.43, pp.4354-4362, 1977.