

MPS 法による浅水波方程式の数値計算に適した動的な粒子分裂手法の開発

Development of a Dynamic Particle Splitting Method
Suitable for MPS-Based Calculation of Shallow Water Equations

西郷 伊織¹⁾ 越塚 誠一¹⁾
Iori Saigo and Seiichi Koshizuka

¹⁾東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻 (〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1)

The shallow water equations (SWEs), derived from the depth integration of the Navier-Stokes equations, can be applied to tsunami-like phenomena where the vertical scale is sufficiently small compared to the horizontal scale. Since we can reduce the number of dimensions, the SWEs are more computationally efficient than the Navier-Stokes equations. While solving the SWEs with particle methods provides benefits, such as eliminating the need to generate a grid, it also has several problems. One of these problems is that particle distances increase, i.e., spatial resolution reduces, in regions of low water level. To address this issue, we developed a dynamic particle splitting method suitable for solving the SWEs, aiming to maintain appropriate particle distances and spatial resolution even when the water level is low. A dam-break problem was used as a benchmark test, and good agreement with the analytical solution was obtained.

Key Words : Particle Method, MPS, Shallow Water Equations, Particle Splitting

1. 緒言

津波などの水平スケールが水深スケールよりも十分に大きい現象に着目する場合、水深方向の物理量分布は重要ではない。この考えに基づき 3 次元非圧縮性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式を水深方向に積分して導出されるのが浅水波方程式である。Navier-Stokes 方程式の代わりに浅水波方程式を解くことで計算空間の次元数が減り、計算時間が短縮される。

浅水波方程式を粒子法で解こうとする試みは Wang and Shen [1] に端を発する。その後、様々な工夫により計算精度を高める研究が行われてきた [2-8]。その他の研究の方向性としては CG への応用 [9, 10]、流入境界 [11-13]、1 次元非矩形流路 [14]、Boussinesq 方程式への適用 [15]、Well-balanced スキーム [16-19]、沈殿物や溶質の移流計算 [6, 20]、分岐流路 [21]、地形データを用いたダム崩壊計算 [22]、1 次元-2 次元連成計算 [8] などがある。上記の研究は全て SPH 法に基づくが、近年では MPS 法による解法も提案されている [23, 24]。

浅水波方程式を粒子法で解くことで、計算格子を生成する必要がないといった粒子法の恩恵が得られる一方、いくつかの問題も生じる。そのうちの一つは、水位が低い領域で粒子間距離が大きくなる、すなわち空間解像度が低下するという問題である。de Lefle *et al.* は粒子再配置によりこの問題の解決を図った [4]。その後 Vacondio *et al.* が静的な粒子分裂手法を提案し、複数の研究でこの手法が用いられている [13, 25, 26]。しかし、周辺の粒子配置を参照した動的な粒子分裂手法を浅水波方程式の解法に適用した研究はこれまでにない。そこで、本研究では浅水波方程式の計算に適した動的な粒子分裂手法の開発を目的とする。

2. 計算手法

(1) 支配方程式

2 次元浅水波方程式は 3 次元非圧縮性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式を水深方向に積分することで導出される。この際、速度は鉛直方向に平均化され、圧力は静水圧分布が仮定される。2 次元浅水波方程式は Lagrange 形式で次のように表される [27]。

$$\text{連続の式: } \frac{Dh}{Dt} = -h(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\text{運動量保存則: } \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\nabla z_s - g\mathbf{S}_f \quad (2)$$

ここで、 h は水深、 \mathbf{u} は鉛直方向に平均化した速度ベクトル、 g は重力加速度、 z_s は水面 (surface) の z 座標である。水底面 (bottom/bed) の z 座標を z_b とすると、 $z_s = h + z_b$ の関係がある (図-1)。更に、 \mathbf{S}_f は水底から受ける摩擦力ベクトルであり、次式で表される。

$$\mathbf{S}_f = \frac{n_M |\mathbf{u}| \mathbf{u}}{R^{\frac{4}{3}}} \quad (3)$$

ここで、 n_M は Manning の粗度係数、 R は水力半径である。

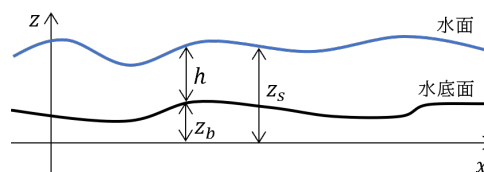


図-1 各変数の定義

2次元浅水波方程式を解く場合、非圧縮性流体を対象とした場合であっても水平面上の圧縮性を考慮する点に注意が必要である。これは次のように確認できる。3次元流れ中に直方体領域を設定し、その領域の底面積を A 、領域中流体の水深を h 、体積を V 、質量を m とする。水平面上の密度を ρ_{2D} 、流体の密度を ρ_{3D} ($= \text{const.}$) とすると、

$$\rho_{3D} = \frac{m}{V} = \frac{m}{Ah} = \frac{\rho_{2D}}{h} = \text{const.} \quad (4)$$

すなわち、水深の変動に応じて水平面上の密度が変化することとなり、流体は2次元上では圧縮性流体のように振る舞う。逆に言えば、浅水波方程式は非圧縮性流体を水平面上で圧縮性流体と扱い、密度変化から水深を算出することで次元数を減らした計算を可能とするのである。

(2) MPS 法による定式化

浅水波方程式は3次元空間を2次元に圧縮して計算を行う。従って、各粒子は x - y 平面にのみ存在するが、その上部にある流体の底面積 A 、水深 h 、体積 V ($= Ah$) を他の物理量と同様に保有する (図-2)。

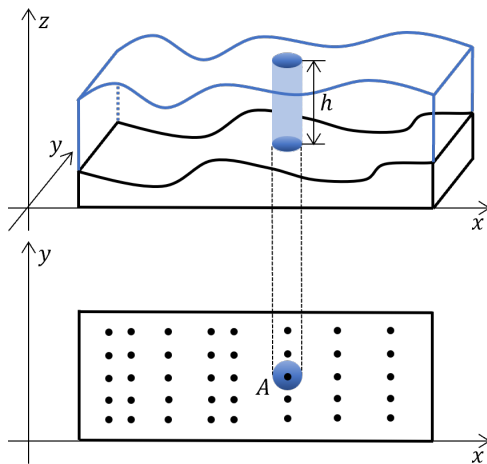


図-2 粒子による流体表現

浅水波方程式で取り扱う粒子には次の特徴がある。

1. 水平方向にのみ運動する。
2. 2次元水平面での圧縮性を有する。すなわち、粒子数密度は一定とならない。
3. 面積が一定とならない。これは各粒子の体積は保存するが水深は変化することによる。

これらの特徴に基づき、MPS法の定式化を次のように改める。

$$\text{粒子数密度: } n_i = \sum_{j \neq i} \frac{A_j}{A_i} w_{ij} \quad (5)$$

$$1 \text{ 階微分モデル: } \langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{D}{n_i} \sum_{j \neq i} \frac{\phi_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2} \mathbf{x}_{ij} \frac{A_j}{A_i} w_{ij} \quad (6)$$

ここで、 w_{ij} は重み関数、 D は解析空間の次元数、 \mathbf{x} は粒子の位置ベクトル、 ϕ は粒子が保持する任意のスカラー物理量である。本論文を通して添え字 ij は j 粒子

と i 粒子のスカラー量またはベクトル量の差を表す。例として、 $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ である。ただし、重み関数の表記 w_{ij} についてはこの限りではない。

この定式化の基本的な MPS 法との違いは、重み関数に粒子の面積比を掛けている点である。これは、粒子の面積が大きいほど他の粒子に与える影響が大きいことを考慮している。更に、粒子数密度は一定でないため粒子ごとに計算することとした。

各粒子の水深は SPH 法の 2 次元積分補間式から次式のように計算する。

$$h_i = \sum_j h_j w_{ij} A_j = \sum_j V_j w_{ij} \quad (7)$$

このため、重み関数 (kernel 関数) は SPH 法に適した形でなければならない。Sarkhosh and Jin が複数の kernel 関数の計算精度を比較した研究 [23] に基づき、本研究では次式の Spiky kernel 関数を重み関数として用いる。

$$w_{ij} = \frac{5}{16\pi r_e^2} \begin{cases} \left(2 - \frac{|\mathbf{x}_{ij}|}{r_e}\right)^3 & \left(0 \leq \frac{|\mathbf{x}_{ij}|}{r_e} \leq 2\right) \\ 0 & \left(2 < \frac{|\mathbf{x}_{ij}|}{r_e}\right) \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 r_e は影響半径である。浅水波方程式を解く際には各粒子の粒子径は異なるため、基本的な MPS 法と同様に影響半径を粒子径の定数倍に設定すると各粒子の影響半径が異なることになる。しかし、力の対称性に基づけばある粒子 i が粒子 j を参照する際の影響半径と粒子 j が粒子 i を参照する際の影響半径は等しいことが望ましい [28, 29]。そこで、Khayyer *et al.* [29] と同様に、ある時刻 k で全粒子の面積のうち最も大きい値を A_{\max}^k とし、その時刻での全粒子共通の影響半径 r_e^k を次式で定める。

$$r_e^k = \alpha_e \sqrt{A_{\max}^k} \quad (9)$$

Sarkhosh and Jin が複数の粒子径の計算精度を比較した研究 [23] に基づき、本研究では $\alpha_e = 1.3$ とした。

(3) 粒子分裂手法

浅水波方程式を粒子法で解く際に課題となるのが、水深が小さい領域で空間解像度が低下する問題である。式 (4) で示したように、水深の減少は水平面上の密度の低下を意味する。これは粒子同士が離れるということであり、空間解像度の低下につながる。津波の遡上問題などの水深が低下した領域でこそ詳細な結果を得たいような解析において、これは特に問題となる。この課題の克服に有効なのが本研究で提案する粒子分裂である。

本研究では 1 つの粒子が 2 つに分裂する手法を採用する (図 3)。 i 粒子が分裂した後の 2 つの粒子の位置ベクトル $\mathbf{x}_i^{\text{new}}$ を次式で与える。

$$\mathbf{x}_i^{\text{new}} = \mathbf{x}_i \pm \frac{\alpha_s l_i}{2} \mathbf{t}_i \quad (10)$$

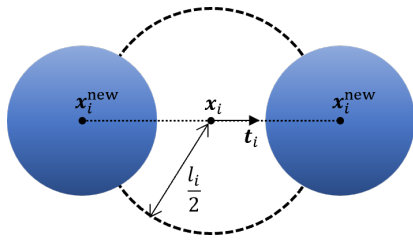
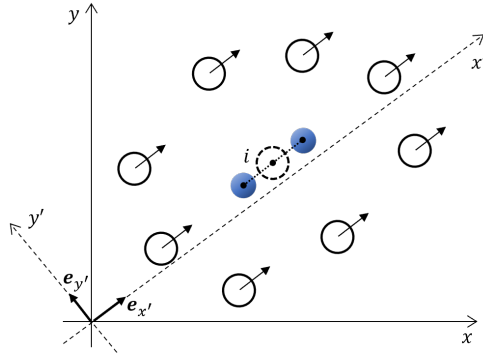


図-3 粒子分裂の様子

図-4 $\sum_j x_{ij}y_{ij} \neq 0$ の場合の分裂方向

ここで、 α_s は分裂後の2粒子間距離を定める係数であり、本研究では $\alpha_s = 0.7$ とした。また、 l_i は $\sqrt{A_i}$ で与えられる粒子径、 t_i は分裂方向を定める単位ベクトルである。本研究では初期粒子面積 A_0 に対し $A_i > 1.5A_0$ を分裂の条件とした。

分裂する粒子の周辺粒子配置に基づいて分裂方向ベクトル t_i を動的に決定する手法について述べる。まず図-4のように粒子の偏りを補正するための基底変換を施す。この時、変換後の基底ベクトル $e_{x'}$ 、 $e_{y'}$ は、 $\sum_{j \neq i} x'_{ij}y'_{ij}w_{ij} = 0$ が満たされるように定める。その後、次式で分裂方向ベクトルを決定する。

$$t_i = \begin{cases} e_{x'} & \left(\sum_{j \neq i} x'^2_{ij}w_{ij} > \sum_{j \neq i} y'^2_{ij}w_{ij} \right) \\ e_{y'} & \left(\sum_{j \neq i} x'^2_{ij}w_{ij} < \sum_{j \neq i} y'^2_{ij}w_{ij} \right) \end{cases} \quad (11)$$

すなわち、分裂粒子周辺の粒子が x' 軸方向に広がっている場合には x' 軸方向に分裂し、 y' 軸方向に広がっている場合には y' 軸方向に分裂する。分裂方向ベクトルの計算アルゴリズムの詳細については付録を参照のこと。

分裂後の速度 u 及び水深 h は次の補間式に基づき決定する。

$$\begin{aligned} u_i^{\text{new}} &= u_i + \left[(x_i^{\text{new}} - x_i) \cdot \nabla \right] u_i \\ h_i^{\text{new}} &= h_i + (x_i^{\text{new}} - x_i) \cdot \langle \nabla h \rangle_i \end{aligned} \quad (12)$$

また、分裂後の2粒子の体積は x 方向と y 方向の運動量保存則の連立により求める。

(4) 計算アルゴリズム

Sarkhosh and Jin [23] に基づいて計算アルゴリズムを図-5のように定める。詳細な説明は [23] に譲る。

時間刻みは次式の CFL 条件を満たすよう定める。

$$\Delta t = CFL \times \left(\frac{l_i}{c_i + |u_i|} \right)_{\min} \quad (13)$$

ここで、 c は浅水波の伝播速度であり、 $c = \sqrt{gh}$ で表される。本研究では $CFL = 0.5$ とした。

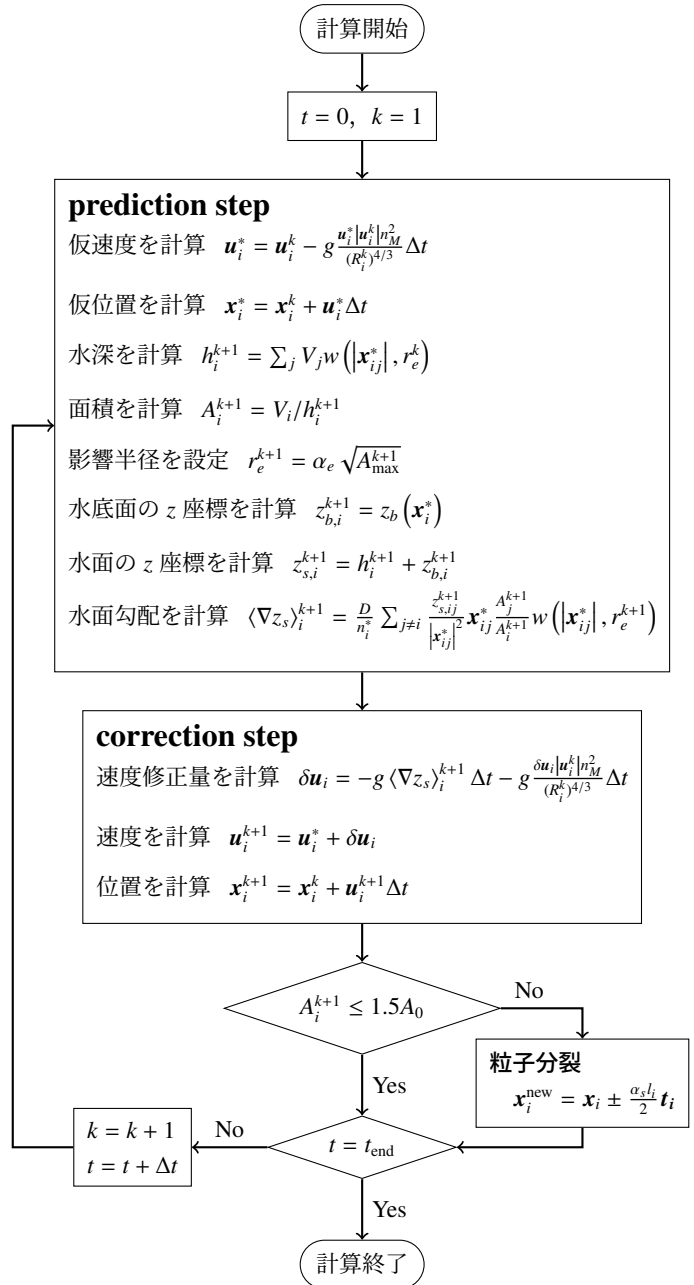


図-5 計算アルゴリズム

(5) 壁面境界条件

壁面境界条件はゴースト粒子を配置することで表現する。各ゴースト粒子は壁面付近の流体粒子と1対1に対応しており、壁面に関して対称に配置される。ゴースト

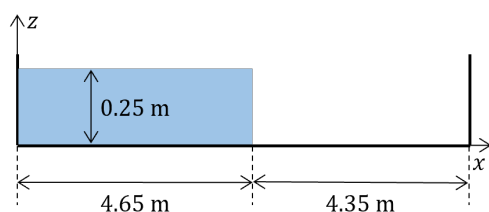


図-6 水柱崩壊問題の初期状態

スト粒子の壁面接線方向速度はスリップ条件下では対応する流体粒子の速度と一致させ、ノンスリップ条件下では反対方向にする。壁面法線方向速度は壁面条件に関わらず逆向きにする。速度以外の物理量は対応する流体粒子と同一の値にする。

3. 計算例

(1) 水柱崩壊問題

摩擦の無い水平な平面に水柱が崩壊する問題の計算例を示す。水柱は初期状態で x , y , z 方向長さがそれぞれ 4.65m, 1.0m, 0.25m の直方体であり, x + 方向に崩壊する (図-6)。本問題の解析解は次式で与えられる [30]。

$$h = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_0} - \frac{x - x_{\text{dam}}}{t} \right)^2 \quad (14)$$

ここで, x_{dam} はダムの x 座標であり, 今回の設定では $x_{\text{dam}} = 4.65\text{m}$ である。

$t = 0.5\text{s}$ における水深の計算結果と解析解との比較を図-7 に示す。粒子分裂の有無によらず初期粒子間距離は 10cm とした。粒子分裂無しの計算結果では波の先端部分の水深と解析解との間に 71 % の誤差が生じた。一方, 粒子分裂の導入によりこの誤差は僅か 2.5 % に減少した。

続いて同時刻における $x-y$ 平面上の粒子分布を図-8 に示す。粒子分裂無しの結果では波の先端で粒子同士が x 方向に離れているが, 粒子分裂有りの結果では x 方向の粒子間隔を一定程度に維持できている。粒子分裂の導入により空間解像度の低下を防ぐ効果を確認できた。

更に, 粒子分裂無しの結果において波の先端部分の位置は $x = 5.1\text{m}$ なのに対し, 粒子分裂有りの結果では $x = 5.5\text{m}$ になっている。このことから, 洪水や津波の計算において重要な指標である波の進行が, 粒子分裂の導入によってより正確に予測できることが分かる。

(2) 水柱崩壊波遡上問題

続いて水柱崩壊後に波が斜面を遡上する問題の計算例を示す。計算の初期状態は図-9 に示す通りである。水柱は初期状態で x , y , z 方向の長さがそれぞれ 2.25m, 1.0m, 0.25m の直方体であり, x + 方向に崩壊する。斜面は水柱から x 方向に 1.15m 離れた位置から始まり, その勾配は 10 % である。また, 本計算では摩擦を考慮し, Manning の粗度係数は $n_M = 0.001$ とした。

$t = 1.6\text{s}$ の計算結果を図-10 に示す。全領域で適切な粒子間距離を維持しながら計算できていることが見て取れる。本計算例において $t = 1.6\text{s}$ の波の先端の粒子

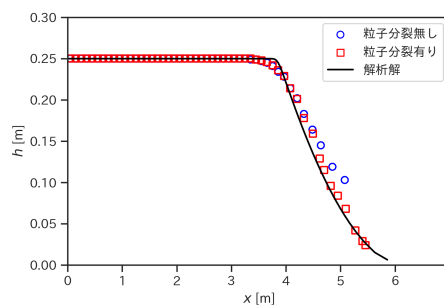
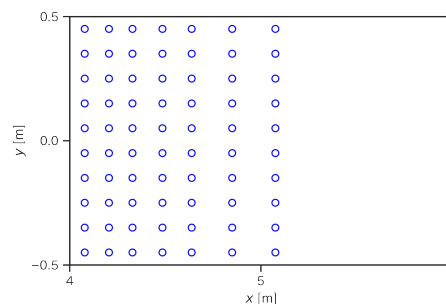
図-7 解析解との比較 ($t = 0.5\text{s}$)

図-8-a 粒子分裂無し

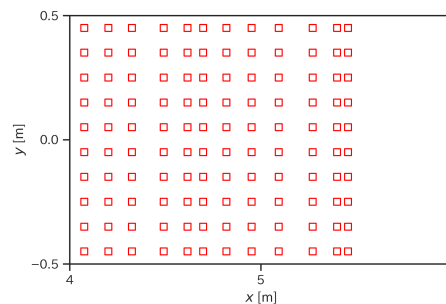


図-8-b 粒子分裂有り

図-8 $x-y$ 平面上の粒子分布 ($t = 0.5\text{s}$)

の水深は 2.8mm であり, 初期水位の 1.1 % 程度でしかない。従って粒子分裂が無ければ空間解像度が著しく悪化することが予想されるが, 本計算例では粒子分裂の効果で適切な空間解像度を維持できている。

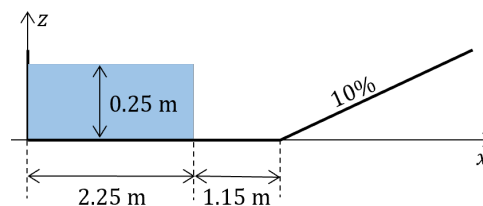
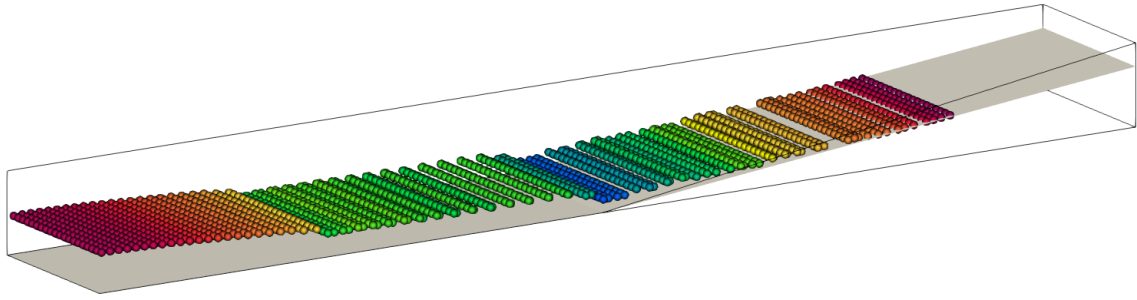


図-9 水柱崩壊波遡上問題の初期状態

図-10 水柱崩壊波遡上問題の計算結果 ($t = 1.6s$)

4. 結言

浅水波方程式の数値計算に適した MPS 法の定式化及び動的な粒子分裂手法を提案した。MPS 法の定式化においては浅水波方程式の特徴である圧縮性と粒子径の非均一性を考慮した。粒子分裂においては分裂方向を周辺の粒子配置から決定することで状況に応じた適切な分裂を可能とした。2つの水柱崩壊問題計算例を示し、粒子分裂の導入により水深の小さい領域でも空間解像度を維持できることを確認した。今後はより複雑な形状を有する問題への本手法の適用を検討する。

付録 A: 分裂方向ベクトルの計算法 分裂方向ベクトル \mathbf{t} の計算には CMPS 法 [31] や LSMPS 法 [32] の修正行列 (モーメント行列) を用いる。簡単のため分裂する粒子 i が座標系の原点に位置するとすれば、修正行列 C_i は次式で表される。

$$C_i = \begin{pmatrix} \sum_{j \neq i} x_j^2 w_{ij} & \sum_{j \neq i} x_j y_j w_{ij} \\ \sum_{j \neq i} x_j y_j w_{ij} & \sum_{j \neq i} y_j^2 w_{ij} \end{pmatrix} \quad (A-1)$$

粒子配置の偏りを取り除くための基底変換後には、修正行列は次のようになる。

$$C'_i = \begin{pmatrix} \sum_{j \neq i} x_j'^2 w_{ij} & 0 \\ 0 & \sum_{j \neq i} y_j'^2 w_{ij} \end{pmatrix} \quad (A-2)$$

一方、基底ベクトルの変換を $(\mathbf{e}'_x \ \mathbf{e}'_y) = P (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y)$ と表現すると、新しい基底の元での修正行列は

$$C'_i = P^{-1} C_i P \quad (A-3)$$

となる。式 (A-2), (A-3) より、一連の手順は修正行列の対角化に他ならない。ここで、基底変換前の修正行列 C_i の固有値を λ_0, λ_1 と置くと、式 (A-2) より、

$$\begin{cases} \lambda_0 = \sum_{j \neq i} x_j'^2 w_{ij} \\ \lambda_1 = \sum_{j \neq i} y_j'^2 w_{ij} \end{cases} \quad (A-4)$$

である。更に、 λ_0, λ_1 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ と置くと、 $(\mathbf{e}'_x \ \mathbf{e}'_y) = P (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y)$ より、新しい基底ベクトルは

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_x = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{e}'_y = \mathbf{x}_1 \end{cases} \quad (A-5)$$

となる。

以上と式 (11) を比較すれば、分裂方向ベクトル \mathbf{t}_i は次式で求められる。

$$\mathbf{t}_i = \begin{cases} \mathbf{x}_0 & (\lambda_0 > \lambda_1) \\ \mathbf{x}_1 & (\lambda_0 < \lambda_1) \end{cases} \quad (A-6)$$

参考文献

- [1] Z. Wang and H. T. Shen. Lagrangian simulation of one-dimensional dam-break flow. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 125, pp. 1217–1220, 1999.
- [2] R. Ata and A. Soulaïmani. A stabilized SPH method for inviscid shallow water flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 47, pp. 139–159, 2005.
- [3] M. Rodriguez-Paz and J. Bonet. A corrected smooth particle hydrodynamics formulation of the shallow-water equations. *Comput. Struct.*, Vol. 83, pp. 1396–1410, 2005.
- [4] M. de Leffe, et al. SPH modeling of shallow-water coastal flows. *J. Hydraul. Res.*, Vol. 48, pp. 118–125, 2010.
- [5] R. Vacondio, et al. Smoothed particle hydrodynamics: Approximate zero-consistent 2-D boundary conditions and still shallow-water tests. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 69, pp. 226–253, 2012.
- [6] R. Chen, et al. Applications of shallow water SPH model in mountainous rivers. *J. Appl. Fluid Mech.*, Vol. 8, pp. 863–870, 2015.
- [7] K. H. Chang, et al. Development of an upwinding kernel in SPH-SWEs model for 1D trans-critical open channel flows. *J. Hydro-environ. Res.*, Vol. 15, pp. 13–26, 2017.
- [8] K. H. Chang, et al. A 1D–2D coupled SPH-SWE model applied to open channel flow simulations in complicated geometries. *Adv. Water Resour.*, Vol. 115, pp. 185–197, 2018.
- [9] H. Lee and S. Han. Solving the shallow water equations using 2D SPH particles for interactive applications. *Vis Comput.*, Vol. 26, pp. 865–872, 2010.
- [10] B. Solenthaler, et al. SPH based shallow water simulation. *Workshop on VRIPHYS*, pp. 39–46, 2011.
- [11] T. J. Chang, et al. Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using

- smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydrol.*, Vol. 408, pp. 78–90, 2011.
- [12] H. M.Kao and T. J. Chang. Numerical modeling of dambreak-induced flood and inundation using smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydrol.*, Vol. 448–449, pp. 232–244, 2012.
- [13] R. Vacondio, et al. SPH modeling of shallow flow with open boundaries for practical flood simulation. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 138, pp. 530–541, 2012.
- [14] T. J. Chang and K. H. Chang. SPH modeling of one-dimensional nonrectangular and nonprismatic channel flows with open boundaries. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 139, pp. 1142–1149, 2013.
- [15] T. J. Chang, et al. A new approach to model weakly nonhydrostatic shallow water flows in open channels with smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydrol.*, Vol. 519, pp. 1010–1019, 2014.
- [16] R. Vacondio, et al. A correction for balancing discontinuous bed slopes in two-dimensional smoothed particle hydrodynamics shallow water modeling. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 71, pp. 850–872, 2013.
- [17] X. Xia, et al. Balancing the source terms in a SPH model for solving the shallow water equations. *Adv. Water Resour.*, Vol. 59, pp. 25–38, 2013.
- [18] G. Rossi, et al. A well-balanced path conservative SPH scheme for nonconservative hyperbolic systems with applications to shallow water and multi-phase flows. *Comput. Fluids*, Vol. 154, pp. 102–122, 2017.
- [19] K. H. Chang, et al. A well-balanced and positivity-preserving SPH method for shallow water flows in open channels. *J. Hydraul. Res.*, Vol. 59, pp. 903–916, 2021.
- [20] Y. S. Chang and T. J. Chang. SPH simulations of solute transport in flows with steep velocity and concentration gradients. *Water*, Vol. 9, , 2017.
- [21] K. H. Chang, et al. A novel SPH-SWEs approach for modeling subcritical and supercritical flows at open channel junctions. *J. Hydro-environ. Res.*, Vol. 13, pp. 76–88, 2016.
- [22] S. Gu, et al. SWE-SPHysics simulation of dam break flows at south-gate Gorges reservoir. *Water*, Vol. 9, , 2017.
- [23] P. Sarkhosh and Y. C. Jin. MPS-based model to solve one-dimensional shallow water equations. *Water Resour. Res.*, Vol. 57, , 2021.
- [24] P. Sarkhosh and Y. C. Jin. MPS modeling of cross-sectional averaged shallow water flows with open boundaries using TVD-MacCormack predictor-corrector. *J. Hydrol.*, Vol. 608, , 2022.
- [25] R. Vacondio, et al. Accurate particle splitting for smoothed particle hydrodynamics in shallow water with shock capturing. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 69, pp. 1377–1410, 2012.
- [26] R. Vacondio, et al. Shallow water SPH for flooding with dynamic particle coalescing and splitting. *Adv. Water Resour.*, Vol. 58, pp. 10–23, 2013.
- [27] 後藤仁志. 流れの方程式. 森北出版, 2022.
- [28] M. Tanaka, et al. Multi-resolution MPS method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 359, pp. 106–136, 2018.
- [29] A. Khayyer, et al. Multi-resolution MPS for incompressible fluid-elastic structure interactions in ocean engineering. *Appl. Ocean Res.*, Vol. 82, pp. 397–414, 2019.
- [30] O. Castro-Orgaz and H. Chanson. Ritter ' s dry-bed dam-break flows: positive and negative wave dynamics. *Environ. Fluid Mech.*, Vol. 17, pp. 665–694, 2017.
- [31] A. Khayyer and H. Gotoh. Development of CMPS method for accurate water-surface tracking in breaking waves. *Coastal Eng. J.*, Vol. 50, pp. 179–207, 2008.
- [32] T. Tamai and S. Koshizuka. Least squares moving particle semi-implicit method: An arbitrary high order accurate meshfree Lagrangian approach for incompressible flow with free surfaces. *Comput. Part. Mech.*, Vol. 1, pp. 277–305, 9 2014.