

# 空間2次精度を有するSPHの開発と流体解析への適用 ～自由表面流れへの適用～

Development of SPH with Spatial 2nd-order Accuracy and Its Application to Fluid Analysis  
～Application to Free Surface Flow～

白神嘉也<sup>1)</sup>, 藤岡秀二郎<sup>2)</sup>, 浅井光輝<sup>3)</sup>

Yoshiya Shirakami, Shujiro Fujioka and Mitsuteru Asai

1) 九州大学大学院 工学府土木工学専攻 (〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: y-shirakami@doc.kyushu-u.ac.jp)

2) 九州大学大学院 工学府土木工学専攻 (〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: s-fujioka@doc.kyushu-u.ac.jp)

3) 九州大学 工学研究院社会基盤部門 (〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) is a Lagrangian particle method that is well suited for splitting and coalescing of fluids, but it still has fatal errors that degrade due to particle turbulence during simulation. Therefore, a higher order spatial derivative formulation of SPH that satisfies the second -order accuracy of the Taylor expansion has been developed by our research group. Free-surface flows, in which the particle array is easily disrupted by violent water surface changes and particles within the radius of influence are inevitably lost near the water surface, were expected to be an example of application of a highly accurate model, but numerical instability remains a problem. In this study, we reviewed the entire calculation scheme of the particle method except for the derivative operator and proposed an improved treatment that includes free surface determination. Then, the proposed method is demonstrated through rotating square and dam failure analyses to show the accuracy and robustness. Finally, the solitary wave analysis shows the usefulness of the model in conserving energy, even with high accuracy.

**Key Words :** SPH, High-precision SPH, Free Surface Judge, Solitary Wave

## 1. 緒言

Lagrange記述に基づく粒子法の一つであるSPH法は、計算過程において連続体の変形に併せて粒子を動かし、粒子分布が非均一となるため計算精度が低下しやすい。そこで、著者らのグループでは粒子分布の乱れが生じてもTaylor展開の2次の項までを満たす高精度な2階微分モデル<sup>1)</sup> (以下、SPH(2)と略記)を提案してきた。特に、自由表面流れ問題では、激しい形状変化により粒子配置が乱れやすく、また表面付近においては影響半径内の粒子が必然的に欠損するため、SPH(2)のよい適用例として期待していたが、SPH(2)のみでは自由表面付近で計算が不安定になるという問題が残されていた。そこで本研究では、SPH(2)による自由表面流れ解析の計算安定化を目的とし、自由表面判定を含む微分演算子以外の計算スキーム等を全体的に見直したI-SPH(2)を提案する。さらに、提案したI-SPH(2)について正方流体回転解析によって検証し、水柱崩壊解析によって妥当性確認を行った。最後に孤立波解析によって従来モデルに対するI-SPH(2)の優位性を示した。

## 2. SPH(2) (高精度微分モデル)

SPH(2)は、これまでにSPH法の枠組みで提案されてきた高精度微分モデルを修正改良した勾配モデルと、空間の2階微分項に対する高精度モデルから構成される。両者ともに、理論的には空間2次精度を満たすモデルである。た

だし、現実的には粒子配置の乱れにより、収束性を悪化させる傾向が避けられず、運用上は粒子再配置法<sup>2)</sup>と併用化することが望ましい。以下にSPH(2)の内容である、2次精度の勾配モデルおよび、空間2階微分モデルを整理して示す。

### (1) 勾配補正モデルとSPH(2)の勾配モデルの比較

勾配補正モデルは、SPH近似により離散化した状態でTaylor展開することで、次式のように導出できる。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi \rangle_i &:= L_i^{-1} \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j (\phi_{ij} - R) \nabla w_{ij} \\ &\approx \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} L_i^{-1} \nabla w_{ij} =: \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

$$L_i = \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} V_j (\nabla w_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}) \quad (2)$$

$V_j$ は  $j$  粒子の代表体積、 $\phi_i$ は  $i$  粒子の物理量( $\phi_{ij} := \phi_j - \phi_i$ )、 $w_{ij}$ は  $j$  粒子の  $i$  粒子に対する重み、 $\mathbf{r}_i$ は  $i$  粒子の位置ベクトル( $\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ )を示す。 $R$ はTaylor展開の剰余項であり、ここでは2次以上の高次項となる。式(1)は、2次以上の項を無視した1次精度の勾配補正モデルである。 $R$ に次節の式(3)で与える空間2階微分項をまでを考慮した勾配補正モデルが、SPH(2)の勾配モデルである。

### (2) SPH(2)による空間2階微分

2次元問題における高精度2階微分モデルは、次式に示す  $3 \times 3$  の行列を各2階微分項に対して数値的に解くことで評価できる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j F_{ij} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{p}_{ij}^T \left[ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right]^T \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j F_{ij} \mathbf{q}_{ij} \left( \phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \sum_{k \in \mathbb{S}_i} V_k \phi_{ik} \tilde{\mathbf{w}}_{ik} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで,  $F_{ij}$ ,  $\mathbf{q}_{ij}$ ,  $\mathbf{p}_{ij}$ は次の式で定義される.

$$F_{ij} := \mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{ij} / |\mathbf{r}_{ij}|^4 \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_{ij} := [x_{ij}^2 \quad y_{ij}^2 \quad x_{ij} y_{ij}]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_{ij} := [A(x, x) \quad A(y, y) \quad A(x, y)]^T \quad (6)$$

$$A(a, b) := a_{ij} b_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \sum_{k \in \mathbb{S}_i} V_k a_{ik} b_{ik} \tilde{\mathbf{w}}_{ik} \quad (7)$$

### 3. SPH(2)による自由表面流れ解析に向けた改良

SPH法の計算スキームでは, 境界条件として自由表面で  $p = 0$  [Pa]を与えるため, 表面の特定は高い精度で行わなければならない. SPH(2)では, 特に自由表面判定の誤判定に敏感に反応し, 圧力ポアソン方程式によって非物理的な圧力が求解されることで計算不安定性を引き起こしていた. そこで本研究では, 固有値による自由表面判定<sup>3)</sup>に改良を施したI-SPH(2)を提案する.

#### (1) 自由表面判定の改良

式(2)で示される勾配補正行列 $\mathbf{L}_i$ は, 2次元化において  $2 \times 2$ の行列となり, 粒子配置が乱れた際に補正を与える. 従って, 粒子分布が図-1(a)のように乱れがないとき,  $\mathbf{L}_i$ は単位行列となる. このような特性から,  $\mathbf{L}_i$ の行列式は, 粒子分布に乱れがない際に1.0に近づき, 図-1(b)のような粒子分布の乱れや粒子欠損が顕著になると, その値は1.0よりも小さくなる.

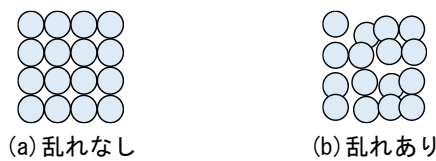


図-1 粒子分布図

既往の手法において, 自由表面付近で判定漏れが生じる粒子の $\mathbf{L}_i$ の行列式が0.6以下であることから, 行列式が0.6以下となる際に, 自由表面とするという条件を既往の手法に追加した.

#### (2) 自由表面付近における勾配補正の取り扱い

自由表面付近で計算が不安定になる要因として, 自由表面判定以外に, 粒子欠損の見られる表面付近で勾配補正を行っていたことが挙げられる. 勾配補正は粒子欠損がある際に, その欠損分を補う働きをするため, 図-2(a)に示すように自由表面付近において空気中に勾配を保持するような水粒子がある状態を仮定するといえる. 従っ

て,  $\mathbf{L}_i$ の行列式が0.8以下となるような, 自由表面付近の速度の発散において勾配補正を用いない次の式(8)を用いることで, 図-2(b)に示すように空気粒子を考慮して評価する. その際に, 空気粒子は, 水と同様の対象粒子と同様の速度で移動しているという仮定をしている.

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_i := \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \mathbf{w}_{ij} \quad (8)$$

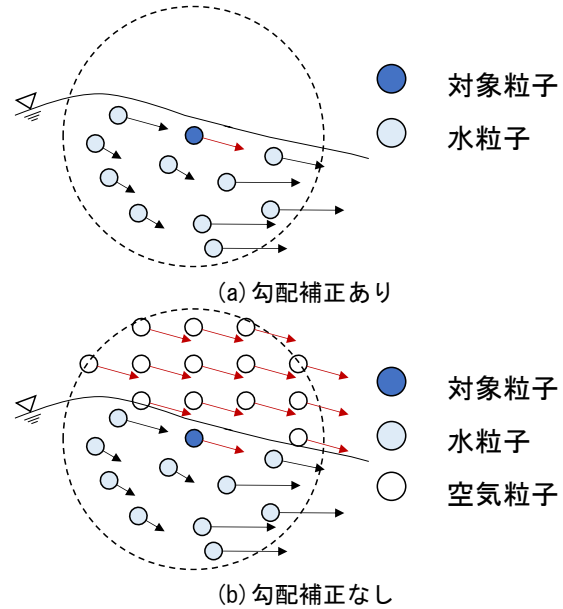


図-2 勾配補正と標準的な勾配のイメージ図

### 4. 正方流体回転解析

#### (1) 概要

I-SPH(2)の計算安定性と精度を検証するために, 検証例題の1つである正方流体回転解析を行った. 解析モデルは, 1辺が100cmの正方形領域の無重力・無粘性流体であり, 初期条件として正方形領域の図心を中心に角速度1.0rad/secを与えた. この例題において, 正方流体の外縁が自由表面となっている. 解析条件は粒子直径を0.5cm, 時間増分を  $1.0 \times 10^{-4}$ sとした. また, この例題にのみ以下の式(9)で示すXSPH法<sup>4)</sup>を導入し, 粒子の速度を平滑化することで計算安定化を図った.

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i + \epsilon \sum_{j \in \mathbb{S}_i} 2 \frac{m_j}{\rho_i + \rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \mathbf{w}_{ij} \quad (9)$$

式(9)における $\epsilon$ は, 平滑化の程度を規定する定数で, 経験的に決定する必要がある. 本解析では,  $\epsilon = 0.05$ とした.

#### (2) 解析結果

解析結果を図-3に示す. 図-3(a)の改良なしでは, 自由表面の判定漏れから計算不安定性が引き起こされ, 図示した時刻  $t = 1.32$ sの次の時間ステップで計算が破綻した. 一方, 図-3(b)の改良ありでは, 自由表面の漏れが減少したことで計算安定性を得て, 長時間の解析を行えた. これらの結果から, 自由表面の改良により正確な境界条件を与えることで, 計算安定性が向上したと考える.

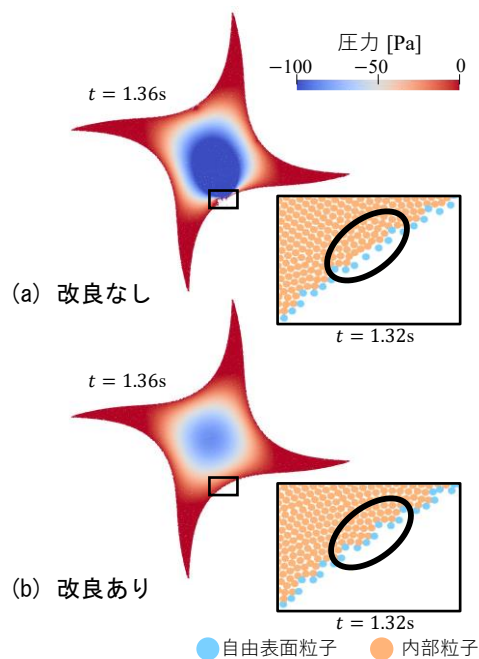


図-3 解析結果の比較

## 5. 水柱崩壊解析

### (1) 概要

I-SPH(2)の妥当性確認のために、水と同様の粘性・一般的な重力下における水柱崩壊解析を行った。解析モデルは、 $100cm \times 300cm$ の水槽と $40cm \times 40cm$ の水柱からなり、粒子直径は $0.5cm$ 、時間増分は $5.0 \times 10^{-4}sec$ とした。また、I-SPH(2)の比較のために、高精度な微分モデルのみを用いた解析も行った。

### (2) 解析結果

解析結果を図-4に示す。図-4(b)に示されるSPH(2)モデルのみを導入した場合、自由表面の誤判定によって非物理的な圧力が評価され、表面付近で計算が不安定になり、計算が破綻した。一方で、図-4(a)に示されるI-SPH(2)による解析では、提案した改良法によって波が発生して粒子同士が激しく衝突するような場合においても、高精度微分モデルによる表面付近の計算不安定性を解消し、長時間かつ高精度な解析を実現した。

## 6. 孤立波解析

### (1) 概要

I-SPH(2)の有用性を示すために孤立波解析を行った。解析モデルは、 $1400cm \times 20cm$ の水路と造波板からなる。粒子直径を $0.5cm$ 、時間増分を $1.0 \times 10^{-4}s$ とした。造波板をGoring<sup>5)</sup>の提案式に基づき駆動させて孤立波を生成し、速度分布と水面位置の時間遷移を計測した。また、ここでは本研究で提案したI-SPH(2)と数値安定性に優れた和モデルを用いた従来型のISPHの比較を行う。I-SPH(2)と従来型のISPHでは、圧力勾配の式が異なる。式(10)、式(11)にI-SPH(2)と従来モデルの圧力勾配の式を示す。

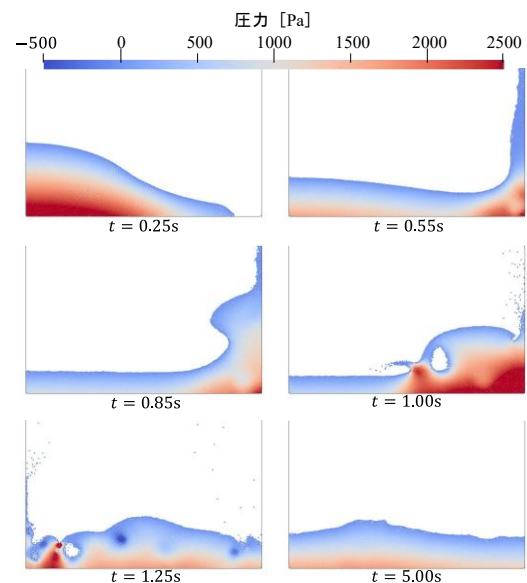
$$\text{I-SPH(2)} \quad \langle \nabla p \rangle_i = \sum_{j \in S_i} \frac{m_j}{\rho_j} (p_j - p_i) \nabla w_{ij} \quad (10)$$

$$\langle \nabla p \rangle_i = \rho_i \sum_{j \in S_i} m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{従来型} \quad &= \rho_i \sum_{j \in S_i} m_j \left( \frac{p_j}{\rho_j^2} - \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla w_{ij} \\ &+ 2 \sum_{j \in S_i} \frac{m_j}{\rho_i} p_i \nabla w_{ij} \end{aligned} \quad (12)$$

### (2) 解析結果

速度分布図を図-5に示す。従来モデルでは、速度が減衰しながら波が進行するのに対して、I-SPH(2)では速度の減衰が少ないことが示されている。また、孤立波による水面位置の変化を示した図-6では、従来モデルでは、孤立波の波高の減衰が見られるのに対して、I-SPH(2)では波高が保持されていることを定量的に確認した。これらから、I-SPH(2)は従来モデルよりもエネルギー保存性に優れたモデルであることが示された。この結果は、従来モデルが密度変化を考慮して人工的な安定化項（式(12)の第2項）を導入しているのに対して、I-SPH(2)では、人工的な項を排除したモデルであることに起因すると考える。



(a) 改良あり

(b) 改良なし

図-4 各時間ステップにおける水柱崩壊挙動

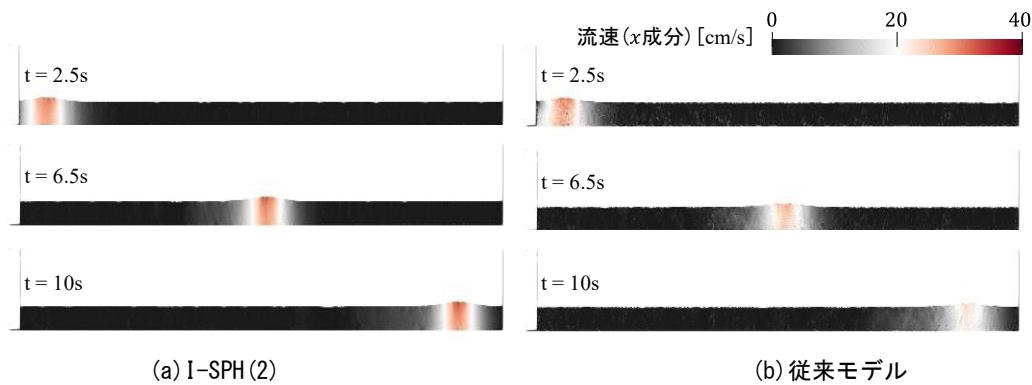


図-5 各時間ステップの流速分布の比較

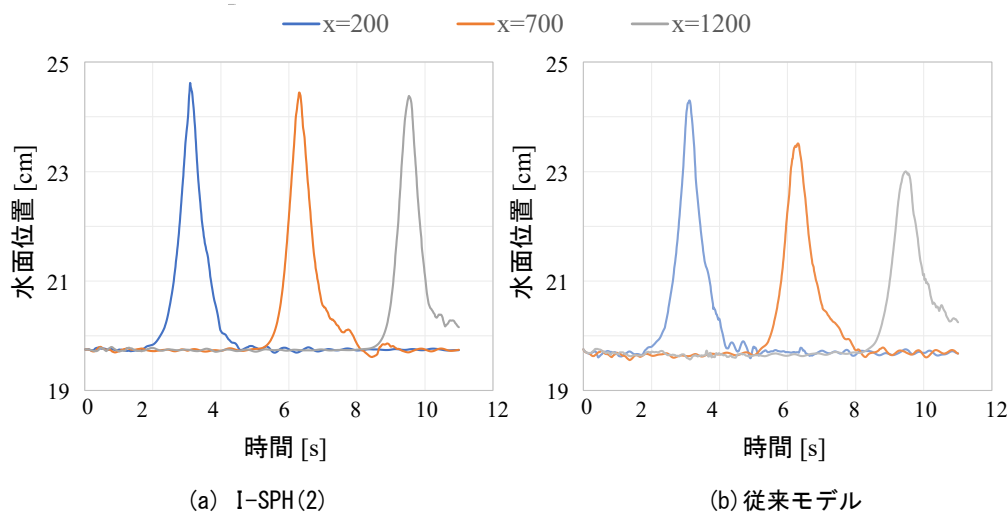


図-6 孤立波による各地点の水面位置の変化

## 7. 結言

本研究では、空間 2 次精度を有する微分モデルである SPH(2)を自由表面流体解析に適用するために、I-SPH(2)を提案した。SPH(2)のみを導入した際には、自由表面の誤判定に伴う圧力振動が計算不安定性の要因であることを究明し、I-SPH(2)では自由表面判定の改良と表面付近で勾配補正を行わないことによって計算不安定性を解消することを試みた。I-SPH(2)の検証・妥当性確認として、正方流体回転解析・水柱崩壊解析を行い提案手法によって計算不安定性を解消し、高精度かつロバストな解析が実行できることを示した。さらに、孤立波解析では、従来法との比較によって I-SPH(2)がエネルギー保存性について優位であることを示した。今後は、波の斜面遡上において見られる、ソリトン分裂による波の分散性を I-SPH(2)によって再現することで、高精度な解析が可能であることを示す。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP20H02418 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝, 高精度 SPH 法～空間 2 次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～, 土木学会論文集, Vol. 79, No.15, 22\_15019, 2023.
- [2] A. Khayyer, H. Gotoh, Y. Shimizu : Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context, J.Comput. Phys., Vol.332 pp.236-256, 2017.
- [3] S. Marrone, A. Colagrossi, D. Touze', and G. Graziani, Fast free-surface detection and level-set function definition in sph solvers, J. Comput. Phys., Vol.229, No.10, pp.3652–3663, 2010.
- [4] J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Vol.30, No.1, pp.543–574, 1992.
- [5] C. H. Su, R. M. Mirie, On head-on collisions between two solitary waves. *J. Fluid Mech*, Vol.98, No.3, pp. 509-525, 1980