計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　計算工学会

自然座標系粒子運動の遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解による解法

Numerical scheme for particle motion in the natural coordinate system by the transfer matrix finite element method and discrete Helmholtz decomposition

今村純也[1)]

Junya Imamura

1) 博(工) *imi*計算工学研究室（〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp)

In a previous paper, I have proposed a generalized force method (GFM), in which the simultaneous equation is constructed novel reduction method for the treatment of the continua. This report is part of research regarding Helmholtz theorem, to apply the Helmholtz decomposition (*H-d*) to the finite element method. *H-d* is, however, in a certain coordinate expression. I proposed an improved *H-d* expression called *dHd*. The *dHd* includes *H-d* and other coordinate expressions. That is a multidirectional FEM concept. The objective of this report is to represent the particle motions into Cartesian coordinate system, which is in general expressed in cylindrical or polar coordinate system such as multibody dynamics. Depends on your habit, because I fell it complicate. I propose the system to represent in the transfer finite element method and in above *dHd*.

Key Words : *Particle method, Particle-mesh method, PFEM, Solid analysis, Unit cell method* (UCM), *Locking-free finite element method, C^1-continuity element method, Coulomb gauge.*

1.　背景と概要

粒子モデルの自然座標系剛体運動は通常，マルチボディダイナミクス(MBD)の運動式で表す.

その円筒座標系・極座標系の角運動量の式は，慣れにもよるが，煩瑣に感じる.

三次元(3D)の，Helmholtz分解による＜*x-y*＞平面への2D化モデルの変数は ＜$\{u, v, w^\#\}$ $(\partial w^\#/\partial z = 0)$＞ であり，$z$ 方向は剛体とし，渦運動を $w^\#(\equiv \Psi)$ で表す.

渦による変形は無く，固体では剛性 $\mathrm{G} = \infty$ の剛体回転に等しく，流れ場でも粘性係数 $\mu = \infty$ の変形に等しい.

$\mathrm{G} = \infty$ や $\mu = \infty$ のベクトル場は，変位も応力もカップリング行列 † で表される.

遷移行列法に依れば，通常の μ 値～ ∞ 値の状態ベクトル場 : {変位，応力}を連続的に表示可能である.（点 a の状態ベクトルを，点 b へ遷移可能．或いは還元する，とも言う.）

せん断ひずみ・応力は変位 $\{u, v\}$ と，通常の μ 値とで表して，遷移行列で計算する.

いずれもデカルト座標系表示なので，解り易い.

$w^\#$ の組み込み法は既報で提示したが，新しい知見を含めて，再度説明する．[1],[2]

粒子モデルとMBDの違いの一つは，前者が粒子自身の回転を含むのに対し，後者では一般に，その機構は考えない点である.

つまり，粒子モデルでは公転と自転を考え，MBDでは公転のみ考えるのが一般である.

粒子モデルとMBDのいま一つの違いは，前者がほぼネットワーク状の系のみで構成されるのに対し，MBDはツリー状の系とネットワーク状の系で構成され，かつツリー状のみの系が多い，と言う点である．（つまりMBDは剛体の連続桁で，ピンなどの中間メカニズムを有す機構が典型例である．）

いずれも遷移行列法が活用できるが，遷移行列法の特徴は2つあり，上述の粒子モデルとMBDの，機構の違いからそれぞれ異なる特長を活用する.

本稿は自然座標系解法として遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解法を適用し，粒子モデルを数値計算するスキームを提示する，ことを目的とする.

なお，MBDでも自転機構は考え得る．[3]

また，粒子モデルでは変位と応力のノードパラメータによる2種類の変分を使い，そのスキームは“混合変分法”の概念で説明できる．（気・液界面では必須．）[4]

気・液などの混相流では遷移行列法が必須であるが，単相では従来法で，かつ双対格子も可能である.

† 2 点間の$\{w, \theta\}$ および $\{M, Q\}$ のカップリング行列はいずれも $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$．棒の $\{u\}$ および $\{N\}$ は，いずれも[1].

2.　離散Helmholtz分解，遷移行列法の必要性

(1) 離散Helmholtz分解法の概念

本稿は“Helmholtz分解による連続体理論の，有限要素

法への適用に関する研究”の一環である．

Helmholtz分解（*H-d*）を修正し，離散Helmholtz分解（*dHd*）法を提案している．

dHd 法も任意のベクトル場を分解表示し，変位ベクトル場はポテンシャル $\{\varphi,\boldsymbol{\psi}\}$ で，ひずみベクトル場は $\{\Phi,\boldsymbol{\Psi}\}$ で分解表示する．

すなわち，ベクトル場をLateral（縦）成分と，Transverse（横）成分とに分解表示する．

H-d は，ひずみベクトル場 $\mathbf{V}$ を， Coulombゲージを制約条件として，式(1)で分解表示する．

$$\mathbf{V}=\nabla\Phi+curl\boldsymbol{\Psi}\ \ (div\boldsymbol{\Psi}=0) \tag{1}$$

式(1)を，$\mathbf{V}=grad\Phi+curl\boldsymbol{\Psi}$ や，$\mathbf{V}=\nabla\Phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi}$ で表示しなかったのは“意図がある”からである．

すなわち，*H-d* を修正して発展表示するためである．その発展形が*dHd* である．

dHd は，式(1)のひずみベクトル場 $\mathbf{V}$ の分解を，式(2)で表示する．

$$\mathbf{V}=\nabla\Phi^C+\nabla^1\boldsymbol{\Psi}\ \ (div\boldsymbol{\Psi}=0,\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\nabla\Phi) \tag{2}$$

$\nabla\Phi$ は縦成分の内の，非圧縮成分であり，$\nabla\Phi^C$ は圧縮・膨張成分である． ［付録１］参照のこと．）

新しい演算子を式(3)のように定義し，縦成分は新しいベクトル記号で，横成分は演算子で表している．（前者も演算子と呼ぶ．）

$$\left.\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{\Psi}&=\left[\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi},\nabla_{offd}\boldsymbol{\Psi}\right]\\ \nabla^1\boldsymbol{\Psi}&=\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}+offd\boldsymbol{\Psi}\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

$$where\ \nabla^1\boldsymbol{\Psi}\equiv\nabla\boldsymbol{\Psi}\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix},offd\boldsymbol{\Psi}\equiv\nabla_{offd}\boldsymbol{\Psi}\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

$\nabla^1\boldsymbol{\Psi}$ は，総和規約に従う表示 $\partial\Psi_i/\partial x_j$ を表す．

したがって，非圧縮流れ場は式(4)となる．

$$\mathbf{V}=\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}+offd\boldsymbol{\Psi}\ \ (div\boldsymbol{\Psi}=0,\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\nabla\Phi) \tag{4}$$

(2) 共役変数の概念

dHd では，$\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の横成分（非対角成分）を $offd\boldsymbol{\Psi}$ で表す他，$curl\boldsymbol{\Psi}$ でも表し，せん断形を$shr\boldsymbol{\Psi}$ で表すなど，(A+B) と (A-B) を共役変数と呼んで，$\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の9自由度数以上を，2成分のほぼすべての組み合わせで表し，かつ新しい演算子を定義して表して，計算して行く．

基本的に，$\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の成分数以上の組み合わせを，力学的に意味付けて，演算子で表示するものである．

詳細はもう少し後述するが，Cauchy-Riemannの関係式を数値的に満たすなど，桁落ち排除が目的である．

なお，Coulombゲージが代数的に（強解として）満たされれば，*dHd* は *H-d* に等しい．

(2) 有限変形式

式(1)，式(2)は微小変形理論（infinitesimal strain theory）に適用する分解式である．

本稿では“粒子ーメッシュ”法による流れ場へ適用するため，有限変形理論（finite strain theory）に従う分解式を，式(1)，式(2)に基づいて導き，適用して行くものである．（[付録２] 参照のこと．）

有限変形の術語は固体理論で用いられ，いろいろな解釈があるが，微小変形式が無限変形にも適用できるのに対し，有限変形理論の変形式は物質微分で表すので，数値計算では有限な領域：$\Delta\boldsymbol{x}=\Delta t\mathbf{U}$ に適用する，と解釈する．

流れ場では有限変形式表示は必須である．

(3) 流線上粒子変位の流通座標表示と回転

粒子の Φ は流線上に在る（Φ の軌跡が流線）．Φ は流通座標で表し，流線（Lagrange）座標上の粒子変位は，$\Delta\Phi\nabla\Phi$ で流通座標表示される．

dHd では＜$\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\nabla\Phi$＞なので，$\boldsymbol{u}=\Delta\Phi\,\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}$ であり，$\Phi^2=\boldsymbol{\Psi}^2\ (\equiv\Psi_1^2+\Psi_2^2+\Psi_3^2)$ である．

$\Delta\Phi\,\partial\Psi_i/\partial x_j$ の $\Delta\Phi\,\partial\Psi_i/\partial x_i$ 項が縦成分であり，他の項が横成分である．

添え字を $(i=1{,}2{,}3),(i+1=2{,}3{,}1),(i-1=3{,}1{,}2)$ で表すとし，せん断ひずみを＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}+\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$＞で，渦度を＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}-\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$＞で表す．

変位の i 軸方向縦成分 ＜$\Psi_i\,\partial\Psi_i/\partial x_i$＞ に対し，渦度＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}-\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$＞は粒子の自転を表し，せん断ひずみ＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}+\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$＞は小さな公転を表す．

地球の公転を粒線上変位 $\Delta\Phi\nabla\Phi$ で表せば，地球と共に月も $\Delta\Phi\nabla\Phi$ で移動しながら，地球の周りをせん断ひずみ分，小さく公転し，渦度分自転する，と考える．（月の裏側が，地球からは見えない自転．）

小さな公転と自転は，z 軸周りの流れ関数 Ψ_3 のみではなく，Ψ_1,Ψ_2 も在り，複雑に回転する．

任意のベクトル場を表すとする*dHd* では，$\boldsymbol{u}=\nabla^1\boldsymbol{\psi}$ である．（ただし，in case $(div\boldsymbol{\psi}=0)$．）

(4) 変位ベクトル場の *dHd* 表示

念の為，変位ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の非圧縮 *dHd* 表示式を式(5)に示して置く．

$$\boldsymbol{u}=\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi}+offd\boldsymbol{\psi}\ \ (div\boldsymbol{\psi}=0,\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi}=\nabla\varphi) \tag{5}$$

式(5)は要素形状を表すためには必要であるが，本稿では(Φ^C,Φ,Ψ_i) で粒子の軌跡を表し，ノードの軌跡も同様にして表すので，式(5)の表示を使うことはない．

(5) ポテンシャル要素と圧力勾配 ∇P 要素

非圧縮では $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Psi}$ であり，$(\boldsymbol{u},\mathrm{P})$ を変数とする原始変

数法は，Helmholtz分解の視点では，∇P は$\nabla\varphi$ の導関数の並び $\cdots,\nabla\upsilon,\nabla\varphi,\nabla\Phi,\nabla\mathrm{P}\cdots$ のひとつである．

MAC（Marker And Cell）法は，$\nabla\varphi$ に代えて，∇P をΔt の重み付きで適用し，Coulombゲージ ($div\boldsymbol{\psi}=0$) を満たして行く．

したがって一般に言う原始変数法は，∇P を介したHelmholtz分解法と言える．（P は法線応力平均，と定義した抽象量．）

ただ, 圧力は2種類で考えると数値計算上, 都合がよい．

ひとつは大気圧（気圧）である．いま一つは力による圧力である．

気圧は重力 g を既知とし，大気の重量として説明されるようである．

ただ著者は g を，地球が丸いこと（半径6,400*km*）による万有引力の迫持ち効果と解釈している．かつ海面上とその他の地上では異なる．

それらの g を基準にして，水圧を含めて，圧力 P で表す．（密度を ρ として，$p=\mathrm{P}/\rho$．）

宇宙船内やキャビティなどの閉空間では，P をgivenとして $g=\mathrm{P}/\rho$ を計算する．よって $\rho\nabla g$ が見掛け上の圧力勾配となり，表面張力が計算される．

いま一つの, 力による圧力は, 閉空間のキャビティフローで生じるような, 粘性係数 μ による力: $\mu\nabla^1\Phi\ (=\mu\nabla^2\varphi)$ の1/3の値と解釈する．（∇^1 はスカラーにも適用．）

そこで，ひずみレベルのCoulombゲージも，temporaryな作業変数 $\nabla\Phi$ を介して満たして行く．（$\nabla^1\Phi=0,\nabla^1\Phi\equiv div\boldsymbol{\Psi}$）

結論として，気圧のみ P 要素で表す．（ダムブレーク問題などではダム壁内・外の，P の差が流れ発生のトリガーとなる．）

気圧・水圧は，$\{\mathrm{P}\}_0$ を与えて，ノードパラメータ$\{\nabla\mathrm{P}\}_k$ を計算して行き，系の P 分布を得る．

拡散計算には, 高次の $\{\Phi,\Psi_i\}$ 要素を適用して計算して行く（のが望ましい）.（加速度項の Φ 要素と区別する必要のある場合には, Φ^d で表す.）

一般には P の分布図（したがって本稿では φ の分布図）は，流れ場の視覚的データとして活用される．

φ は必要に応じ，$\nabla^1\Phi$ を与えて＜ $\nabla^2\varphi-\nabla^1\Phi\Longrightarrow 0$ ＞で計算する．

(6) 粒子ーメッシュ法

本稿モデルは，粒子・“メッシュ法”であり，従来型の粒子法が得意とするメッシュフリー法ではない．†

PFEM (Particle Finite Element Method) の六面体要素版でもある．

モデルの特徴は 1×1×1 の単位セルで，六面体要素を間接的に表す写像法に在る．単位セル法（UCM）と呼ぶ．

六面体要素頂点ノードk の座標値 $\{x_i\}_k$をそれぞれ，単位セルの頂点ノード値とし，3重1次要素で六面体形状を表す．

UCMで，六面体要素の独立変数 x_i を計算して行く．

四面体要素のPFEMに比べ，UCMによる六面体要素法が優る第一の点は，自動化し易いことに在る．

(7) 隣接要素

有限要素法は，隣接要素とノード（パラメータ）を共有することで適合させる．

セル頂点ノードを繋ぐ“メッシュ”の他，セル重心の粒子間を繋ぐ“双対メッシュ”を考える．

シミュレーション初期・静止状態の粒子・メッシュの座標を本籍（permanent address）と呼び，相互関係を本籍簿に記録し，移動中を現住所（current address）と呼ぶ．

移動中は直近の初期格子セルの重心を現住所とし，双対メッシュを組む．

双対メッシュの六面体セル重心を繋いで，初期直交メッシュに対応する六面体メッシュを組む．

よって本籍簿を辿れば，隣接六面体要素が分る．

その六面体要素体積は初期の単位セル体積と数値計算上，差が出て来るので，Coulombゲージを満たすよう修正して行く．

粒子の移動点は，六面体有限要素法を陽解法で予測し，陰解法で修正して行くことで，その重心点位置で表す．

(8) 自転・公転

はじめに述べたように，粒子運動では自転と公転が混在する．

フイギュアスケートの動きを観察すれば，3回転などは公転無しのキックだけではできず，公転を自転に変える運動が主体と言えよう．

終盤のスピン演技も，掌に注目すれば, 公転を自転に変える動きを活用する，ことが解る．

(9) 気・液界面の計算

気・液界面の計算法[8] を超訳すれば，液相は気相界面応力を境界外力としてNeumann条件で解き，気相は液相界面位置を境界変位としてDirichlet条件で解く方法，と言えよう．

ただ, それは圧力勾配で表した界面法線方向の応力・変位に関するものであり，界面接線方向はいずれの相も適合条件を満たすべきである．

dHd では＜ $\boldsymbol{u}=\Delta\Phi\nabla\Phi,\ \mu\nabla(\Delta\Phi\nabla\Phi)=\nabla(\Delta\Phi\nabla\mathrm{F})$ ＞であるから，異なる相の要素間境界（界面）では，$\nabla\Phi$ は界面並行方向成分のみ連続させ，法線方向は ∇F の仮想仕事変分式で解くべきである．それが“混合変分法”である．

† メッシュフリー法でも，当該粒子は $\{\varphi\}_{particle}=0$ とし，勾配パラメータ $\{\nabla\varphi\}_{particle}$ を，周囲の粒子との間で回帰計算して行く，ことで適用できる．

そこで本モデルでは，“混合変分法”で解いて行く．（法線ひずみは従属的に不連続となる．）

界面接線方向は変位を連続とし，変位勾配パラメータでの変分式を解く．縦成分応力はそれぞれの要素内で伝達される．その縦応力の境界を跨ぐ横変化がせん断応力として発生(存在)している．

したがって頂点ノードは，法線方向の応力パラメータと接線方向変位勾配パラメータで表すのが望ましい．（准C1級要素の適用など．C1級要素は，より望ましい．）

(10) 遷移行列法

遷移行列法[5][6] は還元法[7] とも呼ばれ，伝達マトリックス法[8] とも邦訳されている．

通常，有限Taylor 級数で変位の要素関数を表すのに対し，遷移行列有限要素法では，勾配 ∇u_i 以上の係数項には粘性係数 μ (固体では剛性G)を乗じて $\{\nabla F_i\}_0$ $(\equiv\ \mu\{\nabla u_i\}_0)$ で表す．

したがって，元の変位のTaylor 級数の勾配項の，係数は $\{\nabla F_i\}_0/\mu$ で表す．

混合変分法は，変位の有限要素と遷移行列有限要素の2 つを使って計算して行くものである．

応力パラメータの変分行は仮想仕事変分式ではなく，応力の最小2乗変分式で組み込むこととなる．

(11) Cauchy-Riemannの関係式（共役変数法）

数値Lockingの原因は2つある．

1つは，正方要素を45°傾けた菱形になると，不完全 *n* 次要素では計算できない，のが典型的なLockingである．

菱形に近い亜菱形でも顕れてくるので，粒子と共に要素も自転する本モデルでは避け難い．

いま1つはCauchy-Riemann (C.-R.) の関係式を放置することで起る．

後者は(A+B)と(A-B)を共役(軛)変数と呼び，両方の方程式を満たすことを要求している，と解釈できる．

つまりC.-R.の横成分式は，(A+B)形の Cauchyの応力式で表す方程式と，(A-B)形の 渦度で表す方程式を，同時に解くことを要求している．

C.-R.の縦成分式 (A-B)=0 は，変形すれば45°座標回転系のせん断ひずみ式であり，(A+B)=0 の連続式と共に満たすことを要求する．（したがって，すべての回転座標系のせん断ひずみを最小化する．）

2つの式を同時に満たす $\boldsymbol{u}$ を計算するため，それぞれ変数 $\nabla\Phi$ と $\nabla\boldsymbol{\Psi}$ で表して解いて行くのが *dHd* 法である．

3. 数値計算スキーム

(1) 基本的考え方

形状要素は3重1次関数で表す．速度要素も同じ関数形とするアイソパラメトリック要素の場合で示す．

流れ場はポテンシャル要素で表す．

上述までの*dHd* の特性を踏まえれば，数値計算スキームは大変簡単となる．

粒子法は自由界面問題を解くために開発されてきたが，本モデルの特性は，閉空間問題にも適っている．

勿論，気・液２相問題には適している．

気・液２相問題は，自由界面モデルで解くのが一般である．液相に注目するものであり，いわゆる渦なし流れとして，Φ 要素のみで解く．

そこで本モデルの２相でも，Φ 要素のみのスキームを先ず示す．

それを気相の流れに注目すれば，$\boldsymbol{\Psi}$ 要素も必須である．

ただ2相でも，取り扱いはΦ 要素のみのモデルと大きくは変わらないので，$(\Phi,\boldsymbol{\Psi})$ 要素法は閉空間問題で示す．

翼型の計算も，Dirichlet条件で囲んで，閉空間問題として解く．任意形状に対応し易い本モデルの，格好の対象問題である．

ただ，ここでは簡潔に示せる強制キャビティを，閉空間問題の代表として示す．

更にその前に，最も簡単なクエットの流れで加速度項と拡散項の計算ステップを示す．

(2) 渦なしの気・液２相問題の数値計算法

Φ 要素では，渦度は代数的にゼロで，横成分はせん断ひずみ・せん断応力，のみを表す．

計算式を式(6)に示す．

$$\rho\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}+\nabla\mathrm{P}-\mu\nabla^2\Phi=0\ \ (\nabla^1\Phi=0) \tag{6}$$

$\nabla\mathrm{P}$ は気圧であるが，以下では省略する．

拡散項に，$\nabla\nabla^1\Phi=0$ を作用させれば，せん断形の式(7)を得る．

$$\rho\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}-\mu(2\nabla_{diag}^2\Phi+shr^2\Phi)=0\ \ (\nabla^1\Phi=0) \tag{7}$$

3つの2D鏡面像で，順次，かつそれを収束するまで反復計算する．

式(6)拡散項には，共役変数の最小化式＜$nai^2\Phi\Rightarrow0$＞を制約条件式として付帯させ，式(6)と式(7)を，仮想仕事式で同時に解く．

したがって，式(7)に＜$imi^2\Phi\Rightarrow0, nai^2\Phi\Rightarrow0$＞を制約条件として付帯させることになる．

(3) クエットの流れ

最も簡単な1DのCouette 流れの過渡状態計算法で，勾配要素の適用法を示す．

動粘性係数を ν として，方程式は式(8)である．

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} = 0 \qquad (8)$$

時間ステップ *n=0* の初期状態を静止（U=0）とし，*n=1* から移動壁速度を（U=1.0）とし，*n=0* 〜*1* 間は線形変化とする.

それを Φ 要素で表せば, $\Phi = 1.0$ on wall で, かつ定速.

せん断ひずみは＜ $\partial\Phi/\partial y = \Phi^{(1)}$ on wall ＞で表す.

要素は，y 方向両端のノードパラメータを $\{\Phi^{(0)}\}_k$ として表す.（拡散項は2次の要素で表すのが望ましい. 中間ノードは $\{\Phi^{(2)}\}_m$ で表す. ）

加速度は時間ピッチ Δt の間を一定(不連続)とする.

Φ 要素の拡散項は，加速度項をgivenとして，時間断面 $n-0$ で，式(9)で計算する. （$\Delta\Phi$ は増分. ）

$$\int_\Omega [\delta\Phi \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} + \delta\frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot \nu \frac{\partial(\Phi\Phi^{(1)})^{n-0}}{\partial y}] d\Omega = 0 \qquad (9)$$

加速度項は $n+0$ で，拡散項をgivenとして計算する.

第１ステップは $n+0=0+0$ の加速度計算であり，結果は $\Phi^{n+1} = 0$ である.

3Dも，Coulombゲージを加えれば, 計算ステップは同じであり，上述はそのスキーム説明のため示した.

2重円環内流れのテイラー・クエットの流れが知られている.

1Dのクエット流れを，奥行 z 方向に周期境界で拡張して2Dとし, 流れ関数で渦度＜ $\partial\Psi/\partial z - \partial\Psi/\partial y$ ＞を表せば, 2重円環モデル(直径無限大)が構成でき，Taylor渦の計算が可能となる.

(3) 強制キャビティの数値計算法

Φ 要素と $\mathbf{\Psi}$ 要素を用い，移動壁速度はΨ_3 の速度(=1)で与える. 両端(側壁天端)ではゼロとして, 両端要素の移動面で線形変化する. （$\Phi = 0$ on wall）

或いはクエット流れと同様, $\Phi = 1.0$ on wall , せん断ひずみ : $\Phi^{(010)}$ on wall,($\mathbf{\Psi} = \mathbf{0}$ on wall）で与える方法と, そうではなく, $\mathrm{W}^{(000)} = \Phi^{(000)} = 1, \mathrm{W}^{(001)} = \Phi^{(001)} = 0$ on wall）で与える方法とある.

後者は，Φ 要素と $\mathbf{\Psi}$ 要素のせん断ひずみは交換可能なことによる. （$\Phi^{(001)} = \Psi_3^{(001)}$）

テイラー・クエットの流れも，（移動壁は u =1.0 ではなく，w=1.0 でz方向に移動. ）と考えることもできる.

2Dモデルを＜周期境界→Dirichlet境界＞として, 側壁を入れたモデル.

したがって，2Dキャビティはテーラー渦の計算モデルと考えることもできる.

ただそれが，移動壁が u =1.0 とする原始変数法でも，ほぼ同じ解を得ることができている.

と言うことは，2重円環が相対速度差で回転するモデルと，軸方向に，相対速度差(逆速度)で移動するモデルでテイラー渦を計算した結果が，同じ解になる，ことを示している.

結局，$\nabla\boldsymbol{u}$ の横成分(非対角項) 6つ は 3つ に縮約できる，とする既報[9]を証明する1例となる.

4. まとめと今後の課題

MBDや粒子法では，自然座標系は円筒・極座標で表すのが一般であるが, デカルト座標表示に揃える方が, いろいろと都合が良い，として遷移行列表示法を示した.

要は，剛性無限大のカップリングが表せればよい.

粒子法は一般に, 自由界面問題を対象とし, いわゆる渦なし流れを扱う.

閉空間問題も粒子法のLagrange型(流線座標系)で, かつ流通座標で計算する方法を，離散Helmholtz分解に基づき提示した.

本稿では拡散項は, Φ で表す公転, $\mathbf{\Psi}$ で表す小さな公転と自転，のすべてを表すとした.

加速度項はΦ のみで, 自由界面問題を対象として, 公転(流線)のみで, 渦なし型仕事量を加えるモデル, とした.

粒子ーメッシュ法の特徴のLagrange型解法に着目して, 閉空間問題に適用するなら，$\mathbf{\Psi}$ も加える精密なモデルを適用すべきである.

今後の課題は数値的検証にあるが，本モデルが広く認知されて, 多くの人で検証され, 更に発展されることが最大の課題と期待である.

[付録１] 離散Helmholtz分解(*dHd*)表示法

任意のベクトル場 $\mathbf{V}$ を，次式で分解表示する.

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi^C + \nabla^1\mathbf{\Psi} \ (div\mathbf{\Psi} = 0, \nabla_{diag}\mathbf{\Psi} = \nabla\Phi) \qquad (a)$$

$\nabla\Phi$ は縦成分の内の，非圧縮成分であり，$\nabla\Phi^C$ は圧縮・膨張成分である. （$\nabla^1\Phi = 0, \nabla^1\Phi^C \neq 0$）

$\nabla_{diag}\mathbf{\Psi}$ は, $\nabla\mathbf{\Psi}$ の対角成分を表すとする. Coulombゲージにより自明であるが, 念のため ($\nabla_{diag}\mathbf{\Psi} = \nabla\Phi$) とした.

$\nabla^1\mathbf{\Psi}$ は, 総和規約に従う表示 $\partial\Psi_i/\partial x_j$ を表す, とする. すなわち $\nabla\mathbf{\Psi}$ の行和で表すベクトルである.

$\mathbf{V}$ はひずみベクトル場を表すとして, 変位ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ は次式で表す.

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi^C + \nabla^1\boldsymbol{\psi} \ (div\boldsymbol{\psi} = 0, \nabla_{diag}\boldsymbol{\psi} = \nabla\varphi) \qquad (b)$$

更に, ポテンシャルベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ は次式で表すとする.

$$\boldsymbol{\psi} = \nabla\upsilon^C + \nabla^1\boldsymbol{\lambda} \ (div\boldsymbol{\lambda} = 0, \nabla_{diag}\boldsymbol{\lambda} = \nabla\upsilon) \qquad (c)$$

$\Phi^C = \nabla^2\upsilon^C, \Phi = \nabla^2\upsilon$ などの関係が在る.

他のベクトル場も，同様に表示して行く.

［付録２］流線上移動粒子の流通座標表示と回転

Φ は流通座標で表し，モデル粒子の Φ は，流れ場では流線上に在る．（定義では, 質量粒子の軌跡が流線.）

Φ は流線の長さであり, 流通座標値の変化は $\Delta\mathbf{X} = \boldsymbol{u}$ である．

ここでは固体のベクトル場も表す意味を込め，かつ離散表示する意味も込めて, 流線を“粒線”とも呼ぶ, とする．

つまり，1粒子の Φ のLagrange座標を流通座標で表す．或いは1粒線を流通座標で表す．

粒子ーメッシュ法では, 粒線群を流通座標表示し, 粒線群を，有限要素関数で補間して連続表示する．

粒線の接線方向, および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を，粒線座標（Lagrange座標）とすれば，横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力としても表れる．

ただ, 粒子の自転は接線軸周りのみではなく, 他の軸周りもある．そこで $curl\boldsymbol{\Psi}$ も流通座標で表す．

1粒子の流通座標を $\mathbf{X}_{\mathrm{P}}$ で表し，初期（静止時）座標を $\mathbf{X}_0$ で表すとする．

∇Φ も流線座標で表した勾配となる．

*dHd*では $\nabla\Phi = \nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}$ で表すとした．Φ のデカルト座標上の増分である．つまりは方向余弦であり, Φ は非圧縮を表すとしているので，$\nabla^1\Phi = 0$である．

∇Φ は法線ひずみ（のデカルト座標表示）であり，相対量である．

静止時からの Φ の，方向別増分は$\Phi\nabla\Phi$ である．

時間ピッチ Δt 間の増分を $\Delta\Phi$ とすれば，Δt 間の流通座標の増分 $:= \boldsymbol{u}$（非圧縮変位）であり，$\boldsymbol{u} = \Delta\Phi\nabla\Phi$ である．

体積変化の増分は $\Delta\Phi^C\nabla^1(\Phi + \Delta\Phi^C)$ とし，一般解 $\nabla^1\Phi = 0$ を加えて表す．

$\Delta\Phi\nabla\Phi$ は座標回転して $= \boldsymbol{u}(s, n, \zeta)$（:非圧縮，Lagrange座標．$s$ が接線方向．）でも表す．

dHd では $\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi} = \nabla\Phi$ と定義したので $\Delta\Phi\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{u}$ であり，$\boldsymbol{\Psi}$ のTaylor展開1次の項 $< \Delta\mathbf{X}_{\mathrm{P}}\cdot\nabla\boldsymbol{\Psi} >$ を速度表示 $<= \Delta t\boldsymbol{\Psi}\cdot\nabla\boldsymbol{\Psi} >$ して，縦成分$<= \Delta t\Psi_i\,\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi} >$ に着目すれば，$< \Delta t^2\Phi^2 = \Delta t^2(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2) >$ であり，Φ は接線方向速度である．

（速度 Φ の）$\Delta t\Phi\nabla\Phi$ が $\Delta\mathbf{X}_{\mathrm{P}}/\Delta t = \boldsymbol{u}_{\mathrm{P}}/\Delta t$ である．

デカルト（Eulerian）座標型では $< \mathrm{U}_i = \Psi_j\nabla\Psi_i >$ であり，非定常では加速度項を加えて物質微分表示する．

流線（Lagrangian）座標型でも，流通座標表示では，同様である．

粒子自身は $curl\boldsymbol{\Psi}$ 分自転する．正確には $shr\boldsymbol{\Psi}$ 分小さく公転しながら自転する．

$\Delta\Phi\nabla\Phi = \boldsymbol{u}$ は流通座標で表示するとしたが，変位に追従して表す座標（粒線座標）であり，固体では有限変形理論の変位に追従して表す“有限変位座標“とも呼べよう．

有限変位座標表示の有限変位ベクトル $\Delta\Phi\nabla\Phi$ は，非線形であることに留意する．

準静的載荷の仮想時間 Δt 後には，時間ステップを $n = 0,1,2,\cdots$ として，$\boldsymbol{u}^{n+1} = (1 + \Delta t)(\Delta\Phi\nabla\Phi)^n = (\Delta\Phi\nabla\Phi)^{n+1}$ であり，離散計算では仮想時間 Δt は小さいほど，当然乍ら，粒線を精度高く表せる．

任意のベクトル場を表すとする*dHd* では，$\boldsymbol{u} = \nabla^1\boldsymbol{\psi}$ である．（ただし, in case ($div\boldsymbol{\psi} = 0$).）

渦度の表示に関しては次の通りである．

上述で，回転 $curl\boldsymbol{\Psi}$ もデカルト座標で表すとした．

$curl\Psi_3$ が *x-y* 鏡面上の，流れ関数表示の渦度である．

ただし，Ψ_3 は本来3D表示であり，2Dでは z 軸方向は剛体（$\partial\Psi_3/\partial z = \partial w^\#/\partial z = 0$）であるが，スライスした *x-y* 鏡面上の像は z 軸方向に，パラパラ漫画の如く変動する．

それを，小さく公転しながら自転する，と表現した．

3Dの $\partial\Psi_3/\partial z \neq 0$ 分が公転で，$< \partial\Psi_3/\partial y - \partial\Psi_3/\partial x >$ 分が自転（渦度・剛体回転）である．

地球の公転が粒線とすれば，月は地球の周りを小さく公転しながら，自転する，と考える．

小さな公転を $shr\boldsymbol{\Psi}$ で表し，自転を $curl\boldsymbol{\Psi}$ で表示するものである．（月の裏側は，地球からは見えない．）

かつ，Ψ_3 の z 軸周り *x-y* 鏡面像のみではなく，Ψ_1, Ψ_2 の小さな公転・自転も在り，複雑に回転する．

参考文献

[1] 今村: 離散Helmholtz分解表示の写像法と新しい状態ベクトル有限要素法による混相流モデル，計算工学講演会論文集, Vol.26, 2022.

[2] 今村: 離散Helmholtz分解（*dHd*）表示に基づくMindlin板理論・ティモシェンコはり理論の考察と精解モデルの提案，理論応用力学論文集, 2022.

[3] 今村：遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解によるマルチボディダイナミクス数値計算法のコンセプト, 計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.

[4] 今村： 有限要素混合変分法：准 C^1 連続な有限要素法, 計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023

[5] Falk, S. : Die Berechnung offener Rahmentragweken nach dem Reduktiosverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.61-80.

[6] Falk, S.: Die Berechnung geschlossener Rahmen-tragweken nach dem Reduktiosverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.96-109.

[7] R. Kersten 著, 伊藤学訳: 構造力学における還元法, 技法堂, (1968).

[8] 成岡, 遠田: 伝達マトリックス法, コンピュータによる構造工学口座 I –2–B, 培風館, (1970).

[9] 今村: 離散Helmholtz分解（*dHd*）表示に基づくMindlin板理論・ティモシェンコはり理論の考察と精解モデルの提案，理論応用力学論文集, 2022.